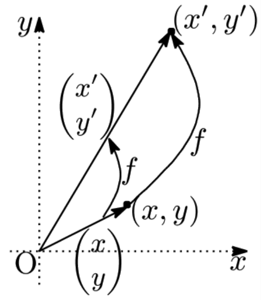
2006/9/11 更新

1 次変換

A 1 次変換とは

$$\begin{cases} X = 2x - y, \\ Y = x + 3y \end{cases}$$

i.e. $$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



のように，x', y' が x, y の 1 次式だけで表されるとき，

点 $(x,\ y)$ を**点** $(x',\ y')$ へ

写像の１種

写す変換 f を，行列 A の表す **1 次変換**といい，$(x',\ y')$ を $(x,\ y)$ の**像**，$(x,\ y)$ を $(x',\ y')$ の**原像**という．1 次変換 f は

ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を**ベクトル** $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ へ

写す変換とみなすこともでき，こちらの見方の方が有用性が高いので，以降においては主にこの立場で 1 次変換を扱う.

B 1 次変換の意味

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のとき，ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e_1}} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e_2}} \qquad \cdots ♤$$

と変形すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= A\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= xA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yA\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ☼ \\ &= x \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{\vec{e_1}'} + y \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{\vec{e_2}'}. \qquad \cdots ♠ \end{aligned}$$

♤と♠を比べると，A が表す 1 次変換 f とは

右へ１だけ移動　　　　　上へ１だけ移動

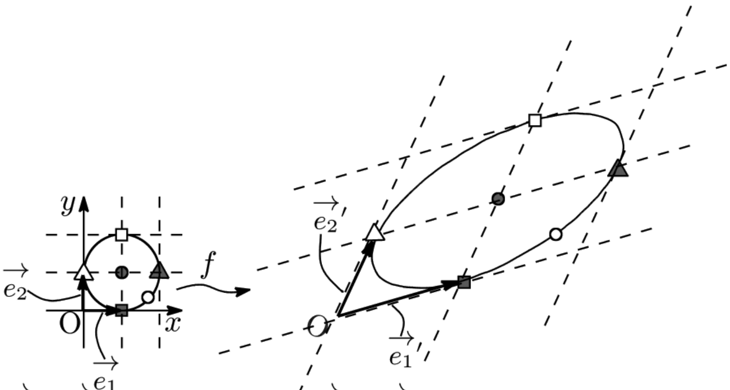
ベクトル $x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ を

ベクトル $x\vec{e_1}' + y\vec{e_2}'$ へ

Aの第１列ベクトル　　　　Aの第２列ベクトル

写す変換であることがわかる.

次の左図中にある円周上の各点 (位置ベクトル) および中心が，1 次変換 f によって右図中のどんな点 (位置ベクトル) へ写されたかを見て欲しい．1 次変換の意味が直感的にわかるだろう.



$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ の作る“網目”　$\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$ の作る網目

〈注 1〉1 次変換を表す行列において

$$\begin{cases} \text{第 1 列ベクトルは } \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の像,} \\ \text{第 2 列ベクトルは } \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の像} \end{cases} \qquad \cdots ✿$$

である.

〈注 2〉☼の変形において，行列の分配法則を用いている．この例からわかるように，1 次変換においては一般に

$$A\left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right) = \alpha A\vec{u} + \beta A\vec{v}$$

(和はバラバラに変換してよくって
実数倍は前に出せる)

が成り立つ．この性質のことを**線型性**という.

C 逆変換・合成変換

(1)　逆変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のとき，$\det A = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5 \neq 0$ より A^{-1} が存在するから

$$A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\text{i.e.} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

すなわち，f の**逆変換** f^{-1} は，A の逆行列 A^{-1} が表す 1 次変換である．(下記参照)

A が表す

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

A^{-1} が表す

(2) 合成変換

2 つの行列 A, B が表す 1 次変換をそれぞれ f, g とし，下図に示すような f と g の**合成変換** $g\circ f$ を考える．

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "f\ (A)"'] \arrow[rr, mapsto, bend left, "(BA)\ g\circ f"] & \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "g\ (B)"'] & \begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\ \text{より}$$

$$\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=B\left\{A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\}=(BA)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

よって，合成変換 $g\circ f$ は，行列 BA で表される 1 次変換である．

〈注〉「$\overset{後}{g}\circ\overset{先}{f}$」において f, g が並ぶ順序と変換を行う順序が逆になるので要注意．

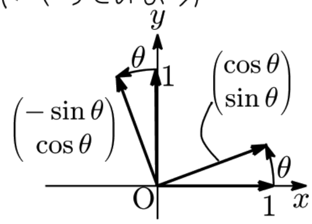
また，f_{θ_1} と f_{θ_2} を合成して得られる変換は，変換の順序に関係なく角 $\theta_1+\theta_2$ の回転移動となる．このことは

$$R(\theta_2)R(\theta_1)=R(\theta_1+\theta_2)$$

逆でもいっしょ

が成り立つことを成分計算によって確かめることによってもできる．(←やってみよう)

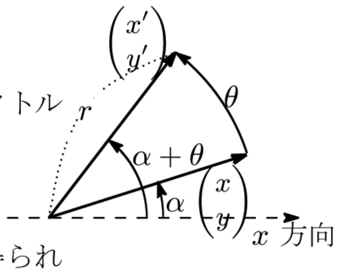
〈注 2〉角 θ の回転移動 f_θ が 1 次変換であることを既知とすれば，2 ベクトル $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ の像を右図のように求め，$\boxed{\text{B}}$❀の考えを用いることにより，f_θ を表す行列が



$$\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

であることがわかる．

$\boxed{\text{D}}$ 回転移動



大きさ r，偏角 α のベクトル

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

を角 θ だけ回転して得られるベクトル $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}&=r\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\theta)\\ \sin(\alpha+\theta)\end{pmatrix}\\ &=r\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta\\ \sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos\theta\cdot r\cos\alpha-\sin\theta\cdot r\sin\alpha\\ \cos\theta\cdot r\sin\alpha+\sin\theta\cdot r\cos\alpha\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

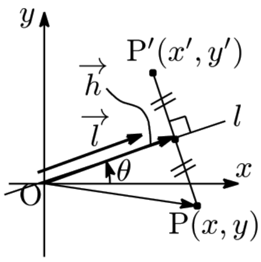
よって，あるベクトルを角 θ だけ回転する変換 f_θ は，行列

$$R(\theta):=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換である．(これは定理として使ってよい)

〈注 1〉f_θ の逆変換は，図形的にわかるように $R(-\theta)$ で表される 1 次変換である．($R(\theta)^{-1}$ を求めてみてもわかる)

$\boxed{\text{E}}$ 対称移動



右図の直線 l に関する対称移動 g_θ によって点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ が写された点を $\mathrm{P}'(x',\,y')$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の l の方向ベクトルの 1 つ $\vec{l}:=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ への正射影ベクトルを $\vec{h}$ とすると

$$\begin{aligned}\vec{h}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{l}}{|\vec{l}|^2}\vec{l}\\ &=(x\cos\theta+y\sin\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

これと $\vec{h}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}}{2}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP'}}&=2\vec{h}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &=2(x\cos\theta+y\sin\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(2\cos^2\theta-1)x+2\sin\theta\cos\theta\cdot y\\ 2\sin\theta\cos\theta\cdot x+(2\sin^2\theta-1)y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

よって g_θ は，行列

$$T(\theta)=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

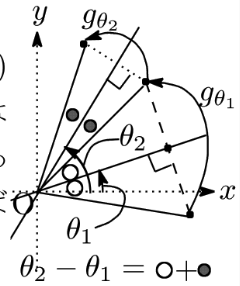
で表される 1 次変換である．

〈注 1〉 g_θ の逆変換は，図形的にわかるように g_θ 自身である．($(T(\theta))^{-1}$ を求めてみてもわかる)

また，g_{θ_1} と g_{θ_2} の合成変換 $g_{\theta_2}\circ g_{\theta_1}$ を表す行列は，$\boxed{\text{C}}$(2) より

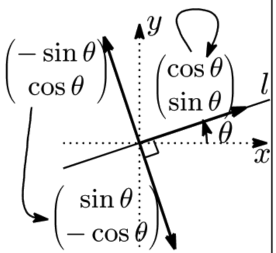
$$
\begin{aligned}
&T(\theta_2)T(\theta_1)\\
&=\begin{pmatrix}\cos 2\theta_2 & \sin 2\theta_2\\ \sin 2\theta_2 & -\cos 2\theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2\theta_1 & \sin 2\theta_1\\ \sin 2\theta_1 & -\cos 2\theta_1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos 2(\theta_2-\theta_1) & -\sin 2(\theta_2-\theta_1)\\ \sin 2(\theta_2-\theta_1) & \cos 2(\theta_2-\theta_1)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(加法定理を用いた)



これは$\boxed{\text{D}}$の行列 $R(2(\theta_2-\theta_1))$ に他ならないから，$g_{\theta_2}\circ g_{\theta_1}$ は角 $2(\theta_2-\theta_1)$ の回転移動である．このことは，右図を見れば納得行くだろう．

〈注 2〉変換 g_θ が 1 次変換であることを既知としてよいなら，g_θ を表す行列 $T(\theta)$ を求めることができる．2 ベクトル $\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ の像を上図のように求めて



$$
\begin{cases}
T(\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},\\
T(\theta)\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}.
\end{cases}
$$

まとまる

これら 2 式をまとめて表すと

$$
T(\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore T(\theta) &= \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta\\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta-\cos^2\theta\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(定理として使ってよいか微妙)

ここで用いた (平行でない)2 ベクトルの像から 1 次変換を表す行列を作る方法は，頻出！

$\boxed{\text{F}}$ 逆行列がないとき

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{1} & \boxed{3}\\ \boxed{2} & \boxed{6}\end{pmatrix}$$ とすると

$$\det A = 1\cdot 6-3\cdot 2=0 \qquad \cdots ❀$$

より A は逆行列をもたない．このような A が表す 1 次変換による，ベクトル $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ の像 $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ を求めてみよう．$\boxed{\text{B}}$で用いた手法を使うとわかりやすい．

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\
&=A\left\{x\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right\}\\
&=x\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\ 6\end{pmatrix}\\
&=x\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+3y\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=(x+3y)\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

❀ i.e. $1:3=2:6$ のとき，A の第 1 列ベクトル $\boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}}$ と第 2 列ベクトル $\boxed{\begin{matrix}3\\6\end{matrix}}$ が平行になるため，$\boxed{\text{B}}$ より任意のベクトルの像がベクトル $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ と平行になってしまうという訳である．

なお，$x+3y=0$ をみたす任意のベクトル

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3t\\ -t\end{pmatrix}\ (t\in\mathbb{R})$$

ベクトルが“潰される”

の像は，全て零ベクトル $\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ となる．

〈注〉 前述した“潰される”ベクトルが存在するのは，逆行列が存在しないときに限ることを示そう．

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{でない}}=\underset{\text{潰される}}{\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}} \qquad \cdots ①$$

のとき，仮に A^{-1} が存在したとすると

$$A^{-1}A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$\therefore \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

(背理法を用いた)

となり仮定に反す．よって A^{-1} は存在しない．

逆に，A^{-1} が存在しない，すなわち

$$\det A = ad-bc=0 \qquad \cdots ②$$

のとき，①をみたす $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ が存在することも示しておこう．

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\ -c\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}ad-bc\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0\\ ad-bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$A\neq O$ のとき，$\begin{pmatrix}d\\ -c\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ の少なくとも一方は零ベクトルではないから，①をみたす $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ が存在し，$A=O$ のときは，たとえば $A\begin{pmatrix}2007\\ 19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ だから O.K.

なんでもいいってこと