2007/4/16 更新

極限

数列の極限

A 収束とは？

数列 (a_n) が定数 α へ**収束**するとは，$n\to\infty$ のとき，

◆ $\underbrace{|a_n-\alpha|}_{a_n\text{と}\alpha\text{の}\textbf{誤差}}$ がいくらでも 0 に近づく

ことをいう．

〈注〉実数変数 x の 関数 $f(x)$ の極限についても同様である．

B 極限の種類

$$\begin{cases}\text{収束} & \\ \text{発散} & \begin{cases}+\infty \\ -\infty \\ \text{振動}\end{cases}\end{cases}$$

収束，$+\infty$，$-\infty$：極限が存在する
振動：極限が存在しない

〈注〉「発散」とは「収束しないこと」．「振動」とは「極限が存在しないこと.」

C 極限の四則演算

数列 (a_n), (b_n) がそれぞれ α, β に収束するとき，次の公式を用いてよい．

$$a_n+b_n\to\alpha+\beta\ ,\quad a_n-b_n\to\alpha-\beta,$$
$$a_n{\cdot}b_n\to\alpha{\cdot}\beta\ ,\quad \frac{a_n}{b_n}\to\frac{\alpha}{\beta}\ (\text{ただし}\beta\neq0).$$

D 不定形

ある関数 (数列) をいくつかの部分に分け，各部の極限を求めてみると，その関数全体の極限はわからないということがある．このようなとき，**不定形**という表現を用いる．

〔例〕(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{3n^2+1}$ $\cdots\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定形

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3^n-2^n)$ $\cdots\infty-\infty$ 型不定形

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n{\cdot}n$ $\cdots0\times\infty$ 型不定形

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\cdots1^\infty$型不定形

〈注〉$\dfrac{\infty}{\infty}$ などは，あくまで便宜的表現であり，正式な数式ではない．したがって，「$\dfrac{\infty}{\infty}$ を約分して 1」などとしてはならない！

〔解答〕

(1) n が大きいとき，分子，分母それぞれにおいて，「n^2」は「他の項」よりずいぶん大きい．そこで，「他の項」の影響力が無くなるよう，分子分母を 「n^2」で割ると

ここが "主要部"

$$\frac{\boxed{n^2}+\boxed{n}}{\boxed{3n^2}+\boxed{1}}=\frac{1+\boxed{\frac{1}{n}}}{3+\boxed{\frac{1}{n^2}}}.$$

ここは "ゴミ"　　ゴミは消えちゃう

ここで $n\to\infty$ のとき，右辺の分子，分母はそれぞれ 1, 3 に収束するから，C により

$$\frac{n^2+n}{3n^2+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{3}.$$

(2) n が大きいとき，分子，分母それぞれにおいて，「3^n」は「2^n」よりずいぶん大きい．そこで，「2^n」の影響力が無くなるよう，「3^n」をくくりだす．

ここが "主要部"

$$3^n-2^n=3^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}.\qquad\cdots☁$$

ここは "ゴミ"　　ゴミは消えちゃう

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty.$$

ここで $n\to\infty$ のとき $\begin{cases}3^n\to\infty,\\ 1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\to1\end{cases}$

だから，☁より $3^n-2^n\to\infty$.

(3) F〈**例 1**〉で．

(4) 「関数の極限」J(2)〈**注 2**〉で．

〈注〉このように，極限を考える際には，式変形をする前に

◆ **どこが主要部か？** (どこがゴミか？)

を見極めることが肝心である．それによって結果が見え，見えているからこそ解法がわかることが多い．

E 不等式の利用

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}{\cdot}\cos\frac{n\pi}{3}$ を求めてみよう．$n\to\infty$ のとき

① $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}{\cdot}n\right)$ は

$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ \ldots$$

と,-1〜1 の範囲で**振動**を続ける．

② $\dfrac{1}{n}$ は 0 に収束する．

①，②より，「たぶん答は 0 に収束だな」とわかるが，極限の状態を便宜的に表すと

$0\times$ (振動) ←これも不定形

という形だから，$\boxed{\mathrm{C}}$の公式は使えない．そこで，① の現象を不等式

$$-1 \leqq \cos\frac{n\pi}{3} \leqq 1 \qquad \cdots ✿$$

によって表す．✿の両辺を $n(>0)$ で割ると

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\cdot\cos\frac{n\pi}{3} \leqq \frac{1}{n}$$

となり，$n\to\infty$ のとき

$$-\frac{1}{n}\to 0,\ \frac{1}{n}\to 0$$

極限値が一致

であるから，いわゆる“はさみうちの手法”により $\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{3}$ も 0 に収束する．

〈注〉$\boxed{\mathrm{D}}$〔例〕(2) の✿式 : $3^n\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$ において，極限の状態の便宜的に表すと

$$\infty\times 1$$

となる．やはり$\boxed{\mathrm{C}}$の公式は使えないので，次のように不等式を用いる．

$n\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}3^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} &\geqq 3^n\left(1-\frac{2}{3}\right)\\ &=\frac{1}{3}\cdot 3^n\to\infty.\end{aligned}$$

← 小さい方でも∞

よって，俗に言う“追い出しの手法”により，3^n-2^n も ∞ に発散する．

厳密な解答は以上の通りであるが，$\boxed{\mathrm{D}}$のごとく直感的に解答してもふつう満点である．ところが$\boxed{\mathrm{E}}$ではその解答が許されない．理由は，「それを認めない採点者が多いから」ということになっている．

$\boxed{\mathrm{F}}$ 発散の速さ比較（数列）

各種関数 (数列) が ∞ に発散する速さに関して，次の結果は知識として記憶しておきたい．

$$\underset{n^\alpha\ (\alpha>0)}{(\text{ベキ関数})} \xleftrightarrow{〈例 1〉} \underset{a^n\ (a>1)}{(\text{指数関数})} \xleftrightarrow{〈例 2〉} \underset{n!}{(\text{階乗関数})}$$

遅い ⟷ 速い

〈例 1〉 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$ を示す．$n\geqq 3$ のとき

n : ∞ (遅)　3^n : ∞ (速)

$$\begin{aligned}3^n &=(1+2)^n\\ &=1+n\cdot 2+{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2^2+\cdots+2^n \quad (\text{2 項定理より})\\ &\geqq{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2^2=2n(n-1)\ (n\geqq 2 \text{ のとき}).\end{aligned}$$

$$\therefore\ 0\leqq\frac{n}{3^n}\leqq\frac{n}{2n(n-1)}=\frac{1}{2(n-1)}\to 0.$$

よってはさみうちの手法により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0.$

〈注〉$\boxed{\mathrm{D}}$(3) では $0\times\infty$ 型だったものが，ここでは $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型．こんなこともよくある．

〈例 2〉 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0$ を示す．$n\geqq 3$ のとき

3^n : ∞ (遅)　$n!$: ∞ (速)

$$\begin{aligned}(0\leqq)\frac{3^n}{n!} &=\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\underbrace{\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{n-1}}_{1 \text{ 以下}}\cdot\frac{3}{n}\\ &\leqq\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{n}\to 0.\end{aligned}$$

よってはさみうちの手法により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0.$

$\boxed{\mathrm{G}}$ 無限級数

無限級数

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots\cdots\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\end{aligned}$$

← いずれも略記法

が**収束**するとは，その**部分和** $S_n:=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ が作る数列 S_1, S_2, ..., S_n, ... が収束することを言う．つまり，大雑把に書くと

◆分離して考える！

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\lim_{n\to\infty}}_{2^\circ\ \text{その極限}} \underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_k}_{1^\circ\ \text{有限個の和}}.$$

〔「S_n」と「a_n」の関係〕

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ のとき ← S_nは a_nの和

$a_n=S_n-S_{n-1}$. ← a_nは S_nのほぼ階差

よって，S_n が α に収束するとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}\to\alpha-\alpha=0.$$

すなわち

S_nが収束 $\Rightarrow a_n\to 0.$

この命題の対偶は

a_nが 0 以外に収束または発散 $\to S_n$は発散.

●○ 関数の極限 ●○●○●○●○●○●○●○●○●○●○●○●○●○●○●○

H $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ とは？

たとえば関数の極限

$$\lim_{x\to 2}\underbrace{\frac{x^2-4}{x-2}}_{f(x)\text{ とおく}}$$

つまり，$x=2$ のときのことなどどーでもよい．

を考えるときには，x を ◆**$\underline{2}$ と異なる値をとりながら**限りなく 2 に近づけるときの関数 $f(x)$ の振る舞いを調べる．

$x\neq 2$ のもとでは

$$f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$$

だから

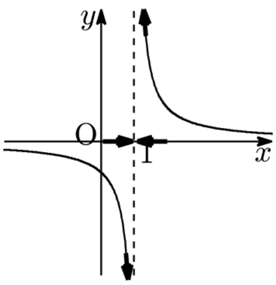
$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

↑下の〈注〉を参照

〈注〉 $x=2$ とするのではないし，
$f(x)=4$ となる訳でもない．

等式「$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$」の意味は以下の通り．
$x\to 2$ のとき，「$f(x)$ が目指して進んでいく**目的値**」が 4 に等しい．

I 左右極限



$\dfrac{1}{x-1}$ は，x を **1 より大きな値をとりながら**限りなく 0 に近づけるときいくらでも大きくなる．このことを

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\infty,$$

x が 1 に近づくときの**右側極限**は ∞ である

と表す．同様に

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty,$$

x が 1 に近づくときの**左側極限**は $-\infty$ である

という．

この例では，左・右の極限が異なるので，極限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$ は存在しない．

〈注〉左・右に分けて考える必要を感じなければ，べつに分けなくてよい．

J 関数の極限公式

(1) 三角関数

① $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1.$ $\dfrac{0}{0}$型不定形

①′ $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}=1.$ $\dfrac{0}{0}$型不定形

② $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\dfrac{1}{2}.$ $\dfrac{0}{0}$型不定形

〈注 1〉① は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\sin\theta<\theta<\tan\theta$

が成り立つことからはさみうちの手法によって導く (教科書参照)．これをもとにして

$$\frac{\tan\theta}{\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\to 1\cdot 1=1,$$

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}&=\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\\&=\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\\&\to 1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

①’，②は①に帰着させて導く．

〈注 2〉①が意味するところは，x が 0 に近づくとき，$\sin x$ も x と同じ速さで 0 に近づくということ．つまり大雑把な感覚としては，x が 0 に近いとき，sin x は x と同じようなもんだってこってす．その“感覚”に立脚した試験答案は認められないけど，こういう感覚ってすごく大事！(他の公式も同様な感覚で捉えられるようにしよう．)

(2) 指数関数

ⓐ $e=\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}.$ $1^{\pm\infty}$型不定形

↑これが自然対数の底 e の定義

ⓑ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$ 1^{∞}型不定形

ⓒ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log(1+h)}{h}=1.$ $\dfrac{0}{0}$型不定形

ⓓ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1.$ $\dfrac{0}{0}$型不定形

〈注 1〉ⓑ ← ⓐ → ⓒ → ⓓ の流れで導かれる．

〈注 2〉ⓑの $x(\in\mathbb{R})$ を $n(\in\mathbb{N})$ に変えた等式

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad 1^{\infty}\text{型不定形}$$

によって自然対数の底 e を定義する立場もある．

$\boxed{\text{K}}$ 極限を求める手順

1° ♦まず関数・数列の変化そのものを調べる.

2° 1° の結果，不定形ならば，それに応じて

$$\left\{\begin{array}{l}\text{変形 (等式利用),}\\ \text{評価 (不等式利用),}\\ \text{極限公式の適用}\end{array}\right.$$

を講じる.

〈参考〉一瞬不定形のように見えても，じつは不定形ではないものもある．たとえば

$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{\log x}\quad\cdots\frac{0}{-\infty}(\text{不定形ではない !})$$
$$=0$$

である.

$\boxed{\text{L}}$ 発散の速さ比較 (関数)

$x\to\infty$ のときに各種関数が ∞ に発散する速さに関して，次の結果は知識として記憶しておきたい.

$$\begin{array}{ccccc}(\text{対数関数}) & \xleftrightarrow{\langle\text{例 }2\rangle} & (\text{ベキ関数}) & \xleftrightarrow{\langle\text{例 }1\rangle} & (\text{指数関数})\\ \log x & & x^{\alpha} & & e^{x}\end{array}$$

$$\longleftrightarrow$$

遅い　　　　　　　　　　　　速い

〈例 1〉 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\infty\,(\text{遅})}{x}}{\underset{\infty\,(\text{速})}{e^{x}}}=0$ を示す.

不等式 $e^{x}>\dfrac{x^{2}}{2}$ $(x>0)$ を微分法によって示せば，$x\to\infty$ のとき

$$0\leqq\frac{x}{e^{x}}<\frac{x}{\frac{x^{2}}{2}}=\frac{2}{x}\to0.$$

あとははさみうち.

〈例 2〉 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\infty\,(\text{遅})}{\log x}}{\underset{\infty\,(\text{速})}{x}}=0$ を示す.

不等式 $\log x<\sqrt{x}$ を微分法によって示せば，$x\to\infty$ のとき，$(x>1$ のもとで考えてよく$)$

$$0\leqq\frac{\log x}{x}<\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\to0.$$

あとははさみうち.

$\boxed{\text{M}}$ 関数の連続とは？

関数 $f(x)$ が $x=a$ において**連続**であるとは，値 $f(a)$ が存在し，極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ が収束した上で，

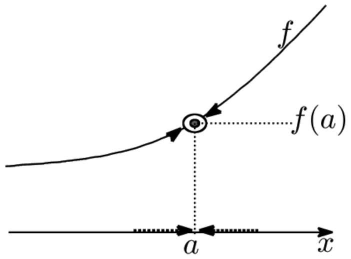
つまり左・右の極限値が一致

しかも

$$\underbrace{\lim_{x\to a}f(x)}_{x\to a\text{ の}\atop\text{ときの目的値}}=\underbrace{f(a)}_{\text{ちょうど }x=a\text{ の}\atop\text{ときの }f(x)\text{ の値}}$$

が成り立つことをいう.

〈注 1〉「連続」の視覚的イメージは,「グラフがつながっている」ということである.



〈注 2〉高校数学でに扱う基本関数：ベキ関数，三角関数，指数・対数関数や，それらの和・差・積・商および合成関数は，その定義域内で連続であるといてよい.

$\boxed{\text{H}}$においては，$f(x)$ は $x=2$ において連続ではないが，$g(x):=x+2$ は連続関数だから

$$\underbrace{\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}g(x)}_{x=2\text{ とはしない}}=\underbrace{g(2)}_{x=2\text{ とする}}=4$$

と求まったわけである.