2006/5/26 更新

集合・論理

A 条件・命題

x についての**条件** ←文字を含んだ主張

$$p:(x^2-4)(x^2+1)=0$$

は

真 or 偽が明確に定まる主張

$$\begin{cases} x=2 \text{ のとき真 } (T) \text{ の命題}, \\ x=3 \text{ のとき偽 } (F) \text{ の命題} \end{cases}$$

である．

〈注〉 **固定された 1 つ 1 つの x に対し**，その都度得られた命題の真偽を判定していく．これが「論理」の，延いては「数学」の考え方の基盤である．
← たとえば「曲線の通過範囲」なんてその典型なんだよなあ…

考察の対象とするもの全体の集合

全体集合 U を $\mathbb{R}$(実数全体) とするとき，条件 p の**真理集合**は

p が真の命題となるような要素 x の集合

$$P=\{2,\ -2\}.$$

〈注 1〉 以上の事柄を，普段はこう言い表している．

「x の方程式 p の実数解は 2, −2 である.」
条件 真理集合

〈注 2〉 $U=\mathbb{C}$(複素数全体) のときは

$$P=\{2,\ -2,\ i,\ -i\}.$$ ← U が変わると真理集合も変わる．

B 「ならば」を含んだ命題

ここでは $U=\mathbb{R}$ とする．

(1) $\left[\ \underbrace{p:x>1}_{\text{仮定}} \overset{\text{ならば}}{\Longrightarrow} \underbrace{q:x^2>1}_{\text{結論}}\ \right]$ $\cdots$①

が真の命題であることは，次に示す☁，☀の 2 通りの方法でわかる．

☁：「因果関係」

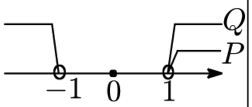
1 より大きな x を考えると，それを 2 乗すると必ず 1 より大きくなる．つまり

$\underbrace{p \text{ が成り立つ}}_{\text{原因}}$とき，必ず$\underbrace{q \text{ も成り立つ}}_{\text{結果}}$.

よって命題①は真である．

☀：「真理集合の**包含関係**」

x の条件 p, q の真理集合をそれぞれ P, Q とすると，右の図のようになる．よって



$$P \subset Q.$$ ← P は Q の**部分集合**

つまり，p を成り立たせるような x は，必ず q をも成り立たせる．よって命題①は「真」である．

(2) ①の**逆**：

$[\ p:x>1 \Longleftarrow q:x^2>1\ ]$ $\cdots$②(命題)

の真偽を考えてみよう．

☁によって考えるのは困難である．理由は次図に示すとおり．

$$p:x>1 \ \underset{\text{考えにくい}}{\overset{\text{考えやすい}}{\rightleftarrows}}\ q:x^2>1$$

"部品" "製品"

一方，☀ならカンタンである．

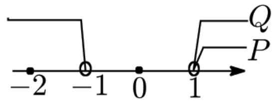
(1) の図からわかるように

$Q \not\subset P$. ← Q は P の部分集合ではない

つまり，q を成り立たせるような x が，必ずしも p を成り立たせるとは限らない．よって命題②は「偽」である．

〈注 1〉 このように，「ならば」を含んだ命題の真偽判定は，☁でなく，**☀によって行うのが本手**（ほんて）である．

〈注 2〉 を示すためには，次のようにしてもよい．右図からわかるように



属する 属さない

$x \in Q$ であるが $x \notin P$

(q はなりたつけど) (p は成り立たない)

である x，すなわち命題②の**反例**として，たとえば「−2」が見つかる．よって が示されたので，②は偽．

この手法は，本問とちがって真理集合が図示できない場合にも有効である．

(3) ②の**対偶**：

条件 p の**否定**

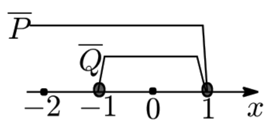
$[\ \overline{p}:x \leqq 1 \Longrightarrow \overline{q}:x^2 \leqq 1\ ]$ $\cdots$③

部品 $\xrightarrow[\text{考えやすい}]{}$ 製品

は，☁からも偽であることがわかる．

(え〜と x ≦ 1 だとしても x を−1 より小さく，たとえば x=−2 とかにすると x^2 は 1 より大きくなっちゃうから偽だよな．)

もちろん，☀からもわかる．右図より



$$\overline{P} \not\subset \overline{Q}.$$

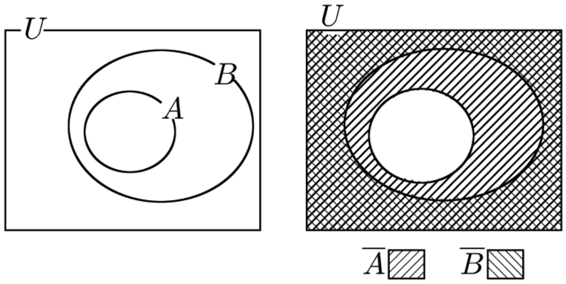
条件 $\overline{p}$ の真理集合は，P の**補集合**(U のうち P 以外の部分)

よって③は偽．

〈注 1〉対偶どうしの真偽は必ず一致する．これは，一般に 2 つの集合 A, B について

$$A \subset B \quad と \quad \overline{A} \supset \overline{B}$$

が同じことを表しているので当然である．



〈注 2〉②のようなわかりにくい向きの命題

$$r(\text{製品}) \Longrightarrow s(\text{部品})$$

の真偽を判定するとき，次に示す☆，★の 2 つの手段が有効である．

☆ 対偶を考える．
(②の代わりに③を考える)

★ たとえば，命題

$$\left\{\begin{array}{l} a+b \text{ が偶数} \\ a-b \text{ が偶数} \end{array}\right. \Longrightarrow a,\ b \text{ は整数} \quad \cdots ④$$

の真偽を考える際

$$u = a+b,\ v = a-b$$

とおいて a, b について逆に解けば

$$a = \frac{u+v}{2},\ b = \frac{u-v}{2}$$

となり，命題④が考えやすい向きに変わっている！答は「真」．

C 必要条件・十分条件

x の方程式　条件

$$\underbrace{x^3+9x^2+26x+24}_{f(x)\text{ とおく}} = 0 \qquad \cdots p$$

の解を，実数の範囲で求めてみよう．
↑真理集合　↑全体集合

方程式 p の係数はすべて正なので，$x \geqq 0$ だと p は成り立たちっこない．だから

$$x < 0 \qquad \cdots q$$

を満たす x だけを考えればよい．

このように，大目標である条件 p の真理集合 P を求める際，明らかにそこに含まれない要素をあらかじめ除外し，考察の対象をせばめて条件 q を前提に議論する手法を「必要条件で絞る」なんて言ったりする．きちんと述べれば

「p に対して，q は**必要条件**である」 $\left\{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ P \subset Q \end{array}\right.$
↑大目標！　↑手段

という．

さて，そうとわかったら x に 24 の負の約数 $-1,\ -2,\ -3,\ \ldots$ を順に代入してみると，

$$f(-1) = -1+9-26+24 \neq 0,$$
$$f(-2) = -8+36-52+24 = 0.$$

より，p の 1 つの解 -2 が見つかった．つまり

$$x = -2 \qquad \cdots r$$

のとき，確かに p は真の命題となっている．

もちろん，p には他にも実数解があるかもしれないので，これでカンペキという訳ではないが，1 つの解が見つかったおかげで，組み立て除法などを用いて方程式 p の左辺を因数分解することができる．

このように，大目標である条件 p の真理集合 P を求める際，確実にそこに含まれる要素をいくつか見つけ，それを突破口として真理集合の残りの要素も求めていく手法を「十分条件で攻める」なんて言ったりする．きちんと述べれば

「p に対して，r は**十分条件**である」 $\left\{\begin{array}{l} p \Leftarrow r \\ P \supset R \end{array}\right.$
↑大目標！　↑これまた手段

という．

けっきょく方程式 p は

$$(x+2)(x+3)(x+4) = 0$$

と変形でき，すべての実数解

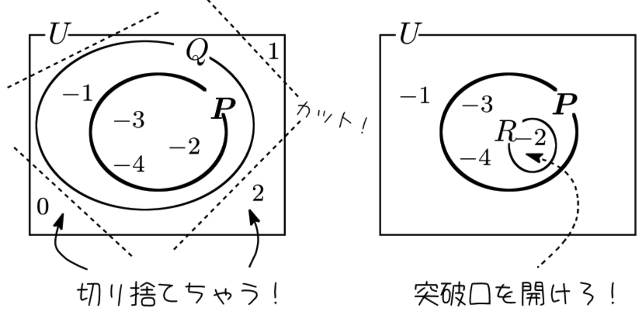
$$x = -2,\ -3,\ -4$$

←条件 p の必要十分条件

が求まった．　…めでたしめでたし…

〈注 1〉各条件の真理集合は次のようになっている．

〔必要条件で絞る〕　〔十分条件で攻める〕



〈注 2〉このように，**「論理」は現実的な問題解決に役立つ．**センター試験で出る「p は q の $\boxed{?}$ 条件である」という類の問題とは切り離して扱おう．あれをやると「必要」「十分」という言葉の意味はわからなくなる．直前期以外はやっちゃダメ！(「勝てるセンター」では，センターで出るからしょうがなくやっている)