2007/5/21 更新

積分法（数学Ⅲ）

A 原始関数

x で微分したら $f(x)$ になる元の関数，すなわち

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x) \qquad \cdots(*)$$

となる関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の**原始関数**(不定積分) という．このとき，$F(x)+C$(C は任意定数で，積分定数という) も $f(x)$ の原始関数である．

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

x で微分する

〈注〉原始関数が (積分定数の違いを除けば) 一意的であることは，平均値の定理を用いて証明される．教科書で一度は確認しておこう．

B 定積分

上記 $(*)$ のとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

を，$f(x)$ の a から b までの**定積分**という．

C 積分の計算

(1) 基本関数

べき関数 $\cdots$ $x^{\alpha}(\alpha\neq -1)$, $\dfrac{1}{x}$

三角関数 $\cdots$ $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$

指数・対数関数 $\cdots$ e^x，$\log x$

の原始関数は暗記しておく．

〈注〉$\tan x$ は (5)，$\log x$ は (4) から求まる．

(2) 1 次式 $ax+b$ は“カタマリ”とみる．

(例) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log|2x+1|+C$

(3) 積→和

(例) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

(4) 部分積分法

微分する

$$\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx$$

積分する

(5) 置換積分法　$t=g(x)$ 型

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

$t=g(x)$ とおくと，

$dt=g'(x)dx \leftarrow \dfrac{dt}{dx}=g'(x)$ の分母が払える

(例) $\displaystyle\int (\boxed{\sin x})^2\cos x\,dx$ では，$t=\sin x$ とおく．

微分する

(6) 置換積分法　$x=g(t)$ 型

$$\int f(x)\,dx = \int f\left(g(t)\right)g'(t)\,dt$$

(使用例)

$\sqrt{a^2-x^2} \to x=a\sin\theta \ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

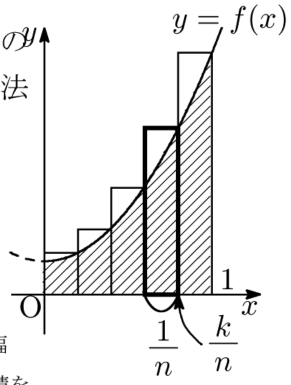
$\dfrac{1}{a^2+x^2} \to x=a\tan\theta \ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

$\sqrt{ax+b} \to t=\sqrt{ax+b}$, i.e.

$x=\dfrac{1}{a}\left(t^2-b\right)$ とおく．

$e^x \to t=e^x$, i.e. $x=\log t$ とおく．

D 区分求積法



$F'(x)=f(x)$ とする．上図の斜線部の面積 S を 2 通りの方法で表すことにより

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

縦の長さ×微小な横幅

0 から 1 まで細かく集める ＝ 微小長方形の面積を

〈注 1〉上記は $f(x)$ が負の値をとるときも成り立つ．つまり，定積分とは

微小長方形の符号付面積を

きめ細やかに集めたもの

である．

〈注 2〉斜線部の面積が定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ と一致することの証明は，数学Ⅱの教科書を参照．

E 定積分の意味

(1) 具体的 (図形的) な意味

「面積，体積などを細かく集めたもの.」

$$\text{面積} = \int_{\bigcirc}^{\triangle} \text{長さ}\cdot d(\text{幅})$$

$$\text{体積} = \int_{\bigcirc}^{\triangle} \text{断面積}\cdot d(\text{厚み})$$

$$\text{道のり} = \int_{\bigcirc}^{\triangle} \text{速さ}\cdot d(\text{時間})$$

(「微小量」を考えること以外は，すべて小学校で既習である．詳しくは後述する．)

(2) 抽象的な意味

「積分変数には依存しない値.」

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\quad ,\\ \displaystyle\int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3},\end{array}\right\}\text{定数}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1 ax^2\,dx=\left[a\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{a}{3},\\ \displaystyle\int_0^a x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^3}{3}.\end{array}\right\}a\text{ の関数}$$

F 定積分と微分法

㋐上端は「x」

$$(*):\ G(x)=\int_a^x \underbrace{f(t)}_{}dt \qquad \leftarrow x\text{ の関数}$$

㋑下端は定数　　㋒ x を含まない

のとき,

$G'(x)=f(x)$.

(証明)　$F'(t)=f(t)$ なる $F(t)$ をとると,

$$G(x)=\Big[F(t)\Big]_a^x=F(x)-F(a).$$

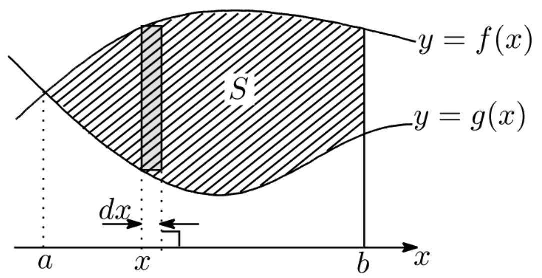
$$\begin{aligned}\therefore\ G'(x)&=\frac{d}{dx}G(x)\\&=F'(x)-0\ \ (\because F(a)\text{ は定数})\\&=f(x).\square\end{aligned}$$

〈注 1〉 ㋐, ㋑, ㋒ の 3 つの注意を忘れずに.

〈注 2〉 $G(a)=\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt=0$.

〈注 3〉 結果より, 証明過程の方が重要 !!

G 面積



上図において, 面積 S は次のように表される.

x の範囲

$$S=\underbrace{\int_{a(小)}^{b(大)}}_{\substack{a\text{ から }b\text{ まで}\\ \text{細かく集める}}}\underbrace{\{f(x)-g(x)\}\,dx}_{\text{縦の長さ}\times\text{微小な横幅}=\square\text{の面積}}.$$

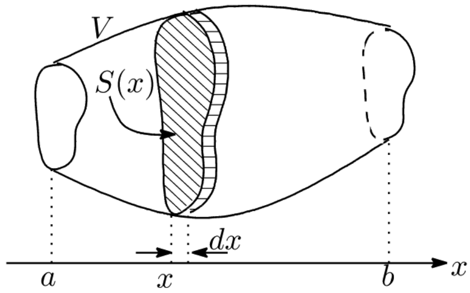
〈3 つの準備〉

1°　積分変数を決める.

$$2^\circ\left\{\begin{array}{l}\text{2 曲線の上下関係を調べる.}\\ \text{2 曲線の共有点を調べる.}\end{array}\right.$$

（2° においては, $\underbrace{f(x)-g(x)}_{\text{差をとる}}$ を考察するとよいことが多い.）

H 体積



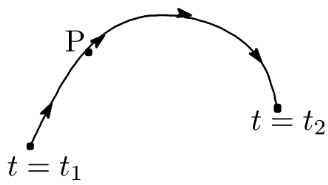
上図において, 体積 V は次のように表される.

x の範囲

$$V=\underbrace{\int_{a(小)}^{b(大)}}_{\substack{a\text{ から }b\text{ まで}\\ \text{細かく集める}}}\underbrace{S(x)\ dx}_{\text{断面積}\times\text{微小な厚み}=\text{の体積}}.$$

〈注〉 断面積」と「厚み」は, 垂直でなくてはならない.

I 道のり



時刻 t における点 P の座標を $(\underset{\uparrow t\text{ の関数}}{x,\ y})$ とする.

時刻 t における点 P の**速度ベクトル** $\vec{v}$ は

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}dx/dt\\ dy/dt\end{pmatrix}.$$

P の**速さ**は

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

時刻 $t=t_1$ から $t=t_2$ にかけて点 P が動く**道のり** L は

$$L=\underbrace{\int_{t_1(小)}^{t_2(大)}}_{\substack{t_1\text{ から }t_2\text{ まで}\\ \text{細かく集める}}}\underbrace{|\vec{v}|\,dt}_{\text{速さ}\times\text{微小時間}=\text{微小な道のり}}.$$

〈注〉 道のり L は, $t_1\leqq t\leqq t_2$ において点 P が描く曲線の長さ (**弧長**) と一致する.

↑たいていの場合は