不等式

2010/5/20 更新

A 不等号とは？

2 つの実数 a, b の間の大小関係には

$a > b,\ a = b,\ a < b$

の 3 通りがあり，このうち 1 つだけが成り立つ．

◆ 不等号とは，2 つの実数 a, b の間の大小関係を表す記号である．　←3つの下線部が全て重要

ただし，特定の文脈の中では，不等式は「範囲」を表すこともある．(→G)

〈参考〉$a \geqq b$ とは，$a > b$ **または** $a = b$ が成り立つことを意味する．$a \leqq$ も同様である．
なお，当ページではこれらを「$\geq$，$\leq$」と記す．　↑世界標準
(例)：$2 > 1,\ 2 \geqq 1$ は，いずれも正しい大小関係を表している．

〈注意〉虚数については大小関係を考えない．本章「不等式」では，特に断らなくても**文字は実数とする**．

B 基本性質 1（同値性のあるもの）

不等式「$a > b$」が成り立つならば，次の①〜③が導かれる．

①：$a + k > b + k$　・・・同じ実数を加える

②：$ak > bk$ ($k > 0$ のとき)　・・・同じ正数を掛ける

③：$ak < bk$ ($k < 0$ のとき)　・・・同じ負数を掛ける
↑注意

〈注目〉①〜③を a, b に関する条件だとみなしたとき，これらはすべて条件「$a > b$」と同値である．つまり，①〜③の各々から「$a > b$」を逆に導くこともできる．(ただし，②，③では k が定符号とする．)

(例)　↓普段はこんなあたりまえな同値変形にに「$\Longleftrightarrow$」なんて書かないよもちろん

$$\frac{x}{2} - 3 > 1 \Longleftrightarrow \frac{x}{2} > 4 \quad (\because ①：両辺に 3 を加える)$$
$$\Longleftrightarrow x > 8. \quad (\because ①：両辺に 8 を掛ける)$$

C 上記以外の同値変形

実数 a, b に関する条件「$a > b$」は，次のように同値変形される．

④：$a^2 > b^2$ ($a, b \geq 0$ のとき)　0 以上の数を 2 乗

④′：$a^3 > b^3$　両辺を奇数乗（負でもＯＫ）

⑤：$\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$ ($a, b > 0$ のとき)　正数の逆数をとる
↑注意

この他に，次の同値変形もよく用いる．

⑥：$ab > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \end{cases}$ or $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0 \end{cases}$.　積が正 ⇔ 同符号

E参照

⑥′：$ab < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ b < 0 \end{cases}$ or $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0 \end{cases}$.　積が負 ⇔ 異符号

⑦：$a^2 > b^2 \Longleftrightarrow |a| > |b|$.　→〈参考〉

⑧：$a > b > c \Longleftrightarrow a > b$ かつ $b > c$　2 つに分解して

〈注意 1〉④，⑤は，a, b の中に負数が含まれるときは使えない．たとえば $a = 2, b = -3$ のときを考えると，$a > b$ であるが

$2^2 < (-3)^2$, i.e. $a^2 < b^2$,

$\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{-3}$, i.e. $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

となり，④，⑤は成り立たない．

〈注意 2〉高校数学において，不等号の向きが変わる典型的状況として，次の 3 つがある．

③：両辺に負の数を掛ける

いずれも F参照

⑤：正数の逆数をとる

指数，対数の底が 1 未満のとき
何のこと言ってるかわかるね？

〈参考〉⑦を示す．一般に，実数 x について $x^2 = |x|^2$ であり，$|x| \geq 0$．よって④より a, b の符号によらず

$a^2 > b^2 \Longleftrightarrow |a| > |b|$.

D 基本性質 2（同値性のないもの）

⑨：$a > b$ かつ $b > c \Longrightarrow a > c$.　・・・三段論法

⑩：$a > b$ かつ $c > d \Longrightarrow a + c > b + d$.

⑪：a, b, c, d が正のとき，
$a > b$ かつ $c > d \Longrightarrow ac > bd$.

〈注意 1〉⑨〜⑪は，いずれも**逆**は成り立たない．

〈注意 2〉⑪は，あくまで a〜d が正のときに限る．たとえば

$3 > 1,\ -1 > -2$

であるが，辺々を掛けると

$3 \cdot (-1) < 1 \cdot (-2)$

となってしまう．

〈注意 3〉↓こんな性質はない．

$a > b$ かつ $c > d \Longrightarrow a - c > b - d$.

$a > b (> 0)$ かつ $c > d (> 0) \Longrightarrow \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d}$

$\boxed{\mathrm{E}}$ 不等式の基本形

不等式は

$$(\quad)(\quad)>0,\ (\quad)^2\geq 0,\ \frac{(\quad)}{(\quad)}\leq 0$$

に代表されるような

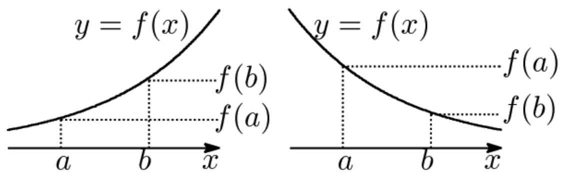
◆**積 (または商) vs ゼロ**

の形にすれば，個々の因数の**符号**によって左辺全体の**符号**がわかるので考えやすい．

〈注目〉この$\boxed{\mathrm{E}}$: 式変形と次の$\boxed{\mathrm{F}}$: 関数利用が，不等式の攻め方の双璧である．これ以降，この 2 つの考え方が，しばしば併記される．

$\boxed{\mathrm{F}}$ 関数の利用

(1) 増減



関数 $f(x)$ が単調に増加するとき

$$a>b \iff f(a)>f(b).$$

関数 $f(x)$ が単調に減少するとき

$$a>b \iff f(a)<f(b).$$

(逆向き ($\Longleftarrow$) の証明には，逆関数 $f^{-1}(x)$ の単調性を用いる．)

たとえば$\boxed{\mathrm{C}}$④〜⑤は，それぞれ次の関数 $f(x)$ から得られる．

④ : $f(x)=x^2\ (x\geq 0)$ $\cdots$単調に増加

④$'$: $f(x)=x^3$ $\cdots$単調に増加

⑤ : $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ $\cdots$単調に減少

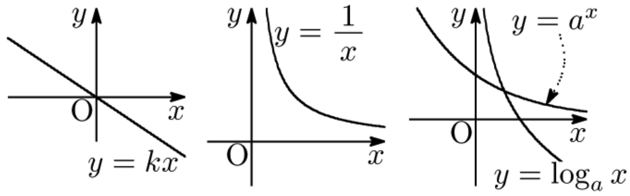
$\boxed{\mathrm{C}}$ **〈注意 2〉**の 3 つは，それぞれ

$f(x)=kx$ (k は負の定数)

$f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$

$f(x)=a^x,\ \log_a x\ (0<a<1)$

が単調に減少することからわかる．



〈参考〉$f(x)=x^\alpha\ (x>0)$ の増減から

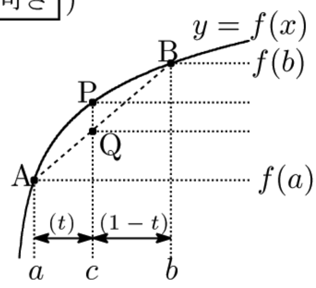
$$a>b \iff \begin{cases} a^\alpha>b^\alpha\ (\alpha>0), \\ a^\alpha<b^\alpha\ (\alpha<0). \end{cases}$$

よって，$a,\ b>0$ のとき不等式「 $a>b$ 」は，④〜⑤と同様に次のようにも同値変形できる．

$$a^4>b^4,\ \sqrt{a}>\sqrt{b},\ \cdots,$$
$$\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2},\ \frac{1}{\sqrt{a}}<\frac{1}{\sqrt{b}}\cdots.$$

(2) 凹凸 (凸不等式 : $\boxed{\text{理系向き}}$)

曲線 $C: y=f(x)$ が上に凸であるとし，$a<b$ とする．$0<t<1$ として右図のように x 座標 c をとり，直線 $x=c$ と曲線 C，弦 AB との交点をそれぞれ P，Q とすると



$$c=(1-t)a+tb.$$
$$\therefore\ y_{\mathrm{P}}=f((1-t)a+tb).$$

Q は弦 AB を $t:(1-t)$ の比に内分するから

$$y_{\mathrm{Q}}=(1-t)f(a)+tf(b).$$

C が上に凸であることより $y_{\mathrm{P}}>y_{\mathrm{Q}}$ だから

$$f((1-t)a+tb)>(1-t)f(a)+tf(b).\ \cdots(*)$$

〈例〉$f(x)=\log x\ (x>0)$ のとき $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ が減少関数だから曲線 $y=f(x)$ は上に凸．したがって $0<a<b$ のとき，$(*)$ において $t=\dfrac{1}{2}$ とすれば

$$\log\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{\log a+\log b}{2}.$$
$$\text{i.e. } \log\left(\frac{a+b}{2}\right)>\log\sqrt{ab}.$$

ここでは f(x) が単調増加であることを用いた

底 : $e>1$ だから

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

$a<b,\ a=b$ のときについても言及すれば，2 つの正数 $a,\ b$ についての「相加平均と相乗平均の大小関係」(→$\boxed{\mathrm{J}}$(1)) の証明が完成する．

G 2つの意味

〈例1〉

〔問〕「実数 x についての3次不等式

$$x^3-5x^2+11x-7>0 \qquad \cdots ①$$

を解け.」

〔先生の解答〕 左辺を因数分解して

$$(x-1)(\underbrace{x^2-4x+7}_{f(x)\text{ とおく}})>0. \qquad \cdots ②$$

x は実数だから $f(x)=(x-2)^2+3>0$. よって両辺を $f(x)$ で割ると

$$x-1>0. \ \therefore\ \boldsymbol{x>1}.$$

〔生徒の質問〕「先生. $f(x)>0$ じゃなくて, $f(x)\geq 3$ が正しいですよね？」

〔先生〕 苦虫苦虫 …

〔解説〕 この例において「先生」は, ②の両辺を $f(x)$ で割って簡単な1次不等式に帰着させようとしている. そこで, 割ったときに不等号の向きが変わらないことの理由として,「$f(x)>0$」という「大小関係」に言及した.

一方, 最終結果 :「$x>1$」は, もちろんこの不等式の解 x の「値の範囲」を表している.

このように, 数学では不等号を2種類の意味で使い分けており, どちらの意味であるかは, 叙述の流れを理解している者どうしの間では “阿吽の呼吸” でわかりあえる.

ところがこの「生徒」は,「先生」が何を目的として「$f(x)>0$」を述べたかを解答全体の文脈の中で理解しようとせず, $\boxed{f(x)=(x-2)^2+3}$ という枠の中だけを見て,「$f(x)\geq 3$」という役にも立たない「値の範囲」を述べたくなってしまったという訳である. もっとも, 生徒本人には「値の範囲」を述べているという明確な意識があるわけではなく, ただなんとな〜く自分にとってすぐわかることを目一杯言ってみたくなっただけなのだけど …

ここで挙げた例からもわかるように,「不等式」には, それを書いた人間の数学に対する理解度・センスが如実に現れる.

なお,「値の範囲」を厳密に表すには, 本来は集合の記法を用いる. たとえば不等式①の解とは, 正確に言うと「$x>1$ を満たす実数 x 全体の集合」であるから, $\{x|x>1\}$ と書くのが本式である. けれど少々くどいので, 普段は「$x>1$」とだけ書くのが習慣化している. したがって, 字面だけを見ても「大小関係」,「値の範囲」のいずれであるかは判別できない. **大切なのは文脈を理解すること.** これに尽きる.

〈例2〉

$$\begin{cases} -1<x+y<1, & \cdots ① \\ -1<x-y<1 & \cdots ② \end{cases}$$

を満たす2つの実数 x, y がある. ①と②を辺々加えると

$$-2<2x<2.$$

また, ②の両辺を -1 倍して

$$1>-x+y>-1.$$
$$\text{i.e. } -1<-x+y<1. \qquad \cdots ②'$$

①と②'を辺々加えると

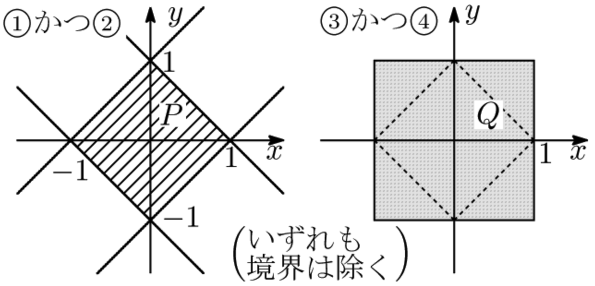
$$-2<2y<2.$$

よって

$$\begin{cases} -1<x<1, & \cdots ③ \\ -1<y<1. & \cdots ④ \end{cases}$$

「①かつ②」から「③かつ④」を導く過程で, D⑦を正しく適用しているから,「③かつ④」は正しい. より詳しく言うと,「大小関係としては」正しい. しかし …

条件 p :「①かつ②」, 条件 q :「③かつ④」を満たす点 $(x,\,y)$ の集合をそれぞれ P, Q とする. これらを領域として図示すると, それぞれ下図の左, 右のようになり, P と Q は一致しない. そもそも D⑦は同値変形ではなく, “一方通行” の性質であるため, 条件を満たす $(x,\,y)$ の集合 (「真理集合」という) は変化してしまう. つまり, p から q を導くとき, これらを満たす点 $(x,\,y)$ の存在範囲は保存されないのである.



上で述べたことを論理の記号, 用語を用いて明確に表すと次のようになる.

$$p \Longrightarrow q,\ p \not\Longleftarrow q.$$

i.e. $P \subset Q,\ P \not\supset Q.$

i.e.「p であるために, q は
必要であるが，十分ではない.」

不等式を「範囲」の意味で用いるなら，**同値**変形して真理集合を保存するのが基本である．たとえばある問題が「①かつ②」が表す範囲の $(x,\,y)$ に関して問われているのに,「③かつ④」が表す範囲の $(x,\,y)$ に変えて解答すれば，当然誤りとなる．くれぐれも注意されたし.

〈例 3〉

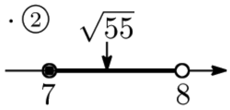
「ガウス記号」という

〔問〕「$\left[\sqrt{55}\right]$ の値を求めよ．ただし，実数 x に対して，x を超えない最大整数を $[\sqrt{x}]$ で表すとする.」

〔解〕

$(49=)7^2 \leqq 55 < 8^2(=64). \cdots ①$

$\therefore 7 \leqq \sqrt{55} < 8. \qquad \cdots ②$



したがって，$\left[\sqrt{55}\right] = \mathbf{7}.$

〔解説〕「$7^2 \leqq 55$」や「$7 \leqq \sqrt{55}$」の不等号が「$<$」でないことを疑問に思う人が多い．「等号成り立たないのに，どうして“$\leqq$”なんだ」と $\cdots$.

「$\leqq$」が用いられた理由を説明しよう．一般に，$[x]=7$ となるための x に関する条件は $7 \leqq x < 8$ である．**〔解答〕**では，この一般論を思い浮かべた上で，$x=\sqrt{55}$ がこの「大小関係」を満たしていることを主張して $\left[\sqrt{55}\right]=7$ と結論しようとしたのである.

「$\leqq$」は「$<$ または $=$」を表す記号であるから,「大小関係」の意味で不等式を書く際には，たとえ「$<$」の方しか成り立つことがなくとも，「$\leqq$」と書いて差し支えない．よって，①，②はどちらも正しい「大小関係」を表しており，しかも $\left[\sqrt{55}\right]=7$ となる理由として適切なものである．したがって，上記の**〔解答〕**はまったく申し分ない.

一方，もちろん「$7^2 < 55$」と書いてもよい．「$7^2 \leqq 55$」という「大小関係」が満たされていることはそれで示されているのだから.

要するに上記のような疑問を持つ生徒も**〈例 1〉**の生徒と同様，なんとなく自分にすぐわかることを目一杯言ってみたいという“人情”に支配されているだけなのだ．**「どっちだってえ〜じゃないか」**と思えるようになって欲しい.

$\boxed{\text{H}}$ 不等式を解く

実数 x に関する様々な不等式の解を求めてみよう.

(1) $\dfrac{x-1}{3} > \dfrac{3}{2}x + 1$ 【1 次不等式】

〔解〕両辺を $6(>0)$ 倍して

$2(x-1) > 9x + 6.$

↑カッコが付く　↑定数項も 6 倍する

$-8 > 7x.$ ← x の係数はなるべく正に

$\therefore \boldsymbol{x < -\dfrac{8}{7}}.$ ← 両辺を 7 (>0) で割った

(2) $x-5 < -2x+1 < 5$ 【ア < イ < ウ 型】

〔解〕

$$\underbrace{x-5<\overbrace{-2x+1}^{②}}_{①}<5$$

①より $x<2$. ②より $-2<x$.　この 1 行は書かずに暗算したい

$$\therefore\ \overbrace{\boldsymbol{-2<\underbrace{x<2}_{①より}}}^{②より}.$$

〈注目〉一般に

$$ア < イ < ウ \Longleftrightarrow ☆ \begin{cases} ア < イ \\ イ < ウ \end{cases} \quad \leftarrow \boxed{\text{C}}⑧$$

☆の省略形

であるから，☆のように 2 つの不等式に分解して考えるのが基本である．(例外もある→たとえば問題 (7))

〈注意〉最右辺の「5」がいちばん簡単だからといって，これを 2 回使って

$$x-5 < -2x+1 < 5 \Longleftrightarrow ☆ \begin{cases} x-5 < 5 \\ -2x+1 < 5 \end{cases}$$

とすることはできない．(こう解くと，解は $-2 < x < \underline{10}$ となってしまう.)

(3) $x^2 - 5x + 6 < 0$ 【2 次不等式】

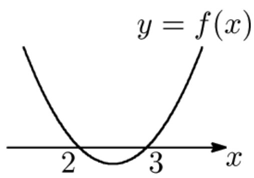
〔解 1：2 次関数のグラフ→$\boxed{\text{F}}$〕

$f(x) = x^2 - 5x + 6$ とおくと,

$f(x) = (x-2)(x-3)$

であるから，放物線 $y=f(x)$(下に凸) は $x=2,\,3$ において x 軸と交わり，下図のようになる.

放物線 $y=f(x)$ が x 軸より下側にある x の範囲を考えて



$\boldsymbol{2 < x < 3}.$

〔**解 2**：**式変形**→$\boxed{\mathbf{E}}$〕〔**解 1**〕のように，2 次不等式は「放物線と x 軸の上下関係」によって解くのが簡便であるが，次の考え方も重要である．

x の増加にともなう 2 つの因数 $x-2$，$x-3$ の符号変化を考えると，$f(x)$ の符号は次の表のようになる．

x が 増 加 す る 向 き →

x	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

この表から，

$$f(x) := (x-2)(x-3) < 0 \qquad \cdots$$

となる x の範囲がわかる．

このように，不等式においてはのような

積の形 と 0 との大小比較 $\cdots$

に持ち込み，左辺における 1 つ 1 つの因数の符号を考えるのが有効である．

(4) $x^3-2x^2-x+2 \geq 0$ 【3 次不等式】

〔**解**〕 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ とおく．

まず，(3)〈**注**〉の形にするために $f(x)$ を因数分解する．

$$\begin{aligned} f(x) =& x^2(x-2)-(x-2) \\ =& (x-2)(x^2-1). \end{aligned}$$

よって与式は

$$(x+1)(x-1)(x-2) \geq 0.$$

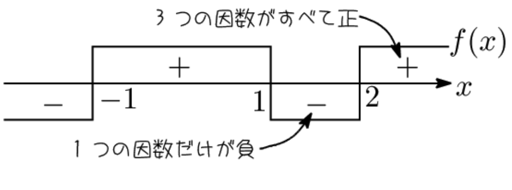
x の増加に伴う 3 つの因数 $x+1$, $x-1$, $x-2$ および $f(x)$ の符号変化は次のとおり．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，$f(x) \geq 0$ となる x の範囲は

$\therefore$ $\boldsymbol{-1 \leq x \leq 1,\ 2 \leq x}$.

〈注〉実戦でこの不等式を解くときには，前記の表は頭の中でイメージするだけにして，次の図だけで済ましてしまおう．



(5) $\dfrac{3}{x+1} \geq \dfrac{1}{x-1}$ 【分数不等式】

〔**解**〕 与式を変形すると

$$\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-1} \geq 0. \qquad \text{←まずは右辺を 0 に}$$

ここで左辺を通分すると

$$\frac{3(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-1)}$$

となるから，は

$$\frac{x-2}{(x+1)(x-1)} \geq 0. \quad \text{←積 (or 商) vs 0 の形 !!}$$

あとは前問と同じように考え，分母が 0 にはならないことを考慮して

$$-1 < x < 1,\ 2 \leq x.$$

〈注 1〉このように，分数式は**通分**することによって**符号**がわかりやすくなる．

〈注 2〉両辺にワザワザ $\underbrace{(x+1)^2(x-1)^2}_{x \neq \pm 1 \text{ なら正}}$ を掛けて

$$(x+1)(x-1)(x-2) \geq 0 \ \text{←}x \neq \pm 1 \text{ を忘れちゃいそう}$$

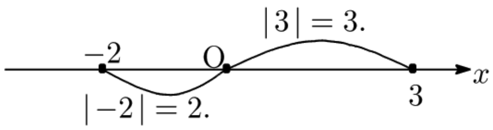
と変形するやり方もあるらしいが，無意味だからやめておこう．

(6) $|x-2| < 1$ 【絶対値】

〈**参考**〉a の絶対値 $|a|$ とは

数直線上における原点 O と a との距離

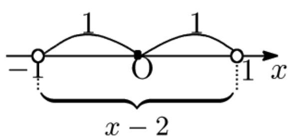
である．(↓下図参照)



このことを理解していれば，本問も次のように簡明に解ける．

〔**解**〕

原点 O と $x-2$ との距離が 1 未満だから



$\therefore$ $-1 < x-2 < 1$. $\therefore$ $\boldsymbol{1 < x < 3}$.

〈参考 1〉任意の実数 a, b に対して

$$|a| < b \iff \begin{cases} b > 0 \\ -b < a < b \end{cases}$$

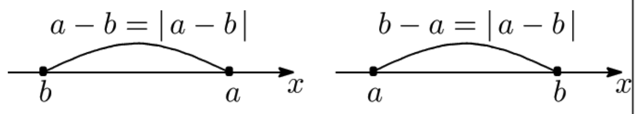
$$\iff -b < a < b. \qquad \cdots①$$

(①のとき，$b > 0$ も自ずと成り立つ.)

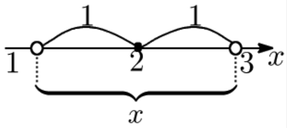
〈参考 2〉絶対値に関して，次の有名不等式も記憶しておきたい．

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

〔別解〕絶対値記号 $|a-b|$ は，a と b の大小に関わらず数直線上における 2 点 a, b の距離を表す．（次図参照）



よって本問の x が満たす条件は，数直線上で点 2 からの距離が 1 未満であることだから，$\boldsymbol{1 < x < 3}$.



〈参考〉絶対値の性質：

$$|a| = \begin{cases} \boxed{a} & (a \geqq 0 \text{ のとき}), \\ \boxed{-a} & (a < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

↑どっちにしろ 0 以上

を用いて

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & (x \geqq 2 \text{ のとき}) \\ -(x-2) & (x < 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と x の範囲で分けて絶対値記号を外して考えることもできるが，ここでは遠回り．

(7) $1 < x^2 < 5$ 【絶対値の利用】

〔解〕 同値変形$\boxed{\text{C}}$⑦を利用する．

$1^2 < |x|^2 < \left(\sqrt{5}\right)^2$ であり，1, $|x|$, $\sqrt{5}$ はすべて 0 以上だから，与式は次と同値：

$$1 < |x| < \sqrt{5}.$$

数直線上での原点から x までの距離を考えて

$$\therefore\ \boldsymbol{-\sqrt{5} < x < -1,\ 1 < x < \sqrt{5}}.$$

〈注意〉ここでは，(2) のように $1 < x^5$ と $x^2 < 5$ に分けて解くのは得策ではない．

(8) $x-3 < \sqrt{x-1}$ 【平方根】

〔解 1：式変形〕

不等式の中に「 $\sqrt{\square}$ 」があれば，これが実数であるときしか考えないから，自ずと $\square \geqq 0$ が前提となる．また，このときつねに $\sqrt{\square} \geqq 0$ である．← $\square$ および $\sqrt{\square}$ は 0 以上

$\sqrt{x-1}$ が実数だから

$$x-1 \geqq 0,\ \text{i.e. } x \geqq 1 \qquad \cdots ①$$

のもとで考える．

(i) $x-3 < 0$, i.e. $(1 \leqq)x < 3$ のとき．
$\sqrt{x-1} \geqq 0$ だから，与式はつねに成り立つ．

(ii) $x-3 \geqq 0$, i.e. $x \geqq 3$ のとき．
与式は両辺とも 0 以上だから次のように同値変形できる．

$$(x-3)^2 < x-1.$$
$$x^2 - 7x + 10 < 0.$$
$$(x-2)(x-5) < 0. \qquad \cdots ②$$

$x \geqq 3$ より $x-2>0$ だから
↑これは「大小関係」だよ

$$x-5 < 0.$$
$$\therefore 3 \leqq x < 5.$$

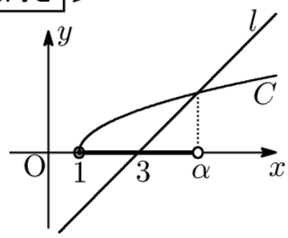
以上 (i)(ii) より，$\boldsymbol{1 \leqq x < 5}$.

〈注意〉②を 2 次不等式のまま $2 < x < 5$ などと解いてはいけない．「 $x \geqq 3$ 」の範囲で考えていることを念頭において．

〈参考〉このように，$\sqrt{}$ を含んだ不等式を同値変形によって解くのはなかなか高度な作業である．そこで **…**

〔解 2：関数のグラフ $\boxed{\text{理系向き}}$ 〕

曲線 $C: y = \sqrt{x-1}$ が直線 $l: y = x-3$ より上側にあるような x の範囲を求めればよい．右図においてそれは $1 \leqq x < \alpha$ である．



そこで，α を求める．C, l の方程式を連立して

$$\sqrt{x-1} = x-3.$$
$$x-1 = (x-3)^2,\ x-3 \geqq 0.$$
$$(x-2)(x-5) = 0,\ x \geqq 3.$$

これを満たす x が α であるから

$$\alpha = 5.$$

したがって，求める解は $\boldsymbol{1 \leqq x < 5}$.

つねに成り立つ不等式

$\boxed{\text{I}}$ 絶対不等式の証明

〈例 1〉

「2 つの正の実数 a, b に対して

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するための条件を求めよ.」

〔証明〕

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$$ 差をとってゼロと大小比較

$$=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$ 分数式は通分する

$$=\frac{(\sqrt{a})^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$$ 完全平方式を予感して

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0.$$ おしっ！

$$\therefore\ \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.\square$$

等号成立条件は，$\sqrt{a}=\sqrt{b}$ i.e. $\boldsymbol{a=b}$.

〈例 2〉

「実数 $x(\geq 0)$ に対して

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+3}<\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$$

が成り立つことを示せ.」

〔証明〕

$\left(\begin{array}{l}\text{このまま差をとってもうまく行きそうに}\\ \text{ないので，両辺を2乗して大小を比べる.}\end{array}\right)$

与式の両辺は 0 以上だから

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right)^2<\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)^2 \quad \cdots ①$$

を示せばよい.

$$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right)^2$$
$$=\left\{2x+3+2\sqrt{(x+1)(x+2)}\right\}-\left\{2x+3+2\sqrt{x(x+3)}\right\}$$
$$=2\left\{\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+3x}\right\}>0.$$

よって与式が示せた. □

〈例 3〉

「 $a<1,\ b<1$ のとき，$ab+1>a+b$ を示せ.」

〔解 1：式変形〕

$$(ab+1)-(a+b)=(a-1)(b-1).$$

ここで，$a-1<0,\ b-1<0$ だから

$$(a-1)(b-1)>0.$$

よって与式は示せた. □

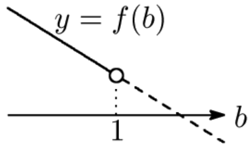
〔解 2：関数利用〕

$$\text{左辺}=\text{右辺}=(ab+1)-(a+b)$$

を，a を固定して b の関数 $f(b)$ とみる.

$$f(b)=(a-1)b+(1-a)$$

において b を $b<1$ の範囲で動かす. $a-1<0$ より $f(b)$ は単調に減少するから，右図より



$$f(b)>f(1)$$
$$=(a-1)\cdot 1+(1-a)=0.$$

よって，左辺 > 右辺 が示された. □

J 有名不等式

略して「相加相乗」

(1)「相加平均と相乗平均の大小関係」

〔2 文字〕

2 つの正の実数 $a,\ b$ に対して

$$\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{相加平均}} \geq \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{相乗平均}}.$$

等号は，$a=b$ のときに限り成り立つ.

〔証明〕 I 〈例 1〉を参照.

〈注意 1〉この不等式の名称中にもあるように，あくまで「大小関係」を表す不等式である.

〈注意 2〉2 箇所の下線部に要注意.→ K **〈例 1〉**

〔3 文字〕

3 つの正の実数 $a,\ b,\ c$ に対して

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

等号は，$a=b=c$ のときに限り成り立つ.

〔証明〕3 文字 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の対称式に関する有名公式

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\right)$$

を利用する. $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が正のとき，$\alpha+\beta+\gamma>0$. また

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha$$ 有名な変形
$$=\frac{1}{2}\left\{(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right\}$$
$$\geq 0. \quad \cdots ①$$

よって

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma.$$
$$\text{i.e. } \frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3} \geq \alpha\beta\gamma. \quad \cdots ②$$

$a,\ b,\ c>0$ だから

$$a=\alpha^3,\ b=\beta^3,\ c=\gamma^3$$
$$\text{i.e. } \alpha=\sqrt[3]{a},\ \beta=\sqrt[3]{b},\ \gamma=\sqrt[3]{c}\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma>0)$$

とおけるから，②より

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

等号成立条件は $\alpha-\beta=\beta-\gamma=\gamma-\alpha=0$ であり，これは $\alpha=\beta=\gamma$ i.e. $a=b=c$ のときに限り成立する．□

〈注意〉不等式①は

$$\begin{cases} (\alpha-\beta)^2 \geq 0, \\ (\beta-\gamma)^2 \geq 0, \\ (\gamma-\alpha)^2 \geq 0 \end{cases}$$

を辺々加えて得られるから，①の等号が成立するのは，上記 3 つの不等式すべてにおいて等号が成立するとき，すなわち $\alpha=\beta=\gamma$ のときである．(→$\boxed{\text{K}}$ **〔例 2〕〈注目〉**参照)

〈参考〉一般に，2 以上の自然数 n に対して，次が成り立つことが知られている．

〔一般形〕
n 個の正の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$
等号は，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限り成り立つ．

上で証明した $n=2, 3$ のときは，ふつう入試において「公式」として使用してよい．$n \geq 4$ のときについては微妙である．

なお，$\boxed{\text{F}}$(2) で見たように，「相加・相乗」は「凸不等式」の考え方からも証明できる．

(2)「コーシー・シュワルツの不等式」

〔2 次元〕
実数 a, b, p, q に対して
$$(ap+bq)^2 \leq (a^2+b^2)(p^2+q^2).$$
等号は，$a:p=b:q$ のときに限り成り立つ．

〔証明〕

$$\begin{aligned} &(a^2+b^2)(p^2+q^2)-(ap+bq)^2 \\ =&a^2q^2+b^2p^2-2ap\cdot bq \quad \text{消える項は初めから書かない} \\ =&(aq)^2+(bp)^2-2aq\cdot bp \quad \text{チョコッと組み替え…} \\ =&(aq-bp)^2 \geq 0. \quad \text{完全平方式！} \\ \therefore\ &(ap+bq)^2 \leq (a^2+b^2)(p^2+q^2). \end{aligned}$$

等号は，$aq-bp=0$ i.e. $a:p=b:q$ のときに限り成り立つ．□

〈参考 1〉xy 平面上の 2 つのベクトル
$\vec{a}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，$\vec{p}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ を考えると，ここで証明した不等式は
$$\left(\vec{a}\cdot\vec{p}\right)^2 \leq \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{p}\right|^2 \quad \cdots①$$
と表せる．2 ベクトル $\vec{a}$，$\vec{p}$ のなす角を θ とすると
$$\text{左辺} = \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{p}\right|^2\underbrace{\cos^2\theta}_{1\text{ 以下}}$$
だから，①が成り立つのは当然である．もちろん，①は空間座標内のベクトルに関しても成り立つ．それが次の「3 次元」である．

〈参考 2〉等号成立条件は，①から考えると
$$\cos\theta=\pm1 \text{ i.e. } \theta=0,\ \pi$$
$$\text{i.e. } \vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{p}$$
である．これを成分で表してみると，たしかに $a:p=b:q$ となる．
ちなみに，「 $a:p=b:q$ 」とは
$\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}$ (ただし，分母が 0 なら分子も 0)
のことであり，これは $aq=bp$ と同値である．

〔3 次元〕
実数 a, b, c, p, q, r に対して
$$(ap+bq+cr)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2).$$
等号は，$a:p=b:q=c:r$ のときに限り成り立つ．

〔証明〕

$$\begin{aligned} &(a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2)-(ap+bq+cr)^2 \\ =&a^2q^2+a^2r^2+b^2r^2+b^2p^2+c^2p^2+c^2q^2 \\ &\qquad -2ap\cdot bq-2bq\cdot cr-2cr\cdot ap \\ =&a^2q^2+b^2p^2-2aq\cdot bp \\ +&b^2r^2+c^2q^2-2br\cdot cq \\ +&c^2p^2+a^2r^2-2cp\cdot ar \\ =&(aq-bp)^2+(br-cq)^2+(cp-ar)^2 \geq 0. \\ \therefore\ &(ap+bq+cr)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2). \end{aligned}$$

等号は，$aq-bp=br-cq=cp-ar=0$，i.e. $a:p=b:q=c:r$ のときに限り成り立つ．□

〈参考〉xyz 空間内の 2 つのベクトル

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{p}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ を考えると,「2 次元」の場合と同様①のように表せる．等号成立条件は，やはり $\vec{a}\ /\!/\ \vec{p}$ である．

〈参考〉一般に，2 以上の自然数 n に対して，次が成り立つことが知られている．

〔一般形〕

実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n; p_1, p_2, \ldots p_n$ に対して

$$(a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_np_n)^2$$
$$\le ({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2)({p_1}^2+{p_2}^2+\cdots+{p_n}^2).$$

等号は，$a_1:p_1=a_2:p_2=\cdots=a_n:p_n$ のときに限り成り立つ．

$n=2, 3$ のときは，入試において「公式」として使用することもある．$n\ge 4$ のときについては微妙．

(3)「“積の作り方”」

〔2 次元〕

$a\ge b$, $p\ge q$ のとき

$$ap+bq\ge aq+bp.$$

〔証明〕

$$(ap+bq)-(aq+bp)$$
$$=a(p-q)+b(q-p)$$
$$=(a-b)(p-q)\ge 0.\ (\because a-b\ge 0,\ p-q\ge 0)$$

よって与式が示せた．□

〈注目〉この不等式には，明確な“意味”がある．

$$\overset{\text{大}}{a}\underset{\text{大}}{p}+\overset{\text{小}}{b}\underset{\text{小}}{q}\ge\overset{\text{大}}{a}\underset{\text{小}}{q}+\overset{\text{小}}{b}\underset{\text{大}}{p}.$$

つまり,「大きいものどうし，小さいものどうしを掛けて足せば，大きい.」「大きいものと小さいものを掛けて足すと，小さい.」このルールはかなり普遍的なもので，たとえば「相加・相乗 (3 文字)」の証明過程で示した不等式：

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$$

にも同じ意味が見出せる．一般性を失うことなく $a\ge b\ge c$ と想定すれば

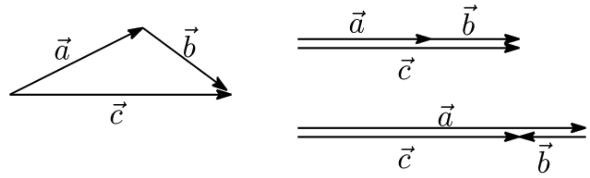
$$\overset{\text{大}}{a}\underset{\text{大}}{a}+\overset{\text{中}}{b}\underset{\text{中}}{b}+\overset{\text{小}}{c}\underset{\text{小}}{c}\ge\overset{\text{大}}{a}\underset{\text{中}}{b}+\overset{\text{中}}{b}\underset{\text{小}}{c}+\overset{\text{小}}{c}\underset{\text{大}}{a}.$$

ワカルカナ？

〈参考 1〉本問で $a=p=1$ とすれば，$\boxed{\text{I}}$〈**例 3**〉とほぼ同様な不等式が得られる．

〈参考 2〉本問の不等式をベースにして,「チェビシェフの不等式」というやや高度な結果が得られる．興味があればググってけれ．

(4)「三角不等式」



2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ とおくと，上図より

$$\left|\vec{c}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|,$$ ←これが「三角不等式」

等号は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ向きのとき (上図右上) に限り成立する．

また，$\vec{a}=(-\vec{b})+\vec{c}$, $\vec{b}=(-\vec{a})+\vec{c}$ だから

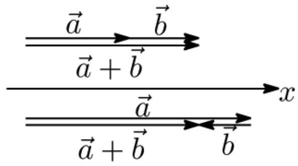
等号は上図右下のとき成立

$$\begin{cases}\left|\vec{a}\right|\le\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right|,\ \text{i.e.}\ \left|\vec{c}\right|\ge\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|,\\ \left|\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{c}\right|,\ \text{i.e.}\ \left|\vec{c}\right|\ge\left|\vec{b}\right|-\left|\vec{a}\right|.\end{cases}$$

以上より

$$\Bigl|\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|\Bigr|\le\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|.\quad\cdots(*)$$

〈参考 1〉



任意の 2 つの実数 a, b に対して，x 軸と平行なベクトル

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}$$

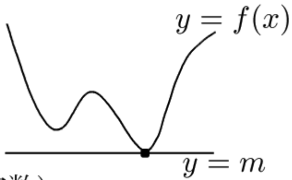
がとれる．$\left|\vec{a}\right|=|a|$, $\left|\vec{b}\right|=|b|$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=|a+b|$ だから，$(*)$ より任意の 2 つの実数 a, b に対して次が成り立つ：

$$\bigl||a|-|b|\bigr|\le|a+b|\le|a|+|b|.$$

〈注意 2〉3 つの正の実数 a, b, c が三角形の 3 辺をなすための条件は，$(*)$ から等号を除いて

$$|a-b|<c<a+b.$$

$\boxed{\text{K}}$ 最小値の定義



関数 $f(x)$ の**最小値**とは，次のように定義される．

$$\min f(x)=m\ (m\text{ は}\underline{\text{定数}})$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}\boxed{\text{大小関係}}\ f(x)\geq m \text{ がつねに成り立ち，}\\ \text{かつ，その}\boxed{\text{等号}}\text{が成立可能．}\end{cases}$$

〔例 1〕

「関数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ の最小値を求めよ.」（$(x>0)$ ← 値の範囲を表している）

〔解〕 $x>0,\ \dfrac{1}{x}>0$ より「相加平均と相乗平均の大小関係」が使えて

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}},\quad a+b\geq 2\sqrt{ab}\text{ の形で使った}$$

i.e. $f(x)\geq 2$. $\cdots$① $\boxed{\text{大小関係}}$

①の$\boxed{\text{等号}}$は

$x=\dfrac{1}{x}$, i.e. $x=1$ のとき成立する． $\cdots$②

①，②より，求める$\boxed{\text{最小値}}$は

$$\min f(x)=\mathbf{2}.$$

〈注意 1〉不等式①はあくまで「大小関係」であり $f(x)$ の「値の範囲」を述べているのではない．したがって，②：等号成立確認を怠ってはならない．

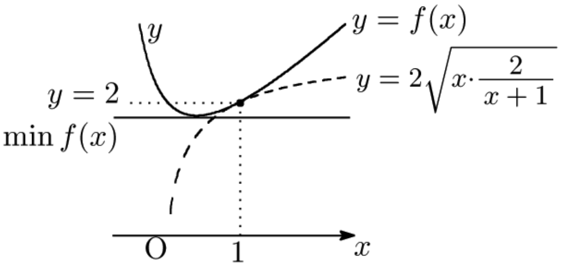
〈注意 2〉上記の解答方法を**まねった**珍答例として，次のようなのがよくある．

たとえば「$f(x)=x+\dfrac{2}{x+1}$ $(x>0)$ の最小値を求めよ.」という問に対して

$$x+\frac{2}{x+1}\geq\sqrt{x\cdot\frac{2}{x+1}},\qquad\cdots③$$

等号は $x=\dfrac{2}{x+1}$ i.e. $x=1$ のとき成立．

$$\therefore\ \min f(x)=f(1)=1+\frac{2}{2}=2.$$



③の右辺が定数ではないのでお話にならない．(上図参照)

〈注目〉「相加相乗」が最小値 (or 最大値) に活用される典型的状況とは

$$\begin{cases}2\text{ つの実数の和が目的で，} & \cdots x+\dfrac{1}{x}\\ \text{それらの積が}\underline{\text{一定}}\text{なとき．} & \cdots x\cdot\dfrac{1}{x}=\text{定数}\end{cases}$$

これが基本形である． 例外もあるが

本問でも，正しくは

$$f(x)=\underline{x+1+\frac{2}{x+1}}-1$$

と変形し，積が一定となる 2 数の和 (下線部) を作る．

〔例 2〕

「2 変数関数 $F=x^2-4xy+5y^2-2y+4$ ($x,\ y$ は実数) の最小値を求めよ.」

〔解〕

1° y を固定し x を動かす．

そこで F を変数 x について整理して

$$\begin{aligned}F=&(x-2y)^2+y^2-2y+4\\ \geq& y^2-2y+4\ (=f(y)\text{ とおく}). \quad\cdots①\end{aligned}$$

2° $f(y)$ に対して，y を動かす．

$$f(y)=(y-1)^2+3\geq 3.\qquad\cdots②$$

1°, 2° より

$F\geq 3$. $\cdots$③ $\boxed{\text{大小関係}}$

等号成立条件は

$$\begin{cases}①\cdots x=2y,\\ ②\cdots y=1.\end{cases}$$

$\therefore$ ③$\cdots x=2,\ y=1$.

よって③の$\boxed{\text{等号}}$は成立可能． $\cdots$④

③，④より，求める$\boxed{\text{最小値}}$は

$$\min f(x)=\mathbf{3}.$$

〈参考〉上記のように変数 $x,\ y$ を 1 個ずつ動かす考え方を，頭の中だけで思い描き，答案には表さないで次のように片付けることもできる．

$$\begin{aligned}F=&(x-2y)^2+y^2-2y+4\\ \geq& y^2-2y+4. &\cdots①\\ =&(y-1)^2+3\geq 3. &\cdots②\\ \therefore F\geq& 3. &\cdots③\end{aligned}$$

以下，**〔解〕**と同様に等号成立確認を行えば満点である．「最小値の定義」に乗っ取って解答したのだから．

〔別解〕 さらにエナジーを節約したければ次のように書く．

$$\begin{aligned} F =&(x-2y)^2+y^2-2y+4 \\ =&(x-2y)^2+(y-1)^2+3. \qquad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

$$\therefore F \geq 3.$$

等号は，$x-2y=y-1=0$ i.e. $x=2,\ y=1$ のとき成立する．よって，$\min f(x)=\mathbf{3}$.

〈注目〉 一般に

$$☆☆\ A \geq B \geq C \overset{☆}{\Longrightarrow} A \geq C. \qquad \boxed{\text{C}}⑧$$

$$★★ \begin{cases} A \geq B \\ C \geq D \end{cases} \Longrightarrow \overset{★}{} A+C \geq B+D \qquad \boxed{\text{D}}⑩$$

が成り立ち，☆の等号が成立するのは，☆☆の 2 つの不等式のいずれにおいても等号が成立するとき，すなわち $A=B,\ B=C$ のときである．★★と★についても同様である．

本問において，**〔解〕**では前者，**〔別解〕**では後者の考え方を使っている．