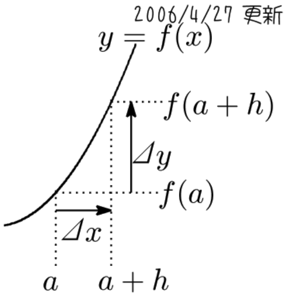
微分・積分（数学Ⅱ）

2006/4/27 更新

A 微分係数とは？



関数 $f(x)$ において，x が a から $a+h$ $(h \neq 0)$ まで動くときの**平均変化率**とは，x の変化量 $\varDelta x(=h)$ に対する y の変化量 $\varDelta y$ の比：

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

のことである．

これが $\varDelta x \to 0$ のときある定数 α に限りなく近づくならば，$f(x)$ は $x=a$ において**微分可能**であるという．また，その定数 α を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**瞬間変化率**といい，記号 $\dfrac{dy}{dx}$，あるいは $f'(a)$ で表す．すなわち，

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}.$$

あるいは

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

$(x=a+h$ とおいた$)$

瞬間変化率のことを，**微分係数**ともいう．

〈注 1〉各 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数を，関数 $f(x)$ の**導関数**といい，$f'(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$ などと表す．

$$\left(a \xmapsto[f']{} f'(a)\right)$$

〈注 2〉微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ の，$x=a$ における**接線の傾き**を表す．

B 微分法の公式

以下において，n は自然数とする．

(1) $(x^n)'=nx^{n-1}$　$c'=0$ (c は定数)

(2) $((x-\alpha)^n)'=n(x-\alpha)^{n-1}$

〈注〉$((3\ x-\alpha)^n)'=n(3\ x-\alpha)^{n-1}$ ではない!!

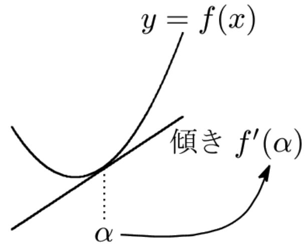
C 微分法の応用

(1) 増減

$f'(x)>0$　ならば，　$f(x)$ は増加関数．

〈注意〉$f'(x)$ の**符号**が重要．

(2) 接線



曲線 $y=f(x)$ の，

$x=\underline{\alpha}$

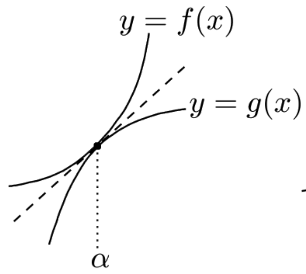
における接線の傾きは

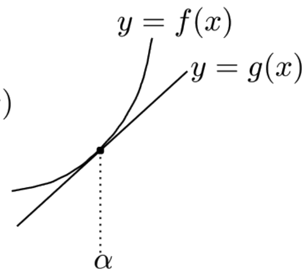
$f'(\underline{\alpha})$

である．

〈注〉まず，**接点の x 座標**を設定すべし．

D 「接する」と「重解」





$f(x)$, $g(x)$ は整関数とする．2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ が $x=\alpha$ において $\boxed{\text{接する}}$ とき

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(\cdots\cdots)$$

と因数分解される．すなわち

方程式 $f(x)=g(x)$ は，
$x=\alpha$ を $\boxed{\text{重解}}$ としてもつ．

(証明には，数学Ⅲの知識を用いる．)

E 原始関数

微分したら $f(x)$ になる元の関数，すなわち

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x) \qquad \cdots(*)$$

となる関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の**原始関数**という．このとき，$F(x)+C$(C は任意定数で，積分定数という) も $f(x)$ の原始関数である．これらをまとめて，$f(x)$ の**不定積分**といい，$\displaystyle\int f(x)\,dx$ で表す．すなわち，

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

x で微分する

F 定積分

上記 $(*)$ のとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

を，$f(x)$ の a から b までの**定積分**という．

G 積分法の公式

以下において，n は自然数，C は積分定数とする．また，$x^0=1$ とする．任意の定数

(1) $\displaystyle\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

(2) $\displaystyle\int (x-\alpha)^n\,dx=\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}+C$

(3) $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^n\,dx=2\int_0^a x^n\,dx\quad (n=0,\ 2,\ 4,\ \ldots)$

$\displaystyle\int_{-a}^{a} x^n\,dx=0\quad (n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots)$

(4) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

いわゆる“6 分の 3 乗公式”

〔(4) の証明〕

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)\,dx\\
&=\int_\alpha^\beta \left\{(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\right\}dx\\
&=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}-(\beta-\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta\\
&=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3.\square
\end{aligned}$$

H 定積分と微分法

㋐上端は「x」

$$(*):\ G(x)=\int_a^x \underbrace{f(t)}_{}\,dt\qquad \leftarrow x\text{ の関数}$$

㋑下端は定数　　㋒ x を含まない

のとき，

$G'(x)=f(x)$.

(証明)　$F'(t)=f(t)$ なる $F(t)$ をとると，

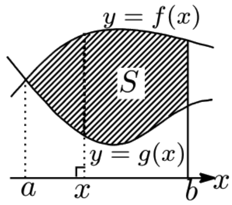
$$\begin{aligned}
G(x)&=\Big[F(t)\Big]_a^x\\
&=F(x)-F(a).\\
\therefore\ G'(x)&=\frac{d}{dx}G(x)\\
&=F'(x)-0\ \ (\because F(a)\text{ は定数})\\
&=f(x).
\end{aligned}$$

(証明終り)

〈注 1〉㋐，㋑，㋒ の 3 つの注意を忘れずに．

〈注 2〉$\displaystyle G(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0.$

I 面積と定積分



右図において，面積 S は次のように表される．

x の範囲

$$S=\int_{a(小)}^{b(大)} \underbrace{\{f(x)-g(x)\}}_{\text{タテ方向の長さ}}\,dx$$

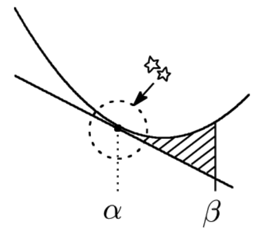
〈面積を求めるための準備〉

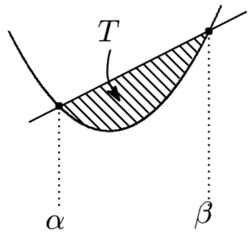
1°　積分変数を決める．　←たいてい「x」

2° $\begin{cases}\text{2 曲線の上下関係を調べる．}\\ \text{2 曲線の共有点を調べる．}\end{cases}$

（2° においては，$\underbrace{f(x)-g(x)}_{\text{差をとる}}$ を考察するとよいことが多い．）

〈注〉次のような面積 (曲線は放物線) は，それぞれ下に示した積分計算に帰着される．(グラフどうしの共有点を見ればわかる．)





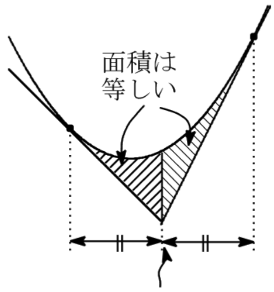
☆と D よりわかる！

$\displaystyle\int_\alpha^\beta \triangle(x-\underset{\text{接点}}{\alpha})^2\,dx$　　$\displaystyle\int_\alpha^\beta \triangle(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$ (交点)

(G(2) を用いて計算)　　(G(4) を用いて計算)

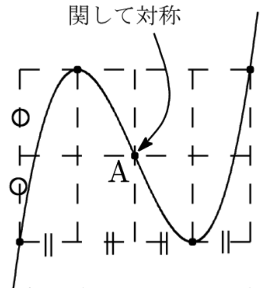
J ちょっとウラワザ

(1) 放物線と 2 接線



放物線の 2 接線の交点は，真ん中で交わる

(2) 3 次関数と“5 つの点”



極大点，それと同じ高さの点，極小点，それと同じ高さの点，対称の中心点．以上の 5 点がきれいに配置される．