2007/4/22 更新

微分法（数学Ⅲ）

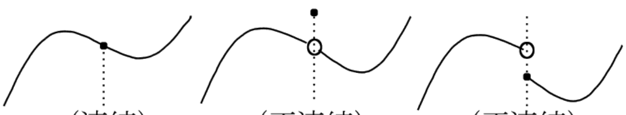
A 関数の連続とは？

関数 $f(x)$ が $x=a$ において**連続**であるとは，値 $f(a)$ が存在し，極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ が収束した上で，しかも

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことをいう．

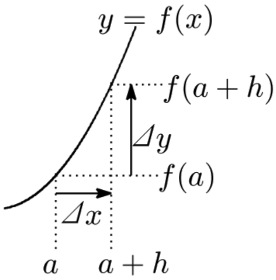
〈注〉「連続」の具体的イメージは，「グラフがつながっている」ということである．



(連続)　(不連続)　(不連続)

B 微分係数とは？

関数 $f(x)$ において，x が a から $a+h$ $(h \neq 0)$ まで動くときの**平均変化率**とは，x の変化量 $\Delta x(=h)$ に対する y の変化量 Δy の比：



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

のことである．

これが $\Delta x \to 0$ のときある定数 α に限りなく近づくならば，$f(x)$ は $x=a$ において**微分可能**であるという．また，その定数 α を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**瞬間変化率**(**微分係数**ともいう) といい，記号 $\dfrac{dy}{dx}$，あるいは $f'(a)$ で表す．すなわち，

$$\blacklozenge\ \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad \text{(平均変化率の極限)}$$

あるいは

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \\ &\qquad (x=a+h \text{ とおいた}) \end{aligned}$$

〈注 1〉微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ における**接線の傾き**を表す．

〈注 2〉関数 $f(x)$ が $x=a$ において $\boxed{\text{微分可能}}$ ならば

$$\begin{aligned} f(x)-f(a) &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a) \\ &\xrightarrow[x\to a]{} f'(a)\cdot 0 = 0 \\ \text{i.e. } f(x) &\xrightarrow[x\to a]{} f(a). \end{aligned}$$

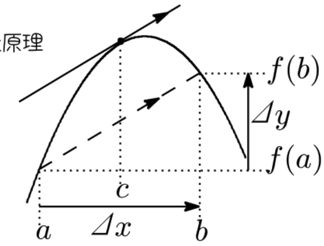
よって $f(x)$ は $x=a$ において $\boxed{\text{連続}}$ である．

〈注 3〉各 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数を，関数 $f(x)$ の**導関数**といい，$f'(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$ などと表す．

$$\left(a \xmapsto[f']{} f'(a)\right)$$

C 平均値の定理 ←事実上原理

関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，$a<b$ として



$$\underbrace{f(b)-f(a)}_{\Delta y} = f'(c)(\underbrace{b-a}_{\Delta x}) \ (a<c<b)$$

を満たす c が存在する．

〈注 1〉Δx (x の変化量) と Δy (y の変化量) とを関連付ける定理である．

〈注 2〉「c」の具体的な値は求まらないことが多い．

D 導関数の求め方

1° 基本関数：x^α，$\sin x$，e^x，$\log x$ などの導関数の公式を記憶する．

〈注〉これらの公式を，$\boxed{\text{B}}$ にもとづいて証明することも大変重要である．

2° 次の“基本 3 公式”は，息をするような自然さで使えるように．

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \text{←積}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \text{←商}$$

$$\{f(\underbrace{g(x)}_{t\text{ とおく}})\}' = \underbrace{f'(g(x))}_{t\text{ でビブン}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{t\text{ をビブン}} \qquad \text{←合成関数}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \quad \cdots ☆\right)$$

〈注 1〉 記号「$\dfrac{dy}{dx}$」は，もともと分数式「$\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}$」の極限として約束されたのであった．よって微分法の公式には，☆のように「あたかも本当の分数式だとみなせば両辺が等しくなっている」ものが多い．

〈注 2〉 これらの公式を，$\boxed{\text{B}}$にもとづいて証明することも，なかなか重要である．

3° 上記以外に，「逆関数」「パラメタ表示された関数」「$f(x, y)=0$ で表された関数 (陰関数)」の微分法がある．(実際の問題の中で覚えよう)

$\boxed{\text{E}}$ 微分法の応用 ♦

覚えることは次の 2 つだけ！

(1) 増減

$\dfrac{dy}{dx}>0$ ならば，y は x の増加関数．（負なら減少）

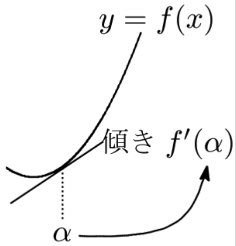
〈注意〉 $\dfrac{dy}{dx}$ の**符号のみ**わかればよい．

符合がわかりやすいのは，**積**や**商**の形．

(2) 接線

曲線 $y=f(x)$ において，

「$x=\alpha$ における接線の傾きは $f'(\alpha)$ である.」



〈注〉 まず，接点の座標を設定すべし．

$\boxed{\text{F}}$ グラフの凹凸と第 2 次導関数

関数 $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とは，導関数 $f'(x)$ を再度 x で微分したものである．すなわち，

$$f''(x)=\{f'(x)\}',$$

$$\text{i.e. } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$ ← 右辺を見れば，左辺の記号の意味がわかる！

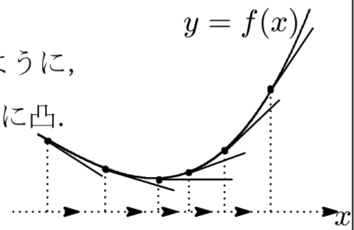
したがって，

$\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ ならば，

$\dfrac{dy}{dx}$(= 接線の傾き) は x の増加関数．

よって右図からわかるように，

曲線 $y=f(x)$ は下に凸．



$\boxed{\text{G}}$ 関数のグラフを描くときの留意点

1° 関数そのものをよく見る．

（定義域，値域，対称性，周期性．極限，漸近線など） $\boxed{\text{大局を大雑把に}}$

2° 微分法を用いて，増減や凹凸を調べる． $\boxed{\text{細部を精密に}}$

〈注〉 凹凸まで調べるべきか否かはその場の状況次第．(なあなあデス)

$\boxed{\text{H}}$ パラメタ曲線を描くときの留意点

曲線 $C:\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t) \end{cases}$ を描く際には …

1° パラメタが簡単に (キレイに) 消去できるなら消去するのがよい．そうでないなら …

2° “きりのいい” t に対応する点を，xy 平面上にいくつかプロットしてみる．

3° t を時刻だとみなし，時刻 t の変化に対する x, y の変化を調べる．そして **xy 平面上で**，点 (x, y) の動きを追跡する．

〈注〉 凹凸は，調べなくても許されることが多い．(なあなあデス)