http://homepage3.nifty.com/yakuikei

複素数と複素平面

2014/6/14 更新

本稿では，とくに断らなくても a, b, x, y は実数とする．

A 虚数単位

虚数単位 i とは，$i^2=-1$ を満たす数である．
(本稿において，文字 i は全て虚数単位である．)

B 複素数とは？

実数 a, b と虚数単位 i を用いて $z=a+bi$ と表される数 z を**複素数**という．

Real part

$\begin{cases} a \text{ を } z \text{ の実部といい，記号 } \mathrm{Re}\, z \text{ で表す.} \\ b \text{ を } z \text{ の虚部といい，記号 } \mathrm{Im}\, z \text{ で表す.} \end{cases}$

Imaginary part

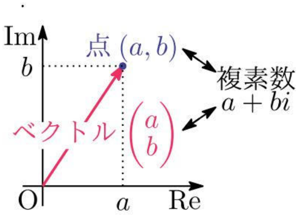
複素数 $a+bi$ のうち特殊なものとして，次のものがある．

$$\text{複素数 } a+bi \begin{cases} b=0 \text{ のとき，実数 } a \\ b\neq 0 \text{ のとき，虚数} \\ a=0,\ b\neq 0 \text{ のとき，純虚数 } bi \end{cases}$$

C 複素平面

複素数 $z=a+bi$ に座標平面上の点 $(a,\ b)$ を対応付けるとき，この平面を，**複素平面** (または複素数平面) という．また，z と点 P が対応するとき，「P(z)」と表す．この点を単に「点 z」ともいう．

複素平面の横軸（x 軸）を**実軸**，縦軸（y 軸）を**虚軸**という．通常の xy 平面と区別するために，それぞれを「Re」「Im」と表す．



〈**注意**〉複素数を，その実部・虚部を用いて「$a+bi$」の形に表す方法を**直交形式**といい，後述する**極形式**と対比する．

D 複素数の相等

a, b, a', b' を実数として，次のように定める．

$$a+bi=0 \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$$a+bi=a'+b'i \iff \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$$

E 複素数の演算

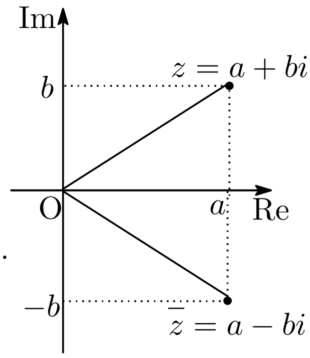
複素数の演算においては，虚数単位 i を普通の文字のように扱って加減乗除 (+, −, ×, ÷) を行えばよい．ただし，「$i^2=-1$」に注意すること．

F 共役複素数

複素数 $z=a+bi$ に対して，その虚部 b の符号を反対にした複素数を「z と**共役**な複素数」といい，$\overline{z}$ で表す．すなわち

$z=a+bi$ のとき，$\overline{z}=a-bi$.

複素平面上で，点 z と点 $\overline{z}$ は実軸に関して対称である．



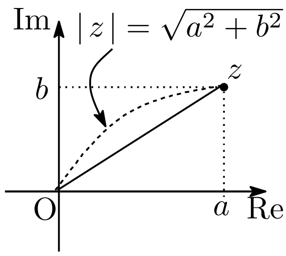
〈**注**〉z が実数 $(z=a+0i)$ のとき，$\overline{z}=a-0i$．すなわち $z=\overline{z}$.

G 絶対値

複素平面上で，原点 O と点 z の距離を z の**絶対値**といい，$|z|$ で表す．

$z=a+bi$ のとき

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.



H 共役複素数の活用

複素数 $z=a+bi$ とその共役複素数 $\overline{z}=a-bi$ について，次が成り立つ

実部 : $z+\overline{z}=2a=2\cdot\mathrm{Re}\, z$.

→z が純虚数のとき，$a=0$，i.e. $z+\overline{z}=0$.

虚部 : $z-\overline{z}=2i\cdot b=2i\cdot\mathrm{Im}\, z$.

→z が実数のとき，$b=0$，i.e. $z=\overline{z}$.

絶対値 : $z\overline{z}=a^2+b^2=|z|^2$.

I 共役複素数の性質

←証明は，直交形式による単純計算

$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$，　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$，

$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$，　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$.

和，差，積，商
全て OK

J 絶対値の性質

←証明は，J :「極形式による積・商」による

$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$.　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$.

積，商
のみ OK

K 極形式

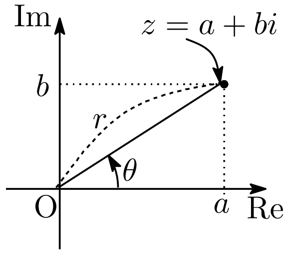
複素数 $z=a+bi$ を，その絶対値 $r(=|z|)$ と**偏角** θ ($\arg z$ と表す) を用いて

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

と表す方法を，z の**極形式**という．このとき，直交形式との間に次の関係が成り立つ．

$\begin{cases} a=r\cos\theta, \\ b=r\sin\theta, \end{cases}$

$r=\sqrt{a^2+b^2}$.



極形式で表された２つの複素数

$$\begin{cases} r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \\ r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{cases} \quad (r_1,\ r_2 > 0)$$

が等しくなるための条件は

$$r_1 = r_2 \quad \text{かつ} \quad \theta_1 - \theta_2 = 2\pi \text{の整数倍}.$$

L 極形式による積・商

複素数 α, β が極形式を用いて

$$\begin{cases} \alpha = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \\ \beta = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{cases}$$

と表されているとき，これらの積・商の極形式は，それぞれ

絶対値は掛け算・割り算（J が導かれた）

$$(*)\begin{cases} \alpha\beta = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}, \\ \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}. \end{cases}$$

偏角は足し算・引き算

(証明は，sin，cos の加法定理による．)

M ド・モアブルの定理

負の整数でも OK

$(*)$ を繰り返し用いると，任意の整数 n に対して次が成り立つ．(厳密には数学的帰納法)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

〔例：累乗根〕

１の５乗根を解とする５次方程式 $z^5 = 1 \cdots ①$ の解を

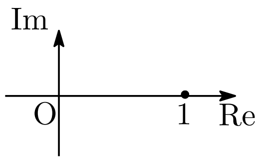
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\left(\text{ただし}, r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi \quad \cdots ②\right)$$

とおくと，

$$r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 1.$$

$1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$



よって，

$$\begin{cases} r^5 = 1, \\ 5\theta = 2\pi\cdot k \ (k \text{ は整数}). \end{cases}$$

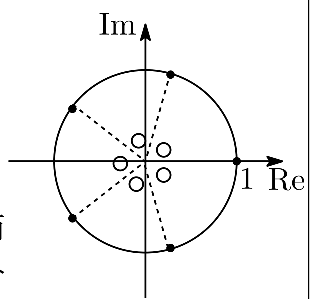
これと②より，

$$\begin{cases} r = 1, \\ \theta = \dfrac{2}{5}\pi\cdot k \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{cases}$$

すなわち，①の解は

$$z = \cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$



(これら５つの解は，複素平面上で右図のように円を５等分する点に対応する．)

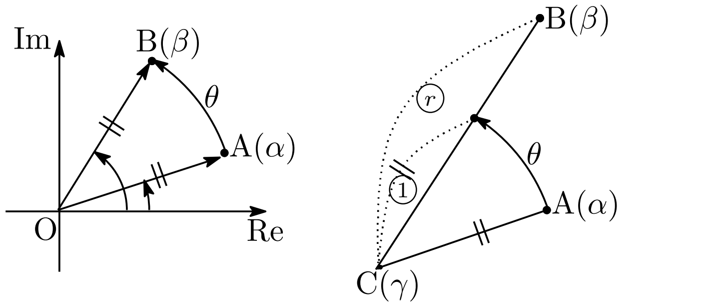
N 回転・伸縮

O を原点とする複素平面上で，

点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を原点の周りに角 θ だけ回転した点が $\mathrm{B}(\beta)$ であるとき (下図左)，

$$\beta = (\cos\theta + i\sin\theta)\,\alpha. \quad \cdots ①$$

(α, β の極形式を考えてみれば納得行くはず．)



①は，

ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$を角$\theta$だけ回転しものが$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$である

ことをも表す．同様に，点 C (γ) として，

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\text{を}\left\{\begin{array}{l}\text{角 } \theta \text{ だけ回転し} \\ r \text{ 倍した}\end{array}\right\}\text{ものが}\overrightarrow{\mathrm{CB}}\text{である}$$

とき (上図右)，

$$\underbrace{\beta - \gamma}_{\overrightarrow{\mathrm{CB}}} = \underbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\theta\text{回転\& } r \text{ 倍}}\underbrace{(\alpha - \gamma)}_{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}. \quad \cdots ②$$

($r = 1,\ \gamma = 0$ のときが①)

②を変形すると

$$\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

つまり，

「$\dfrac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}$」の絶対値，偏角は，それぞれ

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$から$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$への伸縮倍率，回転角を表す．

同様に，

「$\dfrac{\beta}{\alpha}$」の絶対値，偏角は，それぞれ

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$から$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$への伸縮倍率，回転角を表す．

O 複素平面上の軌跡

求め方を下に列記する．

(1)　直交形式の利用

実部 x と虚部 y を用い，数学□：「図形と式」と同様に処理する．

(2)　共役複素数の利用

共役複素数を用いて，実部，虚部，絶対値に関する条件を表す．

(3)　極形式の利用

極形式を念頭に置いて，垂直・平行条件などを表す．