2006/9/27 更新

2 次曲線

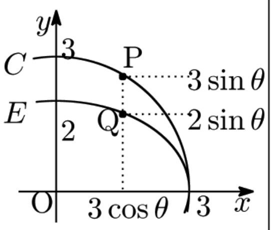
この章では，文字 a, b, c は正の定数とする．

A とりあえず方程式と曲線の概形

（ここでは，2 次曲線（楕円，双曲線，放物線）のちゃんとした定義は後に回して，とりあえずそれらの「方程式」と「概形」を覚えよう．）

(1) 楕円 (Elipse)

円 $C : \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ の y 座標を $\dfrac{2}{3}$ 倍した点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと



$$x = 3\cos\theta,\ y = 2\sin\theta.$$

$$\text{i.e. } \cos\theta = \frac{x}{3},\ \sin\theta = \frac{y}{2}.$$

これと $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より，点 Q の軌跡 E の方程式は

$$E : \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

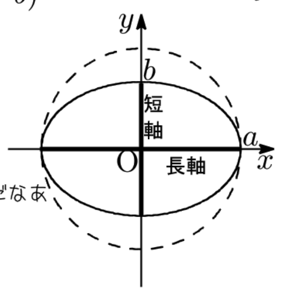
このように

円を y 軸方向に一定の割合で縮小（or 拡大）して得られる曲線 …

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a \neq b) \quad \cdots$$

が，とりあえず**楕円**である．

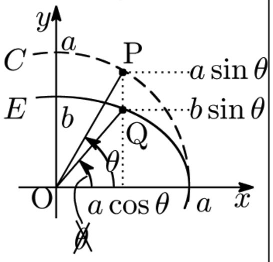
楕円は，4 点 $(\pm a,\ 0)$, $(0,\ \pm b)$ を通る長丸として描ける．



〈注〉楕円 $E : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の任意の点は

$$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$$

とパラメタ（媒介変数）表示される．ただし右図において θ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の偏角ではあるが，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の偏角ではない！



また，E が囲む部分の面積は，…より

$$\pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab.$$

長軸半径 短軸半径

(2) 双曲線 (Hyperbola)

次の方程式で表される曲線を描こう．

$$H : \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

上式を同値変形すると

$$y = \pm \underbrace{\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}}_{f(x)\ \text{とおく}}\ (x \leqq -3,\ 3 \leqq x).$$

よって H は x 軸に関して対称である．そこで，まず関数 $y = f(x)$ のグラフを描く．$f(x)$ は偶関数であるから，$x \geqq 3$ のみ考える．

まず，$f(x)$ は単調増加である．

$$f(x) - \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}\left\{\sqrt{x^2 - 9} - x\right\}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x}$$

$$\to 0\ (x \to \infty)$$

（x が大きいとき，$\sqrt{x^2-9}$ は $\sqrt{x^2} = x$ に近そうなので …）

より，$y = \dfrac{2}{3}x$ は曲線 $y = f(x)$ $(x \geqq 3)$ の漸近線である．

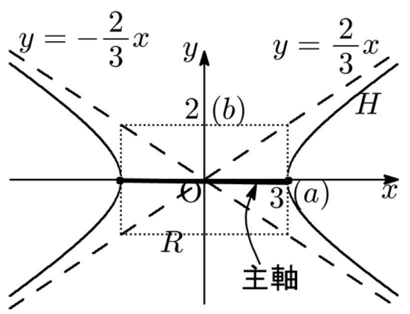
$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}},$$

$$f''(x) = \cdots = \frac{2}{3} \cdot \frac{-9}{(x^2 - 9)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

より，$x \geqq 3$ において，曲線 $y = f(x)$ は上に凸である．

また $\displaystyle\lim_{x \to 3+0} f'(x) = \infty$ だから $y = f(x)$ $(x \geqq 3)$ と $y = -f(x)$ $(x \geqq 3)$ は，“つなぎ目”の点 $(3,\ 0)$ においてなめらかにつながる．

以上より，H は次図のようになる．左右に分かれた双子のような曲線なので，**双曲線**という．

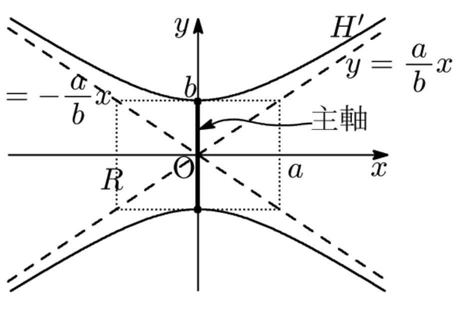


$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \cdots$$

のときは，上図の「3」を「a」に，「2」を「b」に変えたものになる．また，双曲線

$$H' : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \cdots$$

は次図のとおり．



〈双曲線🌷🌷の描き方〉

1° 4 点 $(\pm a,\ 0)$, $(0,\ \pm b)$ を通る「補助長方形」(前図の点線部 R) を作る．

2° R の対角線が漸近線．

3° 座標軸との交わりを調べる．

🌷: x 切片がある→左・右の双子

🌷: y 切片がある→上・下の双子

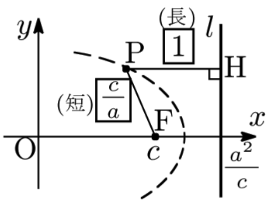
4° R に外接し，漸近線に近づくように描く．

(3) 放物線 (Parabola)

2 次関数のグラフです．知ってますよね．

$\boxed{\text{B}}$ 焦点と準線

(1) 楕円



$a > c$ として，定点 $\mathrm{F}(c,\ 0)$ と定直線 $l : x = \dfrac{a^2}{c}$ へ到る距離の比が $\dfrac{c}{a} : 1$ である点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡 E を求めてみよう．なお，「$\dfrac{a^2}{c}$」などの値は，結果がキレイになるよう意図的に設定されている．上図において

$$\mathrm{FP} = \frac{c}{a}\mathrm{PH}. \qquad \cdots ①$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \frac{c}{a}\left|\frac{a^2}{c} - x\right|. \qquad \cdots ①'$$

$$(x-c)^2+y^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2.$$

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

$$\therefore\ E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1. \quad \text{←焦点の座標 } c \text{ を用いた標準形} \qquad \cdots ☀$$

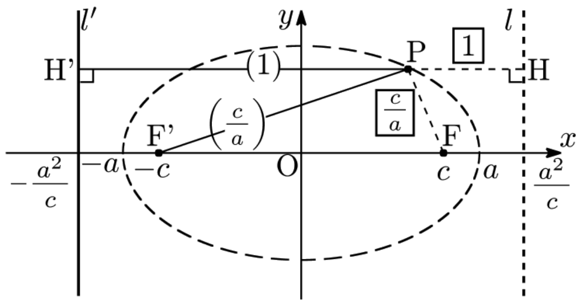
$a^2 - c^2 > 0$ より $b^2 = a^2 - c^2$ とおけて

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

となるから，不思議なことに，E は $\boxed{\text{A}}$(1) で考えた楕円そのものである．F を楕円 E の**焦点**，l を**準線**という．①，①'からわかるように，焦点 F から P へ到る距離

FP は，なんと!! P の x 座標 **x_{P} の1 次関数である．** (めちゃめちゃキレイ) $\cdots$💡

☀より E は y 軸に関して対称であるから，定点 $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ と定直線 $l' : x = -\dfrac{a^2}{c}$ へ到る距離の比が $\dfrac{c}{a} : 1$ である点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡の方程式も当然 ☀となる．(F', l' は E のもう一組の焦点・準線である．) $\cdots ②$



よって前図において

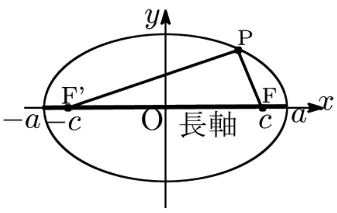
$$\mathrm{FP} + \mathrm{F'P} = \frac{c}{a}\mathrm{PH} + \frac{c}{a}\mathrm{PH'}$$

$$= \frac{c}{a}\mathrm{HH'} = \frac{c}{a}\cdot\frac{2a^2}{c}.$$

$$\therefore\ \mathrm{FP} + \mathrm{F'P} = 2a.$$

すなわち楕円において

2 焦点 F，F' から E 上の任意の点 P へ到る距離の和は，長軸の長さに等しい． $\cdots$🎀



この性質🎀が① i.e. 💡によって後から導かれたことに注意しよう．つまり，🎀を満たす点 P の軌跡を「楕円」と定める高校教科書流の定義は，本格的ではない．

〈注〉楕円☀を

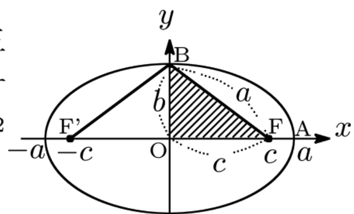
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a \overset{\text{ヨコ長}}{>} b) \qquad \cdots ☁$$

と表したとき，$b^2 = a^2 - c^2$ よりその焦点は

$$(\pm c,\ 0) = (\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0). \qquad \text{←長軸上}$$

$b \underset{\text{タテ長}}{>} a$ のときの楕円☁の焦点は

$$(0,\ \pm\sqrt{b^2-a^2}). \qquad \text{←やっぱり長軸上}$$



また，右図の直角三角形 OBF に注目すると，$b^2 + c^2 = a^2$ より

$$\mathrm{BF} = \mathrm{OA}$$

が成り立つ ($\mathrm{P} = \mathrm{B}$ のとき，$\mathrm{FP} = \dfrac{1}{2}\cdot 2a = a$ であることからもわかる)．これを覚えておくと，焦点の位置がある程度正確に図示できる．

(2) 双曲線

今度は $c > a$ として，(1)①と同じ条件を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡 H を求めてみる．①から②への流れは同様だから，H の方程式は

☼ : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$ ←楕円とまったく同じ

i.e. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1.$ ← 焦点の座標 c を用いた標準形 $\cdots$ ✧

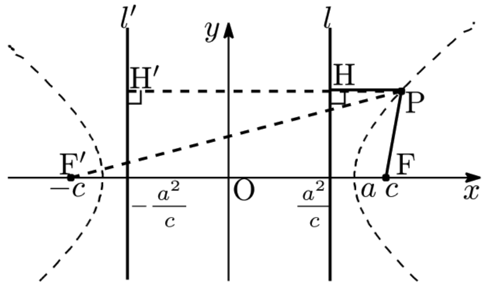
$c^2-a^2>0$ より $b^2=c^2-a^2$ とおけて

$$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

となるから，H は $\boxed{\text{A}}$(2) で考えた双曲線そのものである．F，l を双曲線 H の**焦点**，**準線**という．そして

FP は，やはり x_P の1次関数である．

また，(1) と同様に，定点 $\mathrm{F}'(-c,\,0)$，定直線 $l':x=-\dfrac{a^2}{c}$，は E のもう一組の焦点・準線である．



よって P から $l,\,l'$ へ下ろした垂線の足をそれぞれ H, H′ とすると，P が双曲線 H の右半分上のとき

H は点，H は曲線

$$\mathrm{F'P}-\mathrm{FP}=\frac{c}{a}\mathrm{PH'}-\frac{c}{a}\mathrm{PH}$$
$$=\frac{c}{a}\mathrm{HH'}=\frac{c}{a}\cdot\frac{2a^2}{c}.$$
$$\therefore\ \mathrm{F'P}-\mathrm{FP}=2a.$$

P が H の左半分上にあるときは同様にして

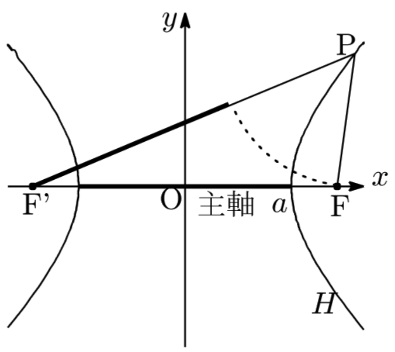
$$\mathrm{FP}-\mathrm{F'P}=2a.$$

よっていずれにせよ

$$|\mathrm{FP}-\mathrm{F'P}|=2a.$$

すなわち双曲線において

2焦点F，F’から H 上の任意の点Pへ到る距離の差は，主軸の長さに等しい．



〈注〉双曲線✧を

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots 🌷$$

と表したとき，$b^2=c^2-a^2$ よりその焦点は

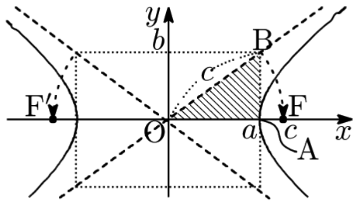
$(\pm c,\,0)=(\pm\sqrt{a^2+b^2},\,0).$ ←主軸の延長線上

双曲線⚘ : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ の焦点は

$(0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2}).$ ←やっぱり主軸の延長線上

また，下図の直角三角形 OAB に注目すると，$a^2+b^2=c^2$ より

$$\mathrm{OF}=\mathrm{OB}$$

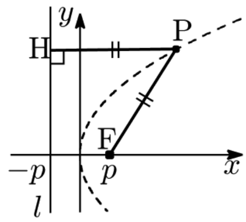


だから，焦点 F は補助長方形の頂点 B を原点 O のまわりに回転させた位置にある．

(3) 放物線（以下では $p\neq 0$ とする．）

定直線 $l:x=-p$ と定点 $\mathrm{F}(p,\,0)$ へ到る距離が等しいような点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ の軌跡 P を求めてみよう．上図において

P は点，P は軌跡だよ



$$\mathrm{FP}=\mathrm{PH}.$$
$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x-(-p)|.$$
$$(x-p)^2+y^2=(x+p)^2.$$
$$y^2=(x+p)^2-(x-p)^2.$$
$$\therefore\ P:y^2=4px. \qquad \text{←つまり } x=\frac{1}{4p}y^2$$

4 が付くことを覚える

よって軌跡 P は放物線である．F を放物線 P の焦点，l を準線という．

$\boxed{\text{C}}$ 離心率

$\boxed{\text{B}}$(1)(2)(3) を総括してみよう．

動点 P から焦点 F と準線 l に到る距離の比は

$$\begin{cases}(1)\ \text{楕円}\ \cdots \dfrac{c}{a}:1 \ \left(\dfrac{c}{a}<1\right)\\ (2)\ \text{双曲線}\cdots \dfrac{c}{a}:1 \ \left(\dfrac{c}{a}>1\right)\\ (3)\ \text{放物線}\ \cdots 1:1\end{cases}$$

であった．このことを用いれば，2次曲線を次のように包括的に定義することができる．

e を正の定数として，平面上で
定点Fと定直線 l に到る距離の比が $e:1$ である点Pの軌跡 C （F は l 上にはないとする）
を総称して **2次曲線**といい，

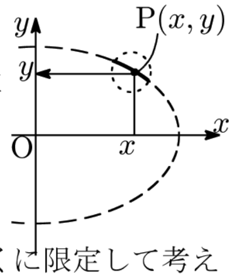
$$\begin{cases}e<1\ \text{のときの}\ C\ \text{を楕円}\\ e=1\ \text{のときの}\ C\ \text{を放物線}\\ e>1\ \text{のときの}\ C\ \text{を双曲線}\end{cases} \qquad \cdots ✿$$

と定める．

この定数「e」を，2次曲線 C の**離心率**という．

〈注〉厳密には「円」も 2 次曲線に含めるべきだが，ここではウルサク言わないことにする．

$\boxed{\text{D}}$ 接線公式



いわゆる“陰関数の微分法”を用いて 2 次曲線の接線公式を導いてみよう．楕円

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \cdots ☁$$

上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ $(x \neq \pm a)$ の近くに限定して考えると，1 つの x に対してただ 1 つの y が対応して定まる．つまり y は x の関数であるから，☁ の両辺を x の関数とみて x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

よって $(x,\ y) \neq (\pm a,\ 0)$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

よって楕円 E の点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ における接線 l は

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1).$$

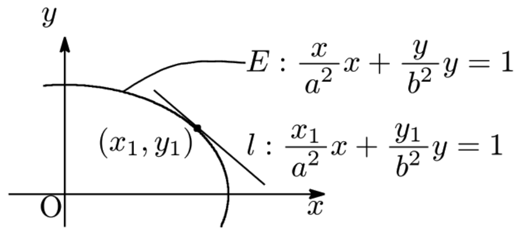
$$\frac{x_1}{a^2}(x - x_1) + \frac{y_1}{b^2}(y - y_1) = 0.$$

$$\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y = \frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2}.$$

($\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ は E 上の点だから右辺は 1 なので)

$$\therefore\ l : \frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y = 1. \qquad \text{←これが接線公式}$$

つまり，楕円 E の方程式の x^2, y^2 の片方を，それぞれ接点の座標 x_1, y_1 に変えればよい．



双曲線においてもまったく同様．次の通り．

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

の点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ における接線は

$$\frac{x_1}{a^2}x - \frac{y_1}{b^2}y = \pm 1. \ (\text{複合同順})$$

〈注〉「円」にも同様な接線公式がありましたね．

また，放物線

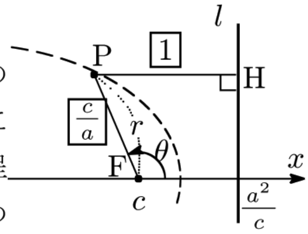
$$P : y^2 = 4px \qquad \text{← yy=2p (x+x) とみる}$$

の点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ における接線は

$$y_1 y = 2p(x + x_1).$$

x, y の片方を接点の座標にする

$\boxed{\text{E}}$ 極方程式



F を極とし，x 軸の正の向きを始線とする極座標において，楕円 E の極方程式を $\boxed{\text{B}}$(1)① を用いて求めてみよう．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} + \overrightarrow{\mathrm{FP}} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

$$\therefore x_{\mathrm{P}} = c + r\cos\theta.$$

よって①は

$$\begin{aligned} r &= \frac{c}{a}\mathrm{PH} \\ &= \frac{c}{a}\left\{\frac{a^2}{c} - (c + r\cos\theta)\right\} \\ &= a - \frac{c^2}{a} - \frac{c}{a} \cdot r\cos\theta. \\ ar &= a^2 - c^2 - cr\cos\theta. \end{aligned}$$

$$\therefore\ r = \frac{a^2 - c^2}{a + c\cos\theta}. \qquad \text{←公式って訳じゃないけどワリとキレイ}$$

$\boxed{\text{F}}$ 方程式から💡を導く

入試では，問題文中で 2 次曲線の方程式が与えられ，そこから何かを導くケースが多い．そこで楕円

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b) \qquad \cdots ☁$$

とその 1 つの焦点 $\mathrm{F}(c,\ 0)$ $(c = \sqrt{a^2 - b^2})$ について，$\boxed{\text{B}}$(1)💡を導いてみよう．楕円の「焦点」を扱う際には「b」はダミーであり，「c」が本質である．そこで☁を a, c で表して☀に変えると

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \qquad \text{← 焦点を扱うときはこっちが本物}$$

E 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{FP}^2 &= (x - c)^2 + y^2 \\ &= (x - c)^2 + (a^2 - c^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ &= \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 \\ &= \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2. \end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{FP} = \left|\frac{c}{a}x - a\right|.$$

ここで $\frac{c}{a}x \leqq \frac{c}{a} \cdot a < a$ $(\because a > c)$ だから

$$\mathrm{FP} = a - \frac{c}{a}x. \qquad \text{←確かに x の 1 次関数}$$

もう 1 つの焦点 F' からの距離も同様にして

$$\mathrm{FP}' = a + \frac{c}{a}x.$$

$$\therefore \mathrm{FP} + \mathrm{F'P} = 2a. \qquad \text{←} \boxed{\text{B}} \text{(1) 🎀も導けた}$$