真夏の幾何

現場の先生の間でもっとも評判が良い“定番モノ”の参考書といえば，おそらく「理解しやすい数学○○」シリーズだろう．その著編者である藤田宏大先生が，前記シリーズ「I+A」の中で，日本初のノーベル化学賞受賞者であらせられる福井謙一氏の言葉を引用されている．ここで，その言葉をさらに引用させていただく．

科学者になろうとする者が若いうちに熱心に数学を勉強すれば頭がよくなる．それも単純な計算に励むのではなくて，幾何の証明問題や作図問題などで，長時間一心不乱に考えることが大切である．その挙げ句，ヒラメキがあって解けた時には，大脳が進歩するであろう．(筆者注：たとえ解けなくても，である．) あたかも，電極にかける電圧を上げて行って臨界値に達したときスパークが飛ぶ，そのスパークが飛ぶごとに電極自身が成長するようなものである．

私も同感である．そこで，次の問題を「長時間一心不乱に考え」て欲しい．解けるまで，各問最低1時間は粘るように．(ほんとはもっともっと粘って欲しいが …)

何回も同じことを考え，何回も同じところで行き詰まり，そのうち何が仮定 (既知) でなにが結論 (未知) かが混乱してきて，それを1から整理しなおして ….そうこうしているうちに，いつの間にかこの問題の“スペシャリスト”になっている自分を発見することだろう．とても手に負えそうになかった問題が，長時間，繰り返し考え続けることによって，たとえ解けていなくても手触りを感じられるものへと変貌しているという … そうした実体験こそが，数学を学ぼうとする意欲，あるいは今後出会うであろう様々な困難に立ち向かう勇気の源泉となる．

それでは，電極からスパークが飛ぶことを祈る．

【問題 1】：'06 東大・理系第3問の原題

平面上の任意の鋭角を，折り紙を用いて3等分する方法を考えよう．

紙の上に2つの半直線 OX，OY が描かれており，$\angle\mathrm{XOY} < 90^\circ$ とする．直線 OX に対して Y と同じ側に $\angle\mathrm{AOX} = 90^\circ$ なる点 A をとり，線分 OA の中点を M，M から半直線 OX と同じ向きに伸びる半直線を l とする．

この紙を適当な直線 m を折り目として折り返し，O が 半直線 l 上に移り，なおかつ A が半直線 OY 上に移るようにする．このとき，O が移った l 上の点を P とすれば，

$$\angle\mathrm{XOP} = \frac{1}{3}\angle\mathrm{XOY}$$

が成り立つことを示せ．

(注：実際に紙を折ってみよう♡)

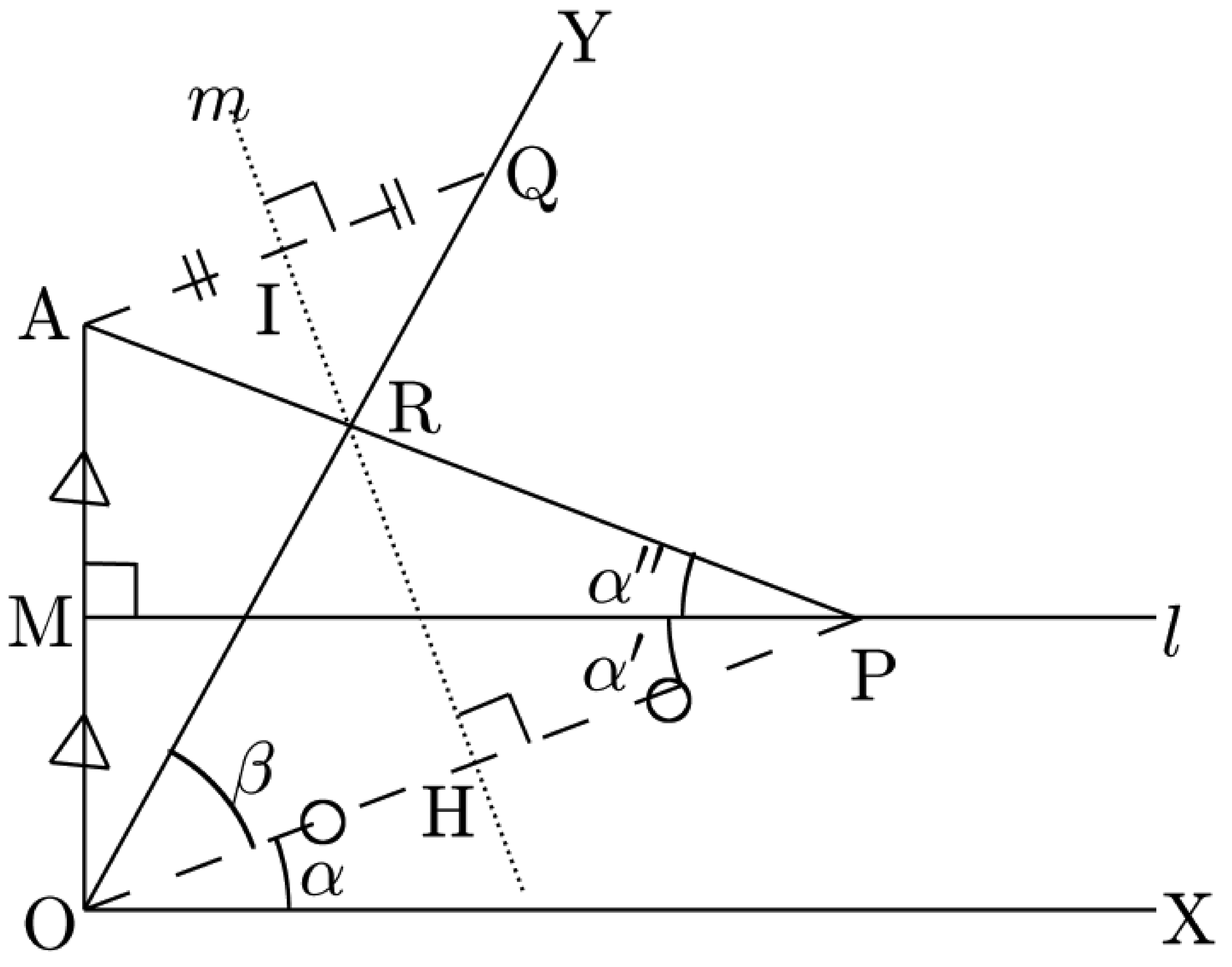
【問題 2】：'05 慶応大・医学部第3問 (2) の原題

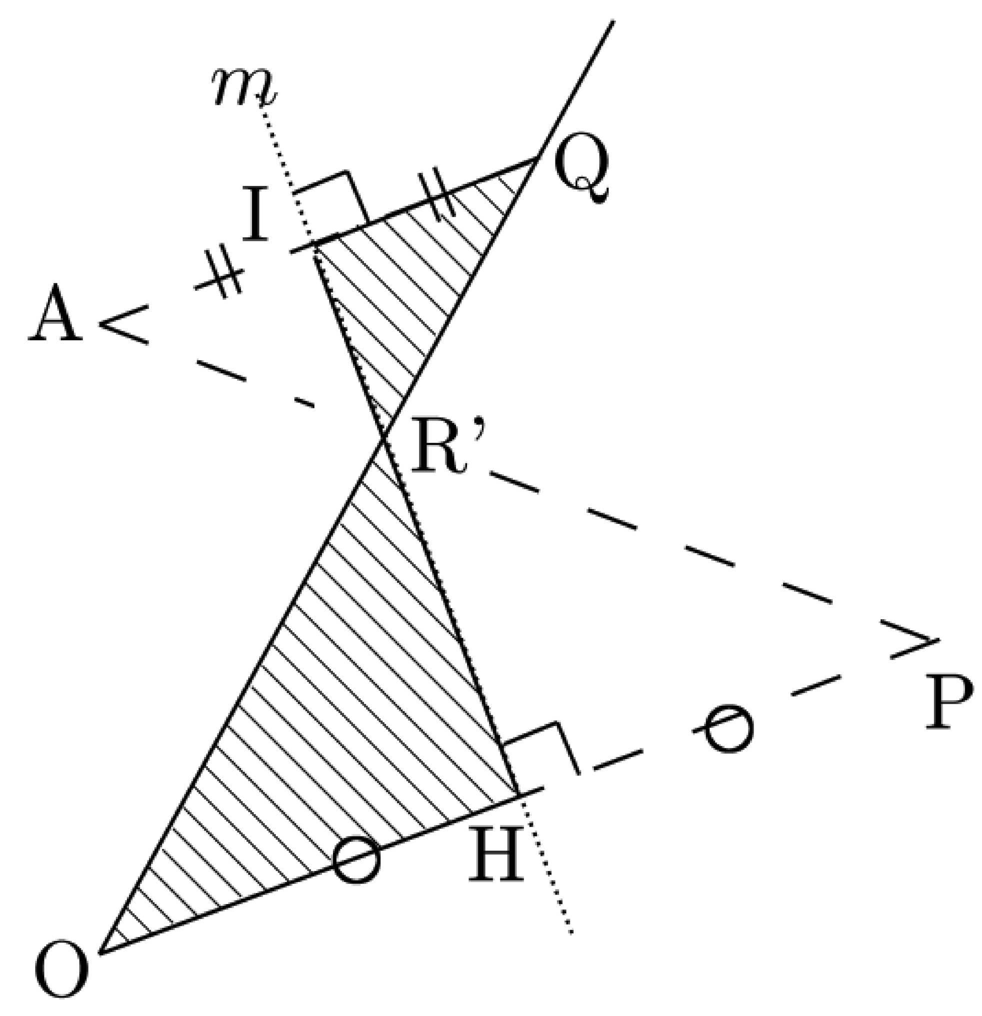
平面上で，3点 A，B，C がこの順に反時計回りに鋭角3角形 ABC を作っている．いま，この3角形の外部に，3つの二等辺三角形 △PBC，△QCA，△RAB を作り，∠CPB= ∠AQC= ∠BRA=120° とする．

このとき，△RBP を R を中心に $+120^\circ$ 回転した三角形，および △QCP を Q を中心に -120° 回転した三角形を利用することにより，△PQR は正三角形であることを証明せよ．

(注：複素数平面を用いちゃダメ．あと，図はなるべく丁寧に正確に描くこと．)

〔問題１の解答〕





A の m に関する対称点を Q(Q は OY 上)，2 直線 OQ，AP の交点を R とする．また，図のように角 $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta$ をとる．

まず，R が m 上の点であることを示す．（対称性から明らかではあるが …）

2 つの線分 OP，AQ の中点をそれぞれ H，I とし，2 直線 OQ，HI の交点を R′ とする (右側の図を参照)．$\triangle$OHR′ と $\triangle$QIR′ において，

$$\angle \mathrm{OHR'} = \angle \mathrm{QIR'} (= 90^\circ),$$
$$\angle \mathrm{HR'O} = \angle \mathrm{IR'Q} \ (\text{対頂角})$$

より

$$\triangle \mathrm{OHR'} \backsim \triangle \mathrm{QIR'}.$$
$$\therefore \mathrm{HR'} : \mathrm{R'I} = \mathrm{OH} : \mathrm{QI}. \qquad \cdots ①$$

2 直線 AP，HI の交点を R″ とすると，同様にして

$$\mathrm{HR''} : \mathrm{R''I} = \mathrm{PH} : \mathrm{AI}. \qquad \cdots ②$$

①，②，および OH = PH, QI = AI より

$$\mathrm{HR'} : \mathrm{R'I} = \mathrm{HR''} : \mathrm{R''I}.$$

したがって，R′ = R″ となり，これが点 R と一致する．よって，R が m 上の点であることが示された．

よって $\triangle$ROP は RO = RP の二等辺三角形であるから

$$\beta = \alpha' + \alpha''. \qquad \cdots ③$$

$\triangle$POA は PO = PA の二等辺三角形であるから

$$\alpha' = \alpha''. \qquad \cdots ④$$

また，MP // OX より

$$\alpha = \alpha'. \qquad \cdots ⑤$$

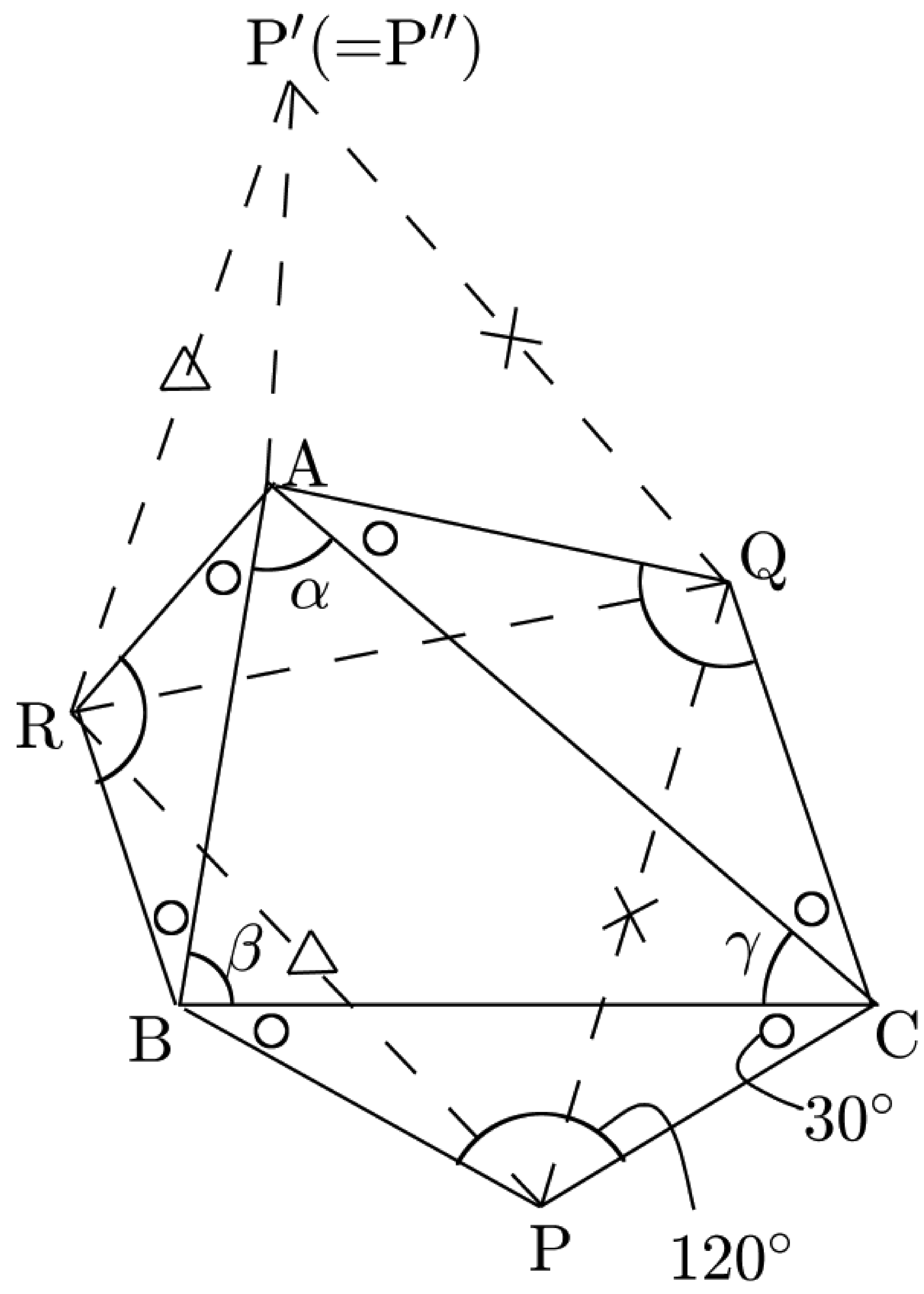
③,④,⑤ より

$$\beta = 2\alpha.$$

したがって

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{XOP} &= \alpha \\ &= \frac{1}{3}(\alpha + \beta) \\ &= \frac{1}{3}\angle \mathrm{XOY}. \ \square\end{aligned}$$

〔問題 2 の解答〕



$\triangle$RBP を R を中心に $+120°$ 回した三角形を $\triangle$RAP′, $\triangle$QCP を R を中心に $-120°$ 回した三角形を $\triangle$QAP″ とし，図のように角 α, β, γ をとる．

$\mathrm{AP'} = \mathrm{BP}$, $\mathrm{AP''} = \mathrm{CP}$ より

$$\mathrm{AP'} = \mathrm{AP''}. \qquad \cdots ①$$

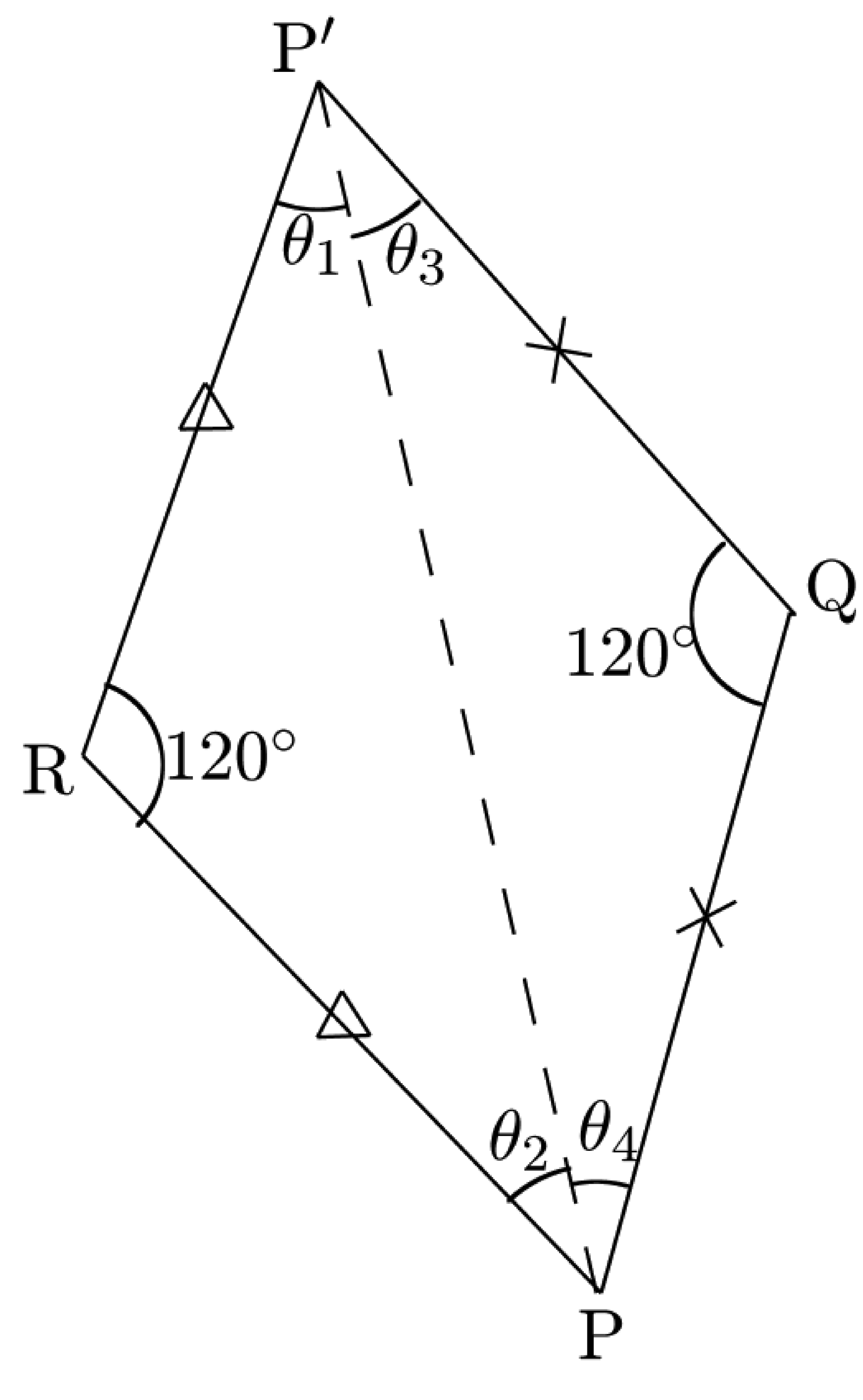
また

$$\begin{aligned}
\angle \mathrm{RAP'} =& \angle \mathrm{RBP} = \beta + 60°, \\
\angle \mathrm{RAP''} =& 360° - \angle \mathrm{QAR} - \angle \mathrm{QAP''} \\
=& 360° - (\alpha + 60°) - \angle \mathrm{QCP} \\
=& 300° - \alpha - (\gamma + 60°) \\
=& 240° - (\alpha + \gamma) \\
=& 240° - (180° - \beta) = \beta + 60°.
\end{aligned}$$

よって

$$\angle \mathrm{RAP'} = \angle \mathrm{RAP''}. \qquad \cdots ②$$

①，②より，P′ と P″ は一致する．そこで，四角形 PQP′R に注目する．



$\triangle$RPP′ において，線分 RP′ は，線分 RP を R を中心に $+120°$ 回したものだから

$$\mathrm{RP'} = \mathrm{RP},\ \angle \mathrm{PRP'} = 120°.$$

よって，右図のように角 θ_1〜θ_2 をとると

$$\theta_1 = \theta_2 = 30°.$$

同様にして

$$\theta_3 = \theta_4 = 30°.$$

したがって，四辺形 PQP′R は，向かい合う 2 組の角がそれぞれ等しいから平行四辺形である．よって

$$\mathrm{PR} = \mathrm{QP'}.\ \therefore\ \mathrm{PR} = \mathrm{PQ}.$$

また

$$\angle \mathrm{RPQ} = \theta_2 + \theta_4 = 30° + 30° = 60°$$

であるから，三角形 PQR は正三角形である．□