数学Ⅱ・数学B

第1問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕 a は正の実数とする．θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の関数

$$f(\theta) = \sin\theta + 2\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) - a\sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right)$$

について答えよ．

(1) $f(\theta)$ を変形すると

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{\boxed{\text{ア}}}\left\{a\sin\theta + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}\left(a + \boxed{\text{ウ}}\right)\cos\theta\right\} \\ &= \sqrt{a^2 + \boxed{\text{エ}}\,a + \boxed{\text{オ}}}\,\sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

となる．ただし，α は θ に無関係な定角であり，

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\,(a + \boxed{\text{キ}})}{\boxed{\text{ク}}\sqrt{a^2 + \boxed{\text{エ}}\,a + \boxed{\text{オ}}}}$$

を満たす．

(2) 方程式 $f(\theta) = 4\sqrt{3}$ $\cdots$ ① が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\left(\sqrt{\boxed{\text{サシ}}} - \boxed{\text{ス}}\right) < a \leqq \boxed{\text{セ}}$$

である．

また，このとき①の 2 つの解を θ_1 , θ_2 とすると，

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\left(a^{\boxed{\text{タ}}} + \boxed{\text{チ}}\,a\right)}{\boxed{\text{ツ}}\left(a^2 + \boxed{\text{エ}}\,a + \boxed{\text{オ}}\right)}$$

〔**2**〕　対数の性質と指数法則に関する次の記述について，$\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ④ のうちからそれぞれ１つずつ選べ．ただし，以下において p, x, y は実数であり，$a>0$, $a \neq 1$, $X>0$, $Y>0$ とする．

$\log_a X + \log_a Y = \log_a XY$ は，指数法則 $\boxed{\text{テ}}$ を元にして導かれる．

$\log_a X - \log_a Y = \log_a \dfrac{X}{Y}$ は，指数法則 $\boxed{\text{ト}}$ を元にして導かれる．

$p \log_a X = \log_a X^p$ は，指数法則 $\boxed{\text{ナ}}$ を元にして導かれる．

〔指数法則〕

⓪ $(a^x)^p = a^{xp}$　　① $a^x \cdot b^x = (ab)^x$　　② $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

③ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$　　④ $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

〔**3**〕　星の明るさを表す等級について考えよう．m 等星の明るさを $L(m)$ と表すと

$$m-n=a\{\log_{10}L(m)-\log_{10}L(n)\}\ \ (a\text{ は実数の定数})\ \ \cdots(*)$$

が成り立つ．また 1 等星 $(m=1)$ の明るさは 6 等星 $(m=6)$ の明るさの 100 倍である．次の問いに答えよ．

(1)　$a=\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である．

(2)　1 等星の明るさは 2 等星の明るさの $10^{\boxed{\text{ノ}}}$ 倍である．$\boxed{\text{ノ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑨ のうちから一つ選べ．

⓪ 2　① 5　② $\dfrac{1}{5}$　③ $\dfrac{5}{2}$　④ $\dfrac{2}{5}$

⑤ -2　⑥ -5　⑦ $-\dfrac{1}{5}$　⑧ $-\dfrac{5}{2}$　⑨ $-\dfrac{2}{5}$

(3)　$(*)$ の関係は，任意の実数 m , n に対して成り立つ．

太陽以外の恒星のうちもっとも明るいシリウスは -1.5 等級，北極星は 2 等星であるとする．シリウスの明るさは北極星の明るさの $\boxed{\text{ハヒ}}\times 10^{\boxed{\text{ノ}}}$ 倍である．

数学Ⅱ・数学B

第2問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕 a は正の実数とする．x の 2 次方程式 $2x^2-3\left(a^2+2a\right)x+4a^3+6a^2=0$ $\cdots$ ① の解について考えよう．

(1) $a=1$ のとき，方程式①の解は，$x=$ $\boxed{\text{ア}}$ ， $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

(2) ①が $x=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ を解にもつような a の値は，

$a=$ $\boxed{\text{エ}}$ ， $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}\left(\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}-\boxed{\text{コ}}\right)$ である．

(3) ①が $x=1$ を解にもつような正の実数 a の個数は $\boxed{\text{サ}}$ 個である．

(4) ①の正の実数解 x はどのような値をとり得るか．その値の範囲について正しく記述したものを，次の⓪〜⑨のうちから一つ選べ． $\boxed{\text{シ}}$

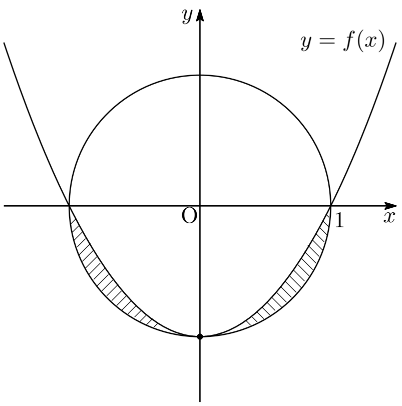
⓪ $0<x<3$　① $0<x<4$　② $0<x\leqq 3$　③ $0<x\leqq 4$

④ $x>1$　⑤ $x>2$　⑥ $x\geqq 1$　⑦ $x\geqq 2$

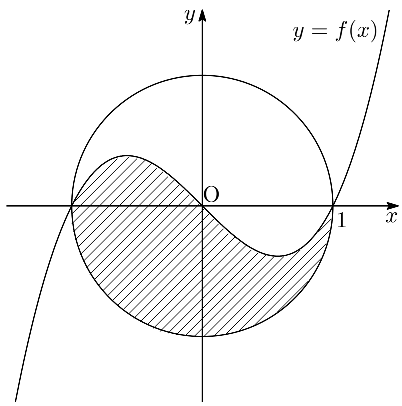
⑧ $2<x<3$　⑨ $2\leqq x\leqq 3$

〔**2**〕　次の図 (A)〜(D) それぞれについて，xy 平面上で原点を中心とする円と曲線 $y=f(x)$ ($f(x)$ は x の整式) で囲まれる部分 (図の斜線部) の面積を正しく表しているものを，下の ⓪ 〜 ⑨ のうちから一つずつ選べ．(A) $\boxed{\text{ス}}$，(B) $\boxed{\text{セ}}$，(C) $\boxed{\text{ソ}}$，(D) $\boxed{\text{タ}}$

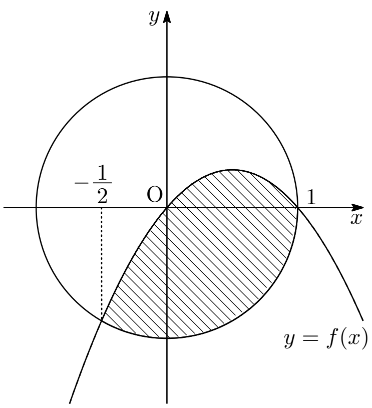
(A) 2 つの斜線部の面積の和を考えよ．



(B) 曲線 $y=f(x)$ は原点 O 軸に関して対称

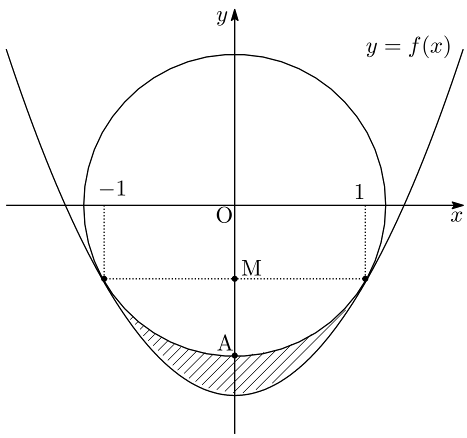


(C)



(D) 円と曲線 $y=f(x)$ は接する

点 M は線分 OA の中点



⓪ $\dfrac{\pi}{2}$

① $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\frac{\pi}{2}$

② $\displaystyle -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\frac{\pi}{2}$

③ $\displaystyle -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\frac{4}{9}\pi$

④ $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx-\frac{4}{9}\pi$

⑤ $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx-\frac{4}{9}\pi+\frac{\sqrt{3}}{3}$

⑥ $\displaystyle -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx-\frac{4}{9}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}$

⑦ $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx+\frac{\pi}{3}$

⑧ $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}$

⑨ $\displaystyle -\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx+\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}$

数学Ⅱ・数学B $\boxed{\text{第 3 問〜第 5 問は，いずれか 2 問を選択し，解答しなさい．}}$

第3問 (選択問題) (配点 20) 第 3 問：「確率分布」は，選択者が少ないので省きます．

第4問 (選択問題) (配点 20)

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n=1\,,\,2\,,\,3\,,\,\cdots)$ が，次のように定められている．

$$a_1=1\,,\ \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2n+1\ (n=1\,,\,2\,,\,3\,,\,\cdots)$$

$$b_1=1\,,\ {b_n}^2-{b_{n+1}}^2={b_n}^2{b_{n+1}}^2\,,\ b_n>0\ (n=1\,,\,2\,,\,3\,,\,\cdots)$$

以下の問に答えよ．

(1) 任意の自然数 n に対して

$$\frac{1}{a_n}=\boxed{\text{ア}}\,,\ a_n=\boxed{\text{イ}}$$

$$\frac{1}{{b_n}^2}=\boxed{\text{ウ}}\,,\ b_n=\boxed{\text{エ}}$$

が成り立つ． $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ 〜 ⑨ のうちから一つずつ選べ．

⓪ n　① n^2　② $\sqrt{n}$　③ $n+1$　④ $(n+1)^2$

⑤ $\sqrt{n+1}$　⑥ $\frac{1}{n}$　⑦ $\frac{1}{n^2}$　⑧ $\frac{1}{\sqrt{n}}$　⑨ $\frac{1}{n+1}$

(2) n は 2 以上の自然数とする．

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=\boxed{\text{オ}}-\frac{\boxed{\text{カ}}}{n}$$ が成り立つ．

また， $\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=1$ であることを用いると，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\boxed{\text{キ}}\sqrt{n}-\boxed{\text{ク}}$$ が成り立つことがわかる．

(3) 2 以上の自然数 n に対して， $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ と定める．これらの大きさについて考えてみよう．

S_n と T_n の大小関係について正しく述べているものを，次の ⓪ 〜 ③ のうちから一つ選べ． $\boxed{\text{ケ}}$

0 すべての n に対して，$S_n = T_n$となる． 1 すべての n に対して，$S_n > T_n$となる．

2 すべての n に対して，$S_n < T_n$となる． 3 S_nと T_nの大小関係は，n に応じて入れ替わる．

次に，S_{100} の大きさについて述べた次の (A)～(H) のうち，正しいものだけをすべて挙げた組合せを，下の 0 ～ 9 のうちから一つ選べ． コ

(A) $S_{100} > 1.25$ (B) $S_{100} > 1.99$ (C) $S_{100} > 2.1$ (D) $S_{100} > 2.5$

(E) $S_{100} < 1.25$ (F) $S_{100} < 1.99$ (G) $S_{100} < 2.1$ (H) $S_{100} < 2.5$

また，T_{100} の大きさについて述べた次の (A)～(H) のうち，正しいものだけをすべて挙げた組合せを，下の 0 ～ 9 のうちから一つ選べ． サ

(A) $T_{100} > 1.7$ (B) $T_{100} > 10$ (C) $T_{100} > 18.1$ (D) $T_{100} > 100$

(E) $T_{100} < 1.7$ (F) $T_{100} < 10$ (G) $T_{100} < 18.1$ (H) $T_{100} < 100$

〔正しいものの組合せ〕

0 (A) (B) 1 (A) (B) (C) 2 (A) (B) (C) (D)

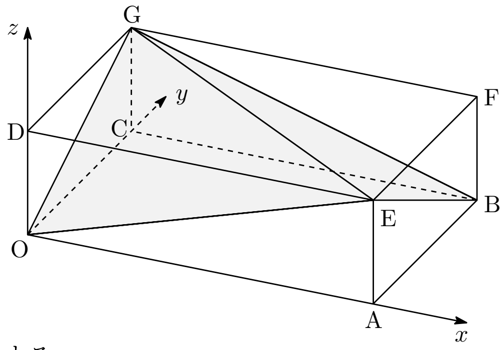
3 (G) (H) 4 (F) (G) (H) 5 (E) (F) (G) (H)

6 (A) (F) (G) (H) 7 (A) (B) (G) (H) 8 (A) (B) (C) (H)

9 (A)(H)

数学Ⅱ・数学B　第3問〜第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい．

第5問　(選択問題)　(配点　20)



a は正の実数とする．xyz 空間に右図のような直方体 OABC-DEFG があり，

$$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{C}\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right),\ \mathrm{D}\left(0,\ 0,\ \frac{1}{a}\right)$$

であるとする．以下の問に答えよ．

(1)　$\vec{m}$ は平面 OEG に垂直なベクトルの 1 つとする．

$\vec{m}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ のいずれにも垂直であることから，$\vec{m}$ の成分として正しいものは下の 0 〜 9 のうち $\boxed{\text{ア}}$ である．また，$\vec{n}$ は平面 BGE に垂直なベクトルの 1 つとすると，$\vec{n}$ の成分として正しいものは下の 0 〜 9 のうち $\boxed{\text{イ}}$ である．

0 $\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{a}\right)$　1 $\left(-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{a}\right)$　2 $\left(1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{a}\right)$　3 $\left(1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{a}\right)$

4 $(1,\ 2,\ a)$　5 $(-1,\ 2,\ a)$　6 $(1,\ -2,\ a)$　7 $(1,\ 2,\ -a)$

8 $\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$　9 $\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$

(2)　(1) の 2 ベクトル $\vec{m}$, $\vec{n}$ のなす角を α $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ とすると，$\cos\alpha = \dfrac{\boxed{\text{ウ}} - a^2}{\boxed{\text{エ}} + a^2}$ となる．

よって，2 つの平面 OEG，平面 BGE のなす角を β $\left(0 \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$\boxed{\text{オ}} \text{ のとき } \cos\beta = \frac{\boxed{\text{ウ}} - a^2}{\boxed{\text{エ}} + a^2},$$

$$\boxed{\text{カ}} \text{ のとき } \cos\beta = \frac{a^2 - \boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}} + a^2}$$

となる．$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の 0 〜 7 のうちから一つずつ選べ．

0 $0 < a \leqq 1$　1 $0 < a \leqq \frac{1}{2}$　2 $0 < a \leqq \sqrt{3}$　3 $0 < a \leqq \sqrt{5}$

4 $a \geqq 1$　5 $a \geqq \frac{1}{2}$　6 $a \geqq \sqrt{3}$　7 $a \geqq \sqrt{5}$

(3)　O から平面 BGE へ垂線 OH を下ろす．このとき，H が平面 BGE 上にあることから

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = s\overrightarrow{\mathrm{BG}} + t\overrightarrow{\mathrm{BE}} \ (s\,,\ t \text{ は実数})$$

と表せる．また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は (1) の $\overrightarrow{n}$ と平行だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{n} \ (k \text{ は実数})$$

と表せる．これらを用いると，

$$s = \boxed{\text{キ}}\ ,\ t = \boxed{\text{ク}}$$

となる．$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の 0 ～ 7 のうちから一つずつ選べ．

0 $\dfrac{2a+3}{5+a^2}$　　1 $\dfrac{2a-3}{5+a^2}$　　2 $\dfrac{2a+5}{3+a^2}$　　3 $\dfrac{2a-5}{3+a^2}$

4 $\dfrac{a^2+3}{5+a^2}$　　5 $\dfrac{a^2-3}{5+a^2}$　　6 $\dfrac{a^2+5}{3+a^2}$　　7 $\dfrac{a^2-5}{3+a^2}$

このことから，H が三角形 BGE の内部 (周は除く) にあるような a の値の範囲が求まる．それを正しく記述したものを，次の 0 ～ 7 のうちから一つ選べ．$\boxed{\text{ケ}}$

0 $0 < a < \sqrt{3}$　　1 $0 < a < 2$　　2 $0 < a < \sqrt{5}$　　3 $a > 0$

4 $a > \sqrt{3}$　　5 $a > 2$　　6 $a > \sqrt{5}$　　7 $\sqrt{3} < a < 2$

8 $2 < a < \sqrt{5}$　　9 $\sqrt{3} < a < \sqrt{5}$