第 5 章

ベクトル

注 本シリーズでは，平面ベクトルの基礎の大半をⅡ+B 2で扱いました．その内容は，本章の1 2 4 7 8にそのまま再掲されています（演習問題は変わっていますが）．これらの節の見出しには「Ⅱ+B 2」とマークを付けておきますから，既習者は飛ばして先へ進んでもかまいません．

サラッと目を通すと理想的

「数学 C」範囲なので一応5となっていますが，「数学Ⅲ」（1～4）とは独立に学べますので，比較的早い段階で習得することをお勧めします．Ⅱ+B 2の内容は3「微分法」より前に，また，本章の5 12 4は4「積分法」より前に済ませておいてください．

概要

Ⅱ+B 2では，ベクトルで学ぶ 2 つの内容：

1.　「ベクトルの問題」を解く．
2.　「他分野」を征服するツールとして役立てる．

のうち，早期に学んでおきたい 2. に絞って学習しました．本章では，ベクトルの基礎をある程度身に付けた上で，1. も含めて学んでいきます．

言い訳　点 A，B が一致することを，スペースの関係で「A=B」と書いてしまうことがあります．

一般的な表現ではなさそうですが

学習ポイント

1.　ベクトルを用いて，共線（同一直線上）· 共面（同一平面上）であることを表す．
2.　内積を用いて長さ · 角，および面積 · 体積を計量する．
3.　1. 2. におけるスマートな計算法を身に付ける．

「ベクトル」は，基本体系がキッチリ出来上がっており，それをマスターしてしまえば問題解法はかなり類型的であることが多いです．微分 · 積分法などに比べて，さほど演習量は要りません．

（あるレベル以上の生徒間の）勝負を決するポイントは，実はベクトル以前の「**図形そのもの**」を把握する力[→ Ⅰ+A 5]と，ベクトル以降の**計算処理**です．

言い訳　演算規則など基礎の説明は，本書の他章に比べるとアッサリ目です（そこで躓く人はほぼ皆無）．入試が近い受験生の実利を考え，早く実戦問題へとりかかるよう配慮しています．

将来入試では

理系生の場合，ベクトル単独のみならず，他分野との融合の形で出会うことが多いです．文系生は，おそらく共通テストで数学 C の「ベクトル」を選択する可能性が高いでしょう．

この章の内容

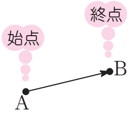
［高校数学範囲表］　●当該分野　●関連が深い分野

数学Ⅰ	数学Ⅱ	数学Ⅲ 理系
数と式	いろいろな式	いろいろな関数
２次関数	ベクトルの基礎	極限
三角比	図形と方程式	微分法
データの分析	三角関数	積分法
数学Ａ	指数・対数関数	数学Ｃ
図形の性質	微分法・積分法	ベクトル
整数	数学Ｂ	複素数平面
場合の数・確率	数列	２次曲線
	統計的推測	

1 ベクトルとは？

Ⅱ+B 2 5 10までは，平面上のベクトルを扱います

1 ベクトルとは？

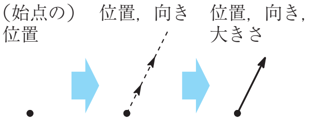


「向き」も考えた線分を**有向線分**といい，矢印で表されます．例えば点 A から点 B へ向かう矢印で表される有向線分 AB において，A を**始点**，B を**終点**といいます．[1)]

有向線分は，一般に次の 3 つで決定します：

（始点の）位置，向き，大きさ（長さ）

この 3 つのうち，位置を考えず，向きと大きさだけを考えたものを**ベクトル**といい，有向線分 AB で表されるベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書きます．



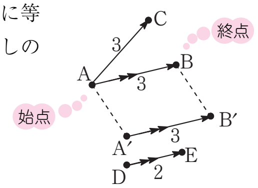
言い訳 [1)]：「始点」および「終点」という用語は，元来は有向線分に対して用いますが，「ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の始点は A」のように使っても叱られはしないと思われます．（笑）

有向線分とベクトル **原理**

区別するもの：$\overbrace{\text{位置，}\underbrace{\text{向き，大きさ}}_{\text{ベクトル}}}^{\text{有向線分}}$

2 ベクトルの相等

2 つのベクトルは，向きも大きさも等しい有向線分で表されるとき，互いに等しいと定めます．右図において，各有向線分（矢印）が表すベクトルどうしの関係は，次の通りです：



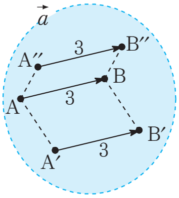
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$. 向きと大きさが等しい

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\fallingdotseq\overrightarrow{\mathrm{DE}}$. 向きは同じだが大きさが異なる

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\fallingdotseq\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. 大きさは等しいが向きが異なる

注　『位置が違っても同一だとみなす』というのがなかなか斬新で呑み込みにくいかもしれませんね．そこで，「ベクトル」とは「移動」のようなものだと捉えておきましょう．例えば上の図において，「A から B への移動」と「A′ から B′ への移動」は，どちらも右上向きに 3 だけ動く同じ移動だという主張なら，ワリと抵抗なく受け入れられるでしょ？

原理　「ベクトル」とは，有向線分において「位置」の違いを無視し，「向き」と「大きさ」だけを考えたもの，つまり，「移動」のようなものである．



例えば右図において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A''B''}}$ は向きと大きさが等しいので全て等しいベクトルです．そこで，これら全ベクトルを「$\vec{a}$」などと表します．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}=\overrightarrow{\mathrm{A''B''}}=\vec{a}$.

$\vec{b}$, $\vec{v}$ とか…

3 ベクトルの大きさ

また，ベクトルの大きさ（長さ）を [1)] $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$，$|\vec{a}|$ のように書きます．例えば 2 の図においては，

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=3$, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\fallingdotseq|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|$.

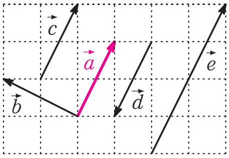
注　特に大きさが 1 のベクトルのことを**単位ベクトル**といいます．

語記サポ [1)]：「絶対値」とは読みません．「大きさ」といいます．

4 ベクトルの向き

例えば 2 の図において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ は**向きが同じ**．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ は**向きが反対**です．このいずれかの関係があるとき 2 つのベクトルは**平行**であるといい，次のように表します．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{DE}}.\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{ED}}.\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ と } \overrightarrow{\mathrm{AC}} \text{ は平行ではないので，} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$



問 右図において，次の条件を満たすベクトルを $\vec{b}$〜$\vec{e}$ から選べ．

(1) $\vec{a}$ と等しいベクトル．　(2) $\vec{a}$ と大きさが等しいベクトル．

(3) $\vec{a}$ と向きが同じベクトル．

解答 (1) 向きと大きさが $\vec{a}$ と等しいベクトルを選んで，$\vec{c}$．//

(2) 大きさ（長さ）が $\vec{a}$ と等しいものは，$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$．//

(3) 向きが $\vec{a}$ と同じものは，$\vec{c}, \vec{e}$．//　**参考** $\vec{a}$ と平行なものは，$\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$．

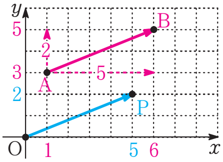
5 成分表示

O を原点とする xy 平面上で，点 A(1, 3) から B(6, 5) への「移動」を考えると，

$$\begin{cases} x \text{ 軸の向きへの移動量} = 6-1 = 5, \\ y \text{ 軸の向きへの移動量} = 5-3 = 2. \end{cases}$$

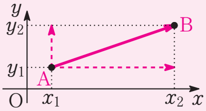
この 2 つの移動量を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\cdots x\text{ 成分} \\ \cdots y\text{ 成分}\end{matrix}$ のように表します．

これを，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**成分表示**といいます．



ベクトルの成分表示

A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2) のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\cdots\text{横移動量} \\ \cdots\text{縦移動量}\end{matrix}$

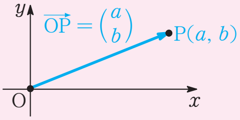


上図で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ と等しいベクトルで，原点 O を始点とするものを $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とすると，P(5, 2) ですね．

原点を始点とするベクトルの成分

ベクトルの始点を原点にとるとき

「ベクトルの成分」と「終点の座標」は同じ数で表される．



語記サポ 学校教科書では，（諸般のオトナの事情により）ベクトルを「(5, 2)」のように成分を横に並べて書きますが，上記のように縦に並べるのが本式であり，今後**断然有利**となります！■

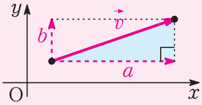
成分表示と相等

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x', \\ y = y'. \end{cases}$$

縦&横の移動量が一致
i.e. x 成分どうし，y 成分どうしが等しい

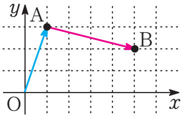
成分表示と大きさ

$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ のとき，$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$．…三平方の定理より



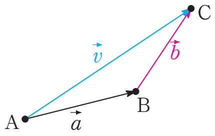
例 O を原点とする xy 平面上で，A(1, 3)，B(5, 2) のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.\quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}.$$



2 ベクトルの演算 Ⅱ+B 2

1 ベクトルの加法・減法



ベクトルどうしの**加法**（足し算）を，次のように定めます：

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

これは，ベクトルが「移動」のようなものだと知っていれば

「A から B への移動」に，「B から C への移動」を継ぎ足すと，
「A から C への移動」になる

のように，自然に理解できますね．

この関係は，図のように $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$ をとると，「$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$」とも書けます．

ベクトルどうしの**減法**（引き算）は，数の場合の加法と減法の関係と同様，次のように行います：

$\overrightarrow{AB}+\boxed{\overrightarrow{BC}}=\overrightarrow{AC}$.

$7+\boxed{3}=10$.

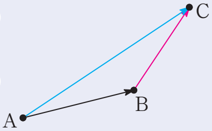
$10-7=\boxed{3}$. 7 に，あと何を加えたら 10 になるか？それは$\boxed{3}$である．

$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boxed{\overrightarrow{BC}}$. $\overrightarrow{AB}$ に，あと何を加えたら $\overrightarrow{AC}$ になるか？それは$\boxed{\overrightarrow{BC}}$である．

これらを一応理解したら，次のように覚えてしまいましょう．赤字がポイントです！

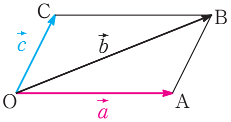
加法：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. 「B」はどんな点でも OK
"尻取り"

減法：$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. 「A」はどんな点でも OK
始点統一



例題 5 2 a 加法と減法 根底 実戦

[→演習問題 5 6 1]



右図の平行四辺形 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}, \vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおく．

(1) $\vec{b}$ を $\vec{a}, \vec{c}$ で表せ． (2) $\vec{c}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ．

方針 上記の"尻取り"，"始点統一"の形ができるよう工夫します．その際，「位置」がズレていてもベクトルとしては等しいもの（**解答**の赤下線部）を利用しましょう．

解答 (1) $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$
$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ "尻取り"
$=\overrightarrow{OA}+\underline{\overrightarrow{OC}}=\vec{a}+\vec{c}$.//

別解 $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$
$=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}$ "尻取り"
$=\overrightarrow{OC}+\underline{\overrightarrow{OA}}=\vec{c}+\vec{a}$.//

参考 この 2 通りの結果を比べると，ベクトルの加法について

$\vec{a}+\vec{c}=\vec{c}+\vec{a}$ 「交換法則」という

が成り立つことがわかりますね．つまり，ベクトルどうしの足し算は，数の場合と同様に，順序を替えてもかまわないのです．■

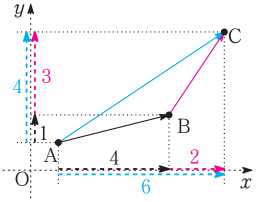
(2) $\vec{c}=\overrightarrow{OC}=\underline{\overrightarrow{AB}}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$.//
始点統一

注 (1)(2)の結果が，途中式を丁寧に書かずにスパッと見抜けるようにしましょう．

【成分表示の場合】

成分表示されたベクトルどうしの加法は，右図からわかる通り，x 成分どうし，y 成分どうしを足せば OK です．減法も同様です．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2\\1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}.\\ \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-4\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$



成分による加法，減法

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}.\qquad \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}.$$

x 成分どうし，y 成分どうしを足し引きすればよい

成分表示されたベクトルの加法の規則によれば，ベクトルの加法について次の法則が成り立つことが容易に示されます：

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$．$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$（どちらも「$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$」と書く）．

数を表す普通の文字式と同じ規則だと思っておけば大丈夫ですね．

2　零ベクトル，逆ベクトル

「れい」とも読みます

$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ や $\overrightarrow{\mathrm{BB}}$ のように，始点と終点が同じであるベクトル，つまり “移動なき移動” のことを**零**（ゼロ）**ベクトル**といい，「$\vec{0}$」で表します．

$\vec{0}$ の「大きさ」は，$|\vec{0}|=0$ です．また，$\vec{0}$ の「向き」は [1] 考えません．

注 [1]：$\vec{0}$ の「向き」は，自分で好きに決めてよいとする立場**も**あります．■

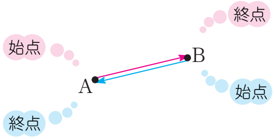
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\vec{0}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

“尻取り”

$7+0=7$ とそっくり

これを見ると $\vec{0}$ は数 0 と同じように振舞うことがわかりますね．

次に，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の始点と終点を入れ替えたベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を考えると



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}.$$

“尻取り”

$7+(-7)=0$ とそっくり

-7　　7

このベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**逆ベクトル**といい，「$-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$」と表します．

数 7 に対する -7 とそっくり

一般に，$\vec{a}$ と大きさが等しく向きが反対であるベクトルを，$\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\vec{a}$ と表します．

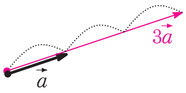
【成分表示の場合】

$$\text{零ベクトル：}\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.\quad \vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\text{の逆ベクトルは，}-\vec{a}=\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}.$$

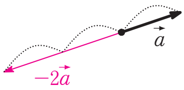
3 ベクトルの実数倍

ベクトル $\vec{a}$ $(\neq \vec{0})$ の実数 k 倍：「$k\vec{a}$」を，次のように定めます．

〔$k>0$ の場合〕 例：$k=3$ **〔$k<0$ の場合〕** 例：$k=-2$



$\vec{a}$ と同じ向きで大きさは 3 倍



$\vec{a}$ と反対向きで大きさは $|-2|=2$ 倍

「ベクトルは移動のようなもの」という観点から自然に頭に入るでしょ（笑）．

補足 $k=0$ の場合は，$k\vec{a}=0\vec{a}=\vec{0}$（零ベクトル）となります．■

「向きが同じ」または「向きが反対」のときに限って「平行」というのでしたね．よって，一般に次の関係が成り立ちます：

平行と実数倍

$\vec{0}$ でない 2 ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について，

「$\vec{b}=k\vec{a}$ $(k \in \mathbb{R})$ と表せる」$\Longleftrightarrow \vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}$.

$\vec{a}=k\vec{b}$ でも OK

注 「ベクトルの平行」の表し方は，「実数倍の関係」だけではありません！［→例題 5 8 d (3)］■

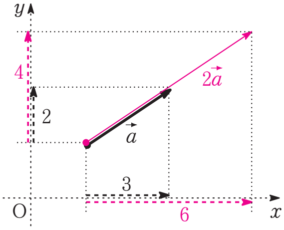
一般に，実数倍したベクトルの大きさは，次の通りです．

$|k\vec{a}|=|k|\,|\vec{a}|$. $|3\vec{a}|=3|\vec{a}|$, $|-2\vec{a}|=2|\vec{a}|$（$k<0$ のときに注意）

【成分表示の場合】

成分表示されたベクトル $\vec{a}$ を実数 k 倍した $k\vec{a}$ は，右の例からわかる通り，x, y 成分をそれぞれ k 倍すれば OK です．

また，$k\vec{a}$ の大きさは，$\vec{a}$ の大きさをもとに求まります．



成分による実数倍・その大きさ

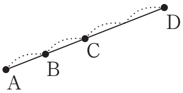
$$k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}. \quad \left|k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|=|k|\sqrt{x^2+y^2}.$$

k の符号に注意

例題 5 2 b ベクトルの実数倍 根底 実戦

［→演習問題 5 6 1］

右図のように点 A，B，C，D があるとき，次の□に入る実数を答えよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\square\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\square\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{CC}}=\square\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

方針 向きが同じか反対か？大きさの比はどうなっているか？以上の 2 つを考えます．

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ向きで，大きさは 4 倍．よって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boxed{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. //

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と反対向きで，大きさは $\frac{3}{2}$ 倍．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\boxed{-\frac{3}{2}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. //

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CC}}=\vec{0}=\boxed{0}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. //

解説 (1)の $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，および(2)の $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はそれぞれ平行です．だからこそ，「実数倍」という関係が得られます．

例題 5 2 C 成分表示と大きさ

根底 実戦　　[→演習問題 5 6 2]

xy 平面上で，2 点 A$(-4a, a)$，B$(4a, 7a)$（a は実数）の距離を求めよ．

方針　「2 点の距離」ではなく，「ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさ」と考えた方がトクします．

解答

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}4a-(-4a)\\7a-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8a\\6a\end{pmatrix}=2a\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}.$$

2a をくくり出す

$$\therefore\ \mathrm{AB}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=|2a|\left|\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right|$$

絶対値に注意！

$$=|2a|\sqrt{4^2+3^2}$$

$$=2\,|a|\cdot5=10\,|a|.\ /\!/$$

解説　2 点間の距離の公式より，早く片付きます．

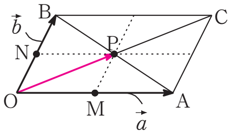
参考　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の逆ベクトル[→2] $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と反対向きで大きさは等しい（1 倍）ですから，$-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ です（同様に $1\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$）．また

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}+(-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}}_{\text{“尻取り”}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}.\quad \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}).$$

これは，“普通の文字式” と同じ感覚でイケます．とくに覚えようとしなくても平気です（笑）．

4 実数倍と演算法則

例　右図の平行四辺形 OACB において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく．対角線の交点を P として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表しましょう．



P が対角線 OC の中点であることを利用すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

また，OA，OB の中点をそれぞれ M，N とすると四角形 OMPN が平行四辺形であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}.$$

この結果から，$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ が成り立つことがわかります．一般に，次の法則が成り立ちます：

ベクトルと実数の演算法則

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}.$$
$k(a+b)=ka+kb$ と同様

$$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}.$$
$(k+l)a=ka+la$ と同様

$$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}.$$
$k(la)=(kl)a$ と同様

成分表示されたベクトルの加法，減法，実数倍の演算規則によれば，第 1 式は次のように示されます．

第 2，3 式も同様

$\vec{a}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ として，

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k(x_1+x_2)\\k(y_1+y_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx_1\\ky_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}kx_2\\ky_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=k\vec{a}+k\vec{b}.$$

注　これらの法則も，中学以来学んできた普通の文字式における演算法則と全く同じですから，特に覚えようとしなくても自然に使えます（笑）．

3　ベクトルの分解

1　分解の一意性（平面）

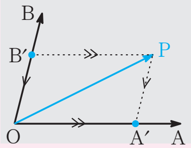
ベクトルの分解（平面）　**原理**

3 点 O，A，B が共線でないとき 1)，平面 OAB 上の任意の点 P に対して

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\ \cdots①$$

$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ に“分解”

を満たす実数の組 $(s,\ t)$ が**存在**し，しかもそれは**一意的**である．



〔証明〕　点 P に対し，右上図のように P を通る平行線を引くと交点 A′，B′ が 1 つに定まり，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}.\ \cdots②$$

また，A′，B′ に対し，

$$\overrightarrow{OA'}=s\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB'}=t\overrightarrow{OB}\ \cdots③$$

となる $s,\ t$ が 1 つに定まる．

③を②へ代入すると①を得るから，P に対して①を満たす $(s,\ t)$ が 1 つに定まる．□

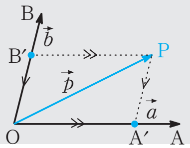
補足　「1 つに定まる」とは「ただ 1 つだけ存在する」ということ．

「ベクトル」には位置という概念がないので，$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB},\ \vec{p}=\overrightarrow{OP}$ とおき，少し抽象化して次のように述べることもできます：

2)平行でない2 ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が決定する平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ に対し，

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

を満たす実数の対 $(s,\ t)$ が**存在**し，しかもそれは**一意的**である．

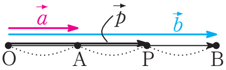


注　1)2)：この「前提条件」への言及の仕方として，他に「$\vec{a},\ \vec{b}$ が**一次独立**（or **線型独立**）」という言い回しもあります．2) は，「$\vec{0}$ でなく平行でない」と書く人が多いです[→5 6 **直前のコラム**]．

注意！　1)2)：この前提が満たされていない場合，右図のように，

$$㋐\vec{p}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\ ㋑\vec{p}=2\vec{a}+0\vec{b},\ ㋒\vec{p}=0\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

など，複数の異なる分解法ができてしまいます．■



（P は直線 AB 上）

上記で考えた「存在」と「一意」のうち，後者のみを考えた次の結論も覚えておきたいです：

“係数比較”　**原理**

$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ とする．このとき，$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}\Longrightarrow s=s',\ t=t'$.

これは，上記 分解の一意性 から自明ですが，別の角度から証明する練習もしておきましょう．

例題 5 3 a　分解の一意性（平面）　根底 実戦　[→演習問題 5 6 8]

$s,\ t,\ s',\ t'$ は実数とし，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}\ \cdots①$ とする．$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}\ \cdots②$ のとき，$s=s',\ t=t'$ が成り立つことを背理法で示せ．

方針　背理法を用い，①と矛盾する結論を導くことを目指します．

解答　②より

$$(s-s')\vec{a}=(t'-t)\vec{b}.$$

$\vec{a},\ \vec{b}$ をまとめる

仮に $s-s'\neq 0$ としたら，

$$\vec{a}=\frac{t'-t}{s-s'}\vec{b}.\ \therefore\ \vec{a}\parallel\vec{b}.$$

これは①に反す．よって，$s-s'=0$，i.e. $s=s'$.

同様にして，$t=t'$．□

解説　証明すべき命題「＝である」は明快な主張ですが，「逆数が存在しない」という否定表現でもあるので，それを否定した「逆数が存在する」という明快な仮定を設定しました．

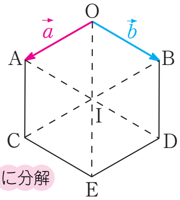
注　本問は，Ⅰ+A**例題**1 9 o「有理数と無理数」，Ⅱ+B**例題**1 9 b「実数と虚数」とほぼ同内容でした．これらの共通な性質について，[→**演習問題**5 6 8]

例題 5 3 b　正六角形とベクトルの分解

根底　実戦　定期　[→**演習問題**5 6 1]

右の正六角形において，次の各ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$



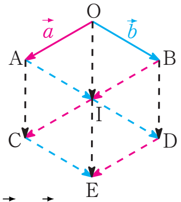
着眼　$\vec{a}, \vec{b}$ と等しい（向きと大きさが等しい）ベクトルが，位置をズラしてあちこちにありますね．（$\vec{a}$：赤色，$\vec{b}$：青色）

方針　それらを用いて，始点から終点までの"移動"を表すことを目指します．

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AI}}$

$= \vec{a} + \vec{b}.$ //

注　これと同じベクトルもあちこちにあります（黒破線）．



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OI}}$

$= \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b}.$ //

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CE}}$　和に分解

$= \overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{b}.$ //

別解　$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$　差に分解 $^{1)}$

$= 2\overrightarrow{\mathrm{OI}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$= 2(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = \vec{a} + 2\vec{b}.$ //

重要　1)：このように差に分解して始点を変える手法は定番です．合言葉：

始点変えたきゃ差にばらせ

2　成分表示の一意性

5 1 5 で論じた「ベクトルの成分表示」を，前項の知識をもとに振り返ってみましょう．

例　右図のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は，"右向き"の単位ベクトル $\vec{e_1}$，"上向き"の単位ベクトル $\vec{e_2}$ を用いて

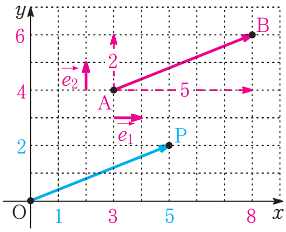
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 5\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$$

と"分解"できます．このとき**一意的に決まる**係数 5, 2 によって

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

x 成分
y 成分

のように表したものがベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**成分表示**です．



注　もちろん，右上図において $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分表示も $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ です．■

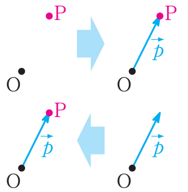
けっきょく成分表示とは，「横方向に $\vec{e_1}$ 何個分動いたか」と「縦方向に $\vec{e_2}$ 何個分動いたか」によってベクトルを表す方法です．5 1 5 で述べたのといっしょですね（笑）．（もちろん係数が自然数でなくても考え方は同じです．）

語記サポ　$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ のことを，この座標平面における**基本ベクトル**といいます．それぞれの成分表示は $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ です．

4 位置ベクトル

Ⅱ+B 2

1 位置ベクトルとは

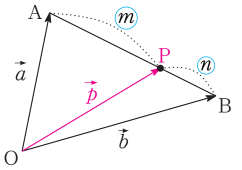


ベクトルの始点を 1 点 O に統一し，$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ とおくと，次のような 1 対 1 対応が得られます：

$$\text{終点 P の位置} \underset{1\ 対\ 1}{\longleftrightarrow} \text{ベクトル}\ \vec{p}$$

このとき，$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ は点 P の位置を表すので「点 P の**位置ベクトル**」と呼ばれ，$\mathrm{P}(\vec{p})$ のように表します．

2 内分点



P が線分 AB を $m:n$ $(m,\ n$ は正$)$ に**内分**するとき，始点 O から P への“移動”を考えると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}).\end{aligned}$$

これを整理すると，下左の公式が成り立ちます．これは，O を始点とする位置ベクトルを上図のようにとると下右のようにも書けます．

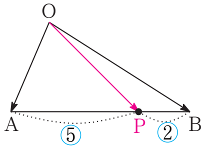
内分点の位置ベクトル **定理** P が線分 AB を $m:n$ に内分するとき，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$

始点は O に統一

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}.$$

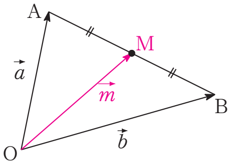
始点が統一されていることを忘れずに！



例 P が線分 AB を 5 : 2 に内分するとき，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}}{5+2}=\frac{2\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}}{7}.\quad \text{i.e.}\ \ \vec{p}=\frac{2\vec{a}+5\vec{b}}{7}.$$

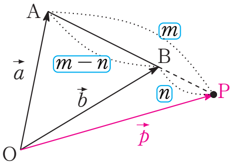
上記の内分点において，とくに $m:n=1:1$ の場合を考えたのが次です：



中点の位置ベクトル **定理** M が線分 AB の**中点**であるとき，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}.\qquad \vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

始点が統一されていることを忘れずに！



参考 P が線分 AB を $m:n$ $(m>n>0)$ に**外分**するとき，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m-n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}).\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OP}=\frac{-n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m-n}.$$

始点が統一されていることを忘れずに！

この結果は，$n>m>0$ のときも同様に成り立ちます．要するに，「外分」のときは，「内分点」の公式における $m,\ n$ の一方をマイナスにすれば OK です．

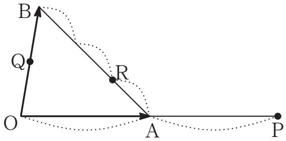
例題 5 4 a 位置ベクトル・平行 根底 実戦

[→演習問題 5 6 3]

△OAB があり，OA を 2：1 に外分する点を P，OB の中点を Q，AB を 1：2 に内分する点を R とする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ として，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

(2) 3 点 P，Q，R は同一直線上にあることを示せ．



方針 (2) P を始点とした 2 ベクトル：$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めて比較します．

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$.//

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{2\vec{a}+1\vec{b}}{1+2}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}.//$$

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=\frac{1}{2}\vec{b}-2\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{b}-4\vec{a}).\ \cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}-2\vec{a}=\frac{1}{3}(\vec{b}-4\vec{a}).\ \cdots ②$$

①②より，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ だから，$\mathrm{PQ}/\!/\mathrm{PR}$.

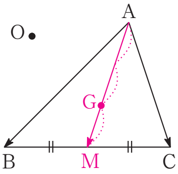
よって，3 点 P, Q, R は同一直線上にある．□

参考 (2)「メネラウスの定理（の逆）」[→ I+A 5 8 2] を用いても示せますが，ここは「ベクトルを利用する練習」に専念してくださいね．

注 5 2 3 注でも述べた通り，「ベクトルの平行」はいつでも必ず「実数倍の関係」と表す訳ではありませんよ！[→例題 5 8 d (3)]

3 重心

△ABC の重心 G の位置ベクトルについて考えましょう．G が中線 AM を 2：1 に内分することを用います．[→ I+A 5 6 3]



- まず，1 頂点 A を始点として考えます．

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}.$$
始点は A に統一

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}.$$

- この等式において，始点を任意の点 O に変えます．

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3}.$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}.$$
始点は O に統一

これを公式として覚えます：

重心の位置ベクトル **定理**

△ABC の重心を G とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$.

始点は O に統一．
「O」は任意の点で OK.

参考 2 点 A，B を結ぶ線分 AB の**中点**の位置ベクトルは，その 2 点の位置ベクトルの相加平均の形でした [→ 2]．それと同様に，3 点 A，B，C からなる △ABC の**重心**の位置ベクトルは，その 3 点の位置ベクトルの相加平均の形になっていますね．

5 ベクトルと図形

1 位置ベクトルの計算

例題 5 5 a 位置ベクトルの計算 根底 実戦 定期 [→演習問題 5 6 2]

平行四辺形 OACB がある．△OAC の重心を G，辺 BC の中点を M とし，線分 GM を 2：3 に内分する点を P とする．1) O に関する位置ベクトルを A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) 2) として，以下に答えよ．

(1) $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

(2) 3 点 O, C, P の位置関係を述べよ．

(3) 3 点 A, B, G の位置関係を述べよ．

注 2)：$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とおいた訳です．

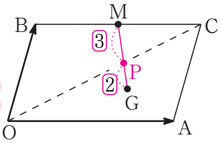
方針 平面ベクトルの超スタンダードな方針：

∘始点を具体的な定点に統一する．

∘平行でない 2 ベクトルを用いて他を表す．

今後も多用しますよ！

解答 (1) G は △OAC の重心だから，



$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

$$=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{3}$$ 始点は統一

$$=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b}).\ // \cdots①$$

注 重心公式は，三角形の 1 頂点を始点にすると，分子の 3 ベクトルの 1 つが $\vec{0}$ となります．■

M は辺 BC の中点だから，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$$ 始点は統一

$$=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}(\vec{a}+2\vec{b}).\ //$$

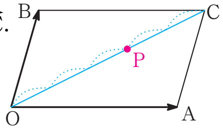
P は線分 GM を 2：3 に内分するから，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3\overrightarrow{OG}+2\overrightarrow{OM}}{2+3}$$ 始点は統一

$$=\frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}+2\vec{b}}{5}=\frac{3}{5}(\vec{a}+\vec{b}).\ // \cdots②$$

(2) ②より $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OC}$．

よって，P は線分 OC を 3：2 に内分する．//

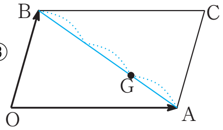


注 「C は線分 OP を 5：2 に外分する」などと答えることもできますね．

(3) ①より，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2}.\ \cdots③$$

よって，G は線分 AB を 1：2 に内分する．//



解説 内分点公式の “逆読み” を行いました．③の右辺は，線分 AB を 1：2 に内分する点 Q の位置ベクトル $\overrightarrow{OQ}$．それと $\overrightarrow{OG}$ が等しいので，2 点 G，Q は一致します．■

語記サポ 1)：筆者は普段，「O を始点とする」とか「O を基準点とする」と述べます．前者は不正確な表現ですが[→ 5 1 1 言い訳]，わかりやすく簡潔なので．

例題 5 5 b 位置ベクトルの計算（成分表示） 根底 実戦 定期 [→演習問題 5 6 2]

座標平面上に 3 点 A(1, 1)，B(4, 2)，C(3, 7) がある．次の点の座標を求めよ．

(1) 平行四辺形 ABDC の頂点 D

(2) 平行四辺形 ABCE の頂点 E

(3) ∠CAB の二等分線と直線 BC の交点 P

方針 問われているのは「点の座標」ですが，「ベクトル」を用いて解答します．

重要 なぜなら，「ベクトル」においては「和」「差」「実数倍」という**演算**が行えるからです！一方，点の座標にはそうした機能は一切ありません．

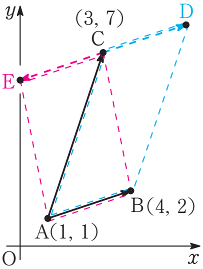
解答 (1) **語記サポ** 「平行四辺形ABDC」と言ったら，4 頂点はこの順に並んでいるのが約束です ((2)も同様)．■

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ より

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}$

$$=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}.$$

i.e. D(6, 8).//



解説 ベクトル $\overrightarrow{O\triangle}$ の成分は，点△の座標と同じ数で表されます．

(2) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ より

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}.$$

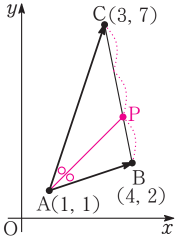
i.e. E(0, 6).//

(3) **方針** 「角の二等分線の性質」を使いたいので，辺 AB，AC の長さを求めましょう．その際，「ベクトルの大きさ」として計算すること．■

$$|\overrightarrow{AB}|=\left|\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{10},$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\left|\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right|=2\sqrt{10}.$$



$\therefore$ AB : AC = 1 : 2.

よって，P は線分 BC を 1 : 2 に内分するから

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2\overrightarrow{OB}+1\cdot\overrightarrow{OC}}{1+2}\ ^{1)}$$ 始点は統一

$$=\frac{1}{3}\left\{2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\right\}.\ ^{2)}$$

i.e. $P\left(\frac{11}{3},\ \frac{11}{3}\right)$.//

注 1)：$\overrightarrow{AP}$ を求めたら遠回り．

2)：ベクトル計算はここで止め，座標を答える．

2 共線条件

語記サポ 「共線」とは，3 個 (以上) の点が共通な直線上にあるという意味．■

次の定理**全体**を，証明過程込みの**セットで**完璧に頭に叩（たた）き込んでください！

共線条件 **定理** A，B は異なる 2 点

点 P が，直線 AB上にあるための条件は，ある実数 t を用いて次のように表せること：

❶ **単純形**
(始点を含む共線)

$$\overrightarrow{AP}=t\underset{\text{直線 AB の方向ベクトル}}{\overrightarrow{AB}}.$$ 単なるベクトルの平行条件

❷ **変数集約形**
(始点を含まない共線)

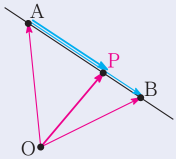
$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$$ $\overrightarrow{OP}$ を和に分解

$$=\overrightarrow{OA}+t\underset{\text{直線 AB の方向ベクトル}}{\overrightarrow{AB}}.$$ t が**集約**

❸ **始点統一形**
(始点を含まない共線)

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$ 始点変えたきゃ差にばらせ

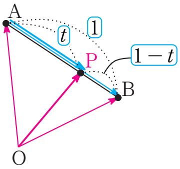
$$=\underbrace{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}}_{\text{和}\ =1}.$$ 始点が**統一**



(O は任意の点)

注 この 3 つのスタイルを状況次第で使い分けます．

番号❶〜❸およびその後に記した「形」の名称は筆者独自のものですが，今後各所の解説で使いますので覚えておいてください．



参考 $0<t<1$ のとき，P は A と B の間にあり，P は AB を $t:(1-t)$ に内分します．❸：$\overrightarrow{OP}=\dfrac{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}}{t+(1-t)}$ は，内分点公式そのものですね：

3 交点の位置ベクトル

共線条件と分解の一意性（平面）を用いて，交点の位置ベクトルを求める練習をします．ベクトル学習前半のハイライトです！使用する基本原理を再掲しておきます：

共線条件 **定理** A，B は異なる 2 点

点 P が，直線 AB上にあるための条件は，<u>ある実数</u> t を用いて次のように表せること：

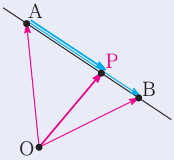
❶ **単純形** $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$. 始点を含む共線

❷ **変数集約形** $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \underline{t}\,\overrightarrow{AB}$.

❸ **始点統一形** $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB}$.

和 ＝ 1

始点を含まない共線



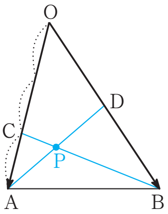
“係数比較”

$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ とする．このとき，$s\vec{a} + t\vec{b} = s'\vec{a} + t'\vec{b} \Longrightarrow s = s',\, t = t'$.

例題 5 5 C 交点の位置ベクトル・詳説 重要度⇧⇧ 根底 実戦 典型 [→演習問題 5 6 4]

△OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とする．2 直線 AD，BC の交点を P とし，2 直線 OP，AB の交点を Q とする．次の各ベクトルを $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ で表せ．

(1) $\overrightarrow{OP}$　　(2) $\overrightarrow{OQ}$



注 本問の目的が，上記 2 つの基本を<u>正しく用いる練習</u>であることを忘れずに．

解答 (1) ∘ P は AD 上にあるから 正しくは直線 AD

$$\overrightarrow{OP} = (\overset{1)}{1-s})\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OD} \text{ ❸}$$
$$= (1-s)\vec{a} + s\cdot\frac{1}{2}\vec{b} \cdots ① \text{ と表せる.}^{2)}$$

∘ P は CB 上 3) にあるから

$$\overrightarrow{OP} = (1\overset{4)}{-}t)\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OB} \text{ ❸}$$
$$= (1-t)\cdot\frac{2}{3}\vec{a} + t\vec{b} \cdots ② \text{とも表せる.}$$

∘ 3 点 O，A，B は共線でない 5) から，①②より

$$1 - s = \frac{2}{3}(1-t),\ \frac{s}{2} = t. \quad \text{“係数比較”}$$
$$3 - 3s = 2 - 2t,\ s = 2t.$$
$$\therefore 3 - 3s = 2 - s.\ \therefore\ s = \frac{1}{2}.$$

これと①より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(2\vec{a} + \vec{b}).\,/\!/$$

目分量でチェック！

解説 共線条件の 3 つの形のうち，後で“係数比較”することを**先読み**して，❸「始点統一形」を選びました．

1)：次の行で短く「$\vec{a}$」と表せる方に，多項式の係数「$1-s$」を付けるよう配慮しました．

2)：この「s」は「不特定な実数」です．「表せる」とか「ある s」などと述べてそのニュアンスを伝えてください．なお，「s は実数」は当然のこととして明言しなくても許される気がします．

3)：この後の式が $\vec{a} \to \vec{b}$ の順に並ぶよう配慮しています．これも，**先が読めていて**初めて可能です．

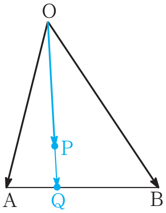
4)：この係数の配置は，1) で述べたことに反していますが，片方の方程式が「単項式 ＝ 単項式」の形になると 1 文字消去が楽なので．

本問をスマートに解くには，全般に**先読み**が必要です．[→例題 5 12 i 後のコラム]

本問では，1) で述べた配慮は結果として無用でしたね（苦笑）．

5)：分解の一意性・“係数比較”を用いる「前提条件」へ言及しています．「$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$」，「$\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立（線型独立）」という言い方もあります．[→ 5 6 直前のコラム]

(2) **方針**　既知となったPの位置ベクトルをもとに，Qについて考えます．これも，共線条件2回→“係数比較”→連立方程式の流れで解けますが，**賢い計算**を心掛けて！■



∘ QはOP上にあるから，(1)より

$\overrightarrow{OQ} /\!/ \overrightarrow{OP} /\!/ 2\vec{a}+\vec{b}$. よって，

$\overrightarrow{OQ}=k(2\vec{a}+\vec{b})$ …③ と表せる．❶ [6]

∘ QはAB上にあるから

$$\overrightarrow{OQ}=(1-x)\underbrace{\overrightarrow{OA}}_{\vec{a}}+x\underbrace{\overrightarrow{OB}}_{\vec{b}} \quad \cdots④ \ ❸$$

とも表せる．

∘ 3点O, A, Bは共線でない [7] から，③④より

$$\begin{cases} 2k=1-x, \\ k=x. \end{cases}$$ 辺々加えると

$$2k+k=1. \therefore\ k=\frac{1}{3}.$$

これと③より　　目分量でチェック！

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})./\!/$$

注 [6]：もちろん $\overrightarrow{OQ}=l\overrightarrow{OP}=l\cdot\cancel{\frac{1}{4}}(2\vec{a}+\vec{b})$ と表すこともできます．しかし，ベクトル $\overrightarrow{OP}$ の「向き」「大きさ」のうち，**今利用するべき情報は「向き」だけ**です．前記のようにわざわざ分数係数を持ちだすのは，「ベクトルとは何か？」に対する理解の浅い人がよくやる典型的な下手解答．**解答**のやり方が**賢い計算**です．ただし，線分比 OP:PQ などが問われているなら，$\overrightarrow{OQ}=l\overrightarrow{OP}$ とおいて「l」の値から即座に答えを得るという手もありですが．

注意！　世間では，2本の赤線で挟まれた部分を省き，③の後，

『QはAB上にあるから係数の和は1』

としてしまう誤答が散見されます．

共線条件の公式❸は，「係数の和 $=1$と表せる」と主張しているだけであり，「必ず係数の和 $=1$となる」ことまでは保証してはくれません．「3点O，A，Bは共線でない」という前提を欠いている場合，例えば 5 3 1 注意！のように，㋐のような「係数の和 $=1$」の形以外に，㋑㋒のようなそうではない分解もできちゃいます．**この前提条件への言及は不可欠です．**

残念ながら，学校教科書にもこの誤答が載っています．まあ本問では「前提条件」が満たされてるのは自明だから，ということでなあなあに扱われているのでしょう．とても残念です．

別解　$\overrightarrow{OQ}$ の求め方として，次も有名です：

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}(2\vec{a}+\vec{b})=\frac{3}{4}\cdot\underbrace{\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2}}_{\overrightarrow{OQ'}}.$$

ここに，Q′はABを1 : 2に内分する点．…⑤

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OQ'}. \quad \cdots⑥$$

⑤よりQ′はAB上．⑥よりQ′はOP上．

よって，Q′はABとOPの交点だからQと一致する．∴ $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b}).$//

「Q′」という，交点Qとは別に定義した点を用いる高級な手法（同一法）です[→ I+A 5 1 5 注]．正しく使えている生徒は，あまり見たことがありません（笑）．

補足 [7]：(1)で一度言及しているので，(2)では書かなくても許されるかも．

参考　(1)は，△OADと直線CBに注目してメネラウスの定理[→ I+A 5 8 2]を用いると，次のようにカンタンに解けてしまいます：

$$\frac{OC}{CA}\cdot\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DB}{BO}=1.$$

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{AP}{PD}\cdot\frac{1}{2}=1. \therefore\ AP:PD=1:1.$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}}{2}=\frac{\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}.$$

でも，**本問の目的はベクトルの基礎の理解です．**この話題は，あくまでも“参考”．■

本問は，解くのはとても簡単ですが，ベクトルの**深い理解**につながる重要な心得の宝庫でした．

例題 5 5 d 交点の位置ベクトル 根底 実戦 典型 [→演習問題 5 6 5]

△ABC において，辺 AB の中点を D，辺 BC を 3 : 1 に内分する点を E，辺 CA を 1 : 2 に内分する点を F とする．

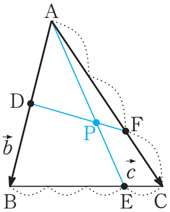
⑴ 2 直線 DF，AE の交点を P とする．線分比 AP : PE を求めよ．

⑵ 2 直線 BP，AC の交点を Q とする．線分比 AQ : QC を求めよ．

着眼 問題文には「ベクトル」の「べ」の字もないですが，前問の経験からベクトルが有効活用できることがわかります．「メネラウスの定理」などによる初等幾何的解答も可能ですが，発想段階で要する時間も入れると，ベクトルの方が早い気がします．

方針 頂点 A を含んだ「AE 上」という共線条件があるので，次の方針がベストでしょう：

- ○始点を頂点 A に統一する．
- ○2 ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$を用いて他を表す．



解答 $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$ とおく．

⑴ ○P は DF 上にあるから

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AF} \text{ ❸}$$

$$=(1-t)\frac{1}{2}\vec{b}+t\cdot\frac{2}{3}\vec{c}$$

…① と表せる．

○E は BC を 3 : 1 に内分するから

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1\cdot\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3+1}.$$

P は AE 上にあるから，

$\overrightarrow{AP}\,/\!/\,\overrightarrow{AE}\,/\!/\,\vec{b}+3\vec{c}$. よって

線分比を求めるので $x\overrightarrow{AP}$ でも可

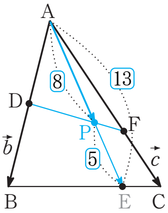
$\overrightarrow{AP}=k(\vec{b}+3\vec{c})$ …② とも表せる．

○3 点 A，B，C は共線でないから，①②より

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(1-t)=k \\ \frac{2}{3}t=3k.\end{cases} \quad \begin{cases}1-t=2k \\ t=\frac{9}{2}k.\end{cases}$$

辺々加えて，$1=2k+\frac{9}{2}k$. ∴ $k=\frac{2}{13}$.

これと②より



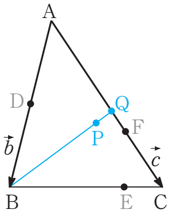
$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{13}(\vec{b}+3\vec{c})$$

$$=\frac{8}{13}\cdot\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{3+1}$$

$$=\frac{8}{13}\overrightarrow{AE}.$$

よって，AP : PE = 8 : 5.//

結果を目分量でチェック



⑵ **注** マジメ過ぎるくらいマジメな解答をしておきます．実際の試験では，多少手を抜いて楽しても満点かもしれませんが (笑)． ■

○Q は BP 上にあるから

$$\overrightarrow{AQ}=(1-u)\overrightarrow{AB}+u\overrightarrow{AP} \text{ ❸ } ^{1)}$$

$$=(1-u)\vec{b}+u\cdot\frac{2}{13}(\vec{b}+3\vec{c}) \quad \cdots③ \ ^{2)}$$

と表せる．

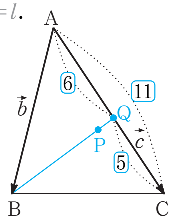
○Q は AC 上にあり，

3) $\overrightarrow{AQ}=0\vec{b}+l\vec{c}$ …④ とも表せる．

○3 点 A，B，C は共線でないから，③④より

$$1-u+\frac{2}{13}u=0,\ \frac{6}{13}u=l.$$

$$\therefore u=\frac{13}{11}.$$



これと③より

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{13}{11}\cdot\frac{2}{13}\cdot3\vec{c}=\frac{6}{11}\vec{c}.$$

よって，AQ : QC = 6 : 5.//

注 1)：次行で長い式になる $\overrightarrow{AP}$ の係数を，単項式 u としました．

2)：$\vec{b}$ の係数は，この段階で 1 つにまとめるのは下手．係数比較する際に抜き出して書きます．

この $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{13}(\vec{b}+3\vec{c})$ を $\vec{b}+3\vec{c}$ に変えることはできませんよ．もちろん (笑)．

3)：ここからの 3 行で薄字で書いた部分は通常書かずにサボります．でも，「前提条件」への言及は省略不可です．

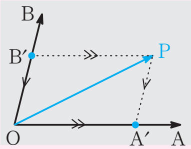
4 点の存在範囲

ベクトルの分解（平面）と 1 対 1 対応 **原理**

3 点 O，A，B が共線でないとき，平面 OAB 上の任意の点 P について，

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$（$s,t$ は実数）と表せる．このとき，次が成り立つ：

点 P $\underset{1\,対\,1}{\longleftrightarrow}$ (s,t)．

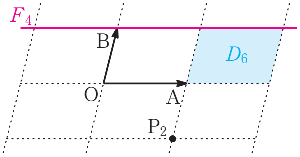


5 3 1 では点 P →(s,t) への対応が一意的であることを述べましたが，逆に，(s,t) →点 P の対応が一意的であることは当然ですね．よって，上記の「1 対 1 対応」が得られるのです．

例題 5 5 e 点 P と (s,t) の対応（その 1）

根底 実戦 [→演習問題 5 6 7]

3 点 O，A，B は共線でないとする．平面 OAB 上の任意の点 P について，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$（$s,t$ は実数）が成り立つとする．以下の問いに対して，結果のみ答えよ．



（平行線どうしは全て等間隔）

(1) $(s,t)=(2,1)$ のときの点 $P=P_1$ を図に書き込め．

(2) 図の点 $P=P_2$ に対応する (s,t) を答えよ．

(3) $s=0$ のとき，点 P の軌跡 F_3 を図に書き込め．

(4) 点 P が図の直線 F_4 上にあるための s,t に関する条件を答えよ．

(5) $0\leq s\leq 1$ のとき，点 P の存在領域 D_5 を図に書き込め．

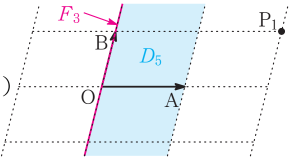
(6) 点 P が図の領域 D_6 内（境界含む）にあるための s,t に関する条件を答えよ．

重要 上記 **1 対 1 対応**により，「(s,t) →点 P」の対応がわかれば，逆向きの「点 P →(s,t)」の対応も得られたことになります．つまり，(1)(3)(5) と (2)(4)(6) は，まったく同様に考えれば OK です．

解答 (1)(3)(5)

右図の通り．

（D_5 は境界含む．）



(2) $(s,t)=(1,-1)$． (4) $t=1$．

(6) $1\leq s\leq 2,\ 0\leq t\leq 1$．

解説 (1) O から P_1 への移動は，$\overrightarrow{OA}$ の 2 倍と $\overrightarrow{OB}$ の 1 倍です．

(2) O から P_2 への移動は，$\overrightarrow{OA}$ の 1 倍と $\overrightarrow{OB}$ の -1 倍です．

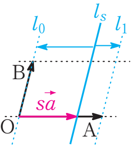
(3) $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OB}$ より，P は直線 OB を描きます．

(4) P が F_4 上のとき，O から P への移動は，

$\overrightarrow{OP}=1\cdot\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OA}$（$s$ は任意）です．

(5) s,t を 1 個ずつ動かします．いわゆる「**1 文字固定**」の考え方です．

s を固定して t を動かすと，P は右図の直線 l_s（$/\!/\ \overrightarrow{OB}$）を描きます（右図では $s=0.7$ くらい）．



s を 0 から 1 まで動かすと，l_s は図の l_0 と l_1 で挟まれた領域を描きます．

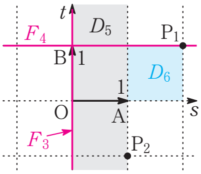
(6) (5)と同様です．OB と平行な 2 直線に挟まれた部分が「$1\leq s\leq 2$」で，OA と平行な 2 直線に挟まれた部分が「$0\leq t\leq 1$」で表されます．

参考 座標平面上で，

$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

のときを考えると，①は

$\overrightarrow{OP}=s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$．



つまり，図の**直交座標**において P の座標が (s,t) ですから，全ての設問が即答でき，これを少し“歪（ゆが）めた形”を考えれば本問も結果だけなら容易にわかります．

なお，本問で扱っている (s,t) は，**斜交座標**と呼ばれたりします．

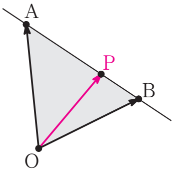
5 5 2 共線条件 ❸「始点統一形」により，P が直線 AB 上にあるとき，

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$ 係数の和 ＝1

と表せます．$s=1-t$ とおくと，$s+t=1$ より次のように表せます：

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \cdots ①,\ s+t=1.$$

①において，$\overrightarrow{OA} \nparallel \overrightarrow{OB}$ のとき，点 P と (s, t) は 1 対 1 対応なので，次の関係が成り立ちます：



共線であるための必要十分条件 定理

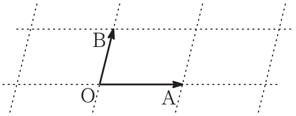
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ ($\overrightarrow{OA} \nparallel \overrightarrow{OB}$) のとき，「P が直線 AB 上」$\Longleftrightarrow$「$s+t=1$」．

注　「$s+t=1$ と表せる」のみならず，「必ず$s+t=1$ となる」ことが保証されます．[→**例題** 5 5 c (2)注意！]

例題 5 5 f　点 P と (s, t) の対応（その２）

根底 実戦 典型　**[→演習問題 5 6 7]**

3 点 O，A，B は共線でないとする．平面 OAB 上の任意の点 P について，$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ (s, t は実数) …① が成り立つとする．(s, t) が次の各条件を満たして動くときの点 P の存在範囲をそれぞれ図示せよ．

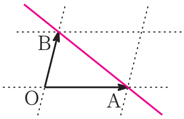


（平行線どうしは全て等間隔）

(1)　$s+t=1$　　(2)　$s+2t=1$　　(3)　$s+2t \leqq 1$

注　前問と似た問題ですが，2 変数 s, t を両方とも含んだ式を相手にします．

解答　(1)　**注**　上記の知識を使えばこの(1)は即答．■



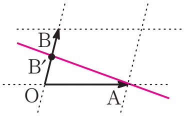
$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の係数の和が 1 だから，P の軌跡は直線 AB.

(2)　**着眼**　$s+2t=1$ の 2 がジャマですね．これを処理する古典的方法が次です：■

①より

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+2t\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$
$$=s\overrightarrow{OA}+2t\cdot\overrightarrow{OB'}$$

(B′は OB の中点)．



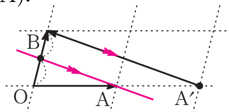
よって P の軌跡は直線 AB′．

注　この解答が世間では一般的らしいですが，筆者は嫌いです（笑）．そんなふうに定理の「結果」を無理して使うより，定理の「証明過程」に戻って解答する方が自然に感じます：■

本解　与式より $s=1-2t$．これと①より

$$\overrightarrow{OP}=(1-2t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$ 1 変数化
$$=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA})$$ 変数集約
$$=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{A'B}$$
$$(\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}).$$

よって，P の軌跡は A を通り A′B に平行な直線．



解説　共線条件 ❸「始点統一形」の証明過程をさかのぼり，❷「変数集約形」を導いたようなものですね [→ 5 5 2]．1 つの変数 t が 1 か所にあるので，P の動きが理解できます．知識・暗記に頼ることなく．

(3)　**着眼**　(2)を“世間一般”の方法で解答した人は，おそらく「(2)の直線に関して O のある側でしょ．なんとなく．」という解答でお茶を濁すでしょう（笑）．**本解**をマスターしていれば，(3)も同様に・明快に解決します．

方針　s, t の間に「等式」の関係式はなく，いわゆる**独立 2 変数**ですので，**1 文字固定**の考え方を用います．ただし，s と t はほぼ対等な立場なので，片方を固定するのではなく…

$s+2t=k\ (k\leq 1)$ …② とおく．

1° k を固定し，s, t を②のもとで動かす．

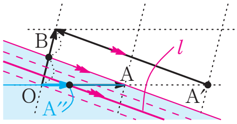
②より $s=k-2t$．これと①より

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(k-2t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 1 変数化

$=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}})$ 変数集約

$=\overrightarrow{\mathrm{OA''}}+t\overrightarrow{\mathrm{A'B}}\ (\overrightarrow{\mathrm{OA''}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}})$.

よって 1° では，P の軌跡は A″ を通り A′B に平行な直線 l.



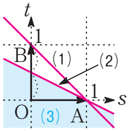
2° k を $k\leq 1$ の範囲で動かす．A″ は半直線 AO を描くから，l は前図の領域を掃く．

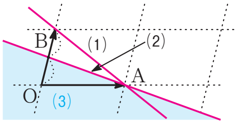
解説 1° の作業は，(2) **本解**における「1」が「k」に変わっただけでしたね (笑).

参考 前問でも述べた通り，直交座標平面上で

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \mathrm{P}(s,t)$$

のときを考えると，各設問における P の範囲は即座に下左図のように求まります．これをもとに“斜めに歪めれば”，本問 (斜交座標) も結果だけなら下右図のようにわかります．





という訳で，前 2 問で扱った「点 P と (s, t) の対応関係」を問う問題は，特殊な状況を直交座標で考えるというズルをすれば答えは即座にわかります．試験では，何を書けば満点なのか判然とせず (笑)，出題しにくいテーマです．今は，「ベクトルの理解」に主眼を置いて学んでくださいね．

5 三角形の内部

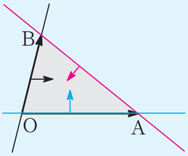
前問において，(1)の「$s+t=1$」を「$s+t\leq 1$」に変えると，(2)→(3)の流れと全く同様にして ($s+t=k$ とおいて)，P の存在範囲は直線 AB に関して O のある側となります．これと前々問(5)(6)の考え方を合わせると，次の定理が得られます：

三角形の内部の表現 **定理**

平面 OAB 上の点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (s, t は実数) のとき，

P が △OAB の内部または周にあるための条件は，

$s\geq 0,\ t\geq 0,\ s+t\leq 1.$



例題 5 5 g 三角形の内部 根底 実戦

[→演習問題 5 13 4]

次の等式が成り立つとき，点 P が △ABC の内部にあるような実数 k の値の範囲を求めよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+3k\overrightarrow{\mathrm{AB}}-k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

方針 前記の**定理**がキッチリ使える形に整理します．ただそれだけです (笑).

三角形のどの頂点を始点にしてもできますが，与式を見ると始点 A のベクトルが多いので…

解答 与式を変形すると

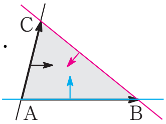
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3k\overrightarrow{\mathrm{AB}}-k\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=(3k-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AC}}.\end{aligned}$$

よって P が △ABC の内部にあるための条件は

$$\begin{cases}3k-1>0,\ 1-k>0,\\(3k-1)+(1-k)<1.\end{cases}$$

$$k>\frac{1}{3},\ k<1,\ k<\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}<k<\frac{1}{2}.\ /\!/$$



コラム

$\vec{0}$ と平行，分解の一意性（平面）の前提条件

522注でも述べた通り，$\vec{0}$ には「向きを考えない」とする立場と，「向きを任意に定めてよい」とする立場の 2 つがあります．なんとなく，高校では前者が主流な気がしますが，後者をもとに考えて

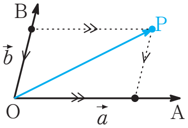
「$\vec{0}$ は，任意のベクトルと平行」…㋐　　「$\vec{0}$ は，任意のベクトルと垂直」…㋑

と考える人も多いです（筆者もそちら寄りです）．

「数学」という学問では，他に比べて用語の定義がしっかりとなされますが，このように文脈次第で適宜解釈することも珍しくなく，前記の“解釈”㋐が，分解の一意性（平面）[→531] を用いる際の「前提条件」への言及方法に影響を及ぼします：

㋑の影響は，[→**例題59f後のコラム**]

前記「前提条件」の表現法を以下に列記します：



①:「$\vec{a}, \vec{b}$ は平行でない」　　②:「$\vec{a}, \vec{b}$ は $\vec{0}$ でなく，平行でない」

③:「3 点 O，A，B が共線でない」　　④:「$\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立（ or 線型独立）」

学校教科書では②が採用されているようです．ただし，上記㋐の解釈によれば，「平行でない」と言ったら同時に「$\vec{0}$ でない」とも述べたことになります．よって，筆者は①で充分だと考えます．

しかし，㋐を前提にしない立場だと①では不完全．かと言って②の冗長な表現を毎度毎度書くのは疲れる．よって，（③の表現を知らない人は）④「一次独立」[1] という意味不明なオマジナイ（笑）を書くしかない．これが世間の実情です．という訳で，本書では主に③を使っている訳です [2]．

注　学校の「定期試験」では，教わった先生が作った問題を教わった先生に採点してもらうのですから，その先生の流儀に従うのが得策です．一方，不特定多数の受験者が集う「入試」では，“自分なり”に意味をなしている表現であれば，どれもマルにしてくれるのが普通だと思います．数学界では，このように微妙な事柄は，発信者の意図を尊重しながら適宜解釈するのが“マナー”ですので．

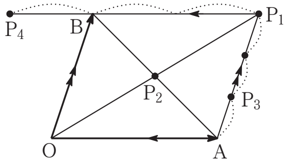
注 [1]：この単語の意味については，[→**演習問題568**]

言い訳 [2]：ホントは「3 つの点」ではなく「2 つのベクトル」の関係として言及したいので，筆者は

⑤「$\vec{a}, \vec{b}$は共線でない」　という表現がいちばん好きです（これを用いている書物もあります）．$\vec{0}$ はどんなベクトルとも共線（同一直線上に乗せられる）ので，⑤と言ったら「$\vec{0}$ でない」とも述べたことになりますね．ただ，困ったことに「ベクトルが共線でない」の意味を理解できず減点する教師がいるらしいという情報もあり，遠慮して大っぴらには使ってません（苦笑）．

6　演習問題A

561　根底 実戦　定期



右図の平行四辺形において，O に関する位置ベクトルを考える．
P_1～P_4 の位置ベクトルを，$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ で表せ．

562 根底 実戦 定期

座標平面上に点 A(1, 0), B(5, 2), C があり，$\mathrm{AC}=\sqrt{5}$, $\mathrm{BC}=5$ とする．

(1)　C の座標を求めよ．ただし，x 座標は正とする．

(2)　△ABC において，∠A の二等分線と BC の交点 P の座標を求めよ．

(3)　四角形 ACBD が平行四辺形となるような点 D の座標を求めよ．

563 根底 実戦 定期

平面上に △OAB があり，線分 AB を 3：1 に内分する点，外分する点をそれぞれ P，Q とする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおいて，以下の問いに答えよ．

(1)　$\vec{p}$, $\vec{q}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

(2)　$\vec{a}$, $\vec{b}$ を $\vec{p}$, $\vec{q}$ で表せ．

564 根底 実戦 典型

△OAB があり，OA の中点を M，OA を 3：1 に外分する点を C，OB を 3：1 に内分する点を D とする．BM と CD の交点を P として，以下の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．

(2)　OP と AB の交点を Q とするとき，線分比 OP：PQ，および線分比 AQ：QB を求めよ．

565 根底 実戦 典型

△ABC があり，AB を 1：3 に内分する点を D，BC の中点を E，CA を 2：1 に内分する点を F とする．CD と EF の交点を P とするとき，線分比 EP：PF を求めよ．

566 根底 実戦 入試

平面上に △OAB があり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(s>0,\ t>0,\ s\neq 1)$ を満たす点 P がある．OP と AB の交点を Q，AP と OB の交点を R とすると，$3s+t=1$ …① のとき，直線 QR は O に関する A の対称点 A′ を通ることを示せ．

567 根底 実戦 典型

平面上に，△OAB がある．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (s, t は実数) …① で定まる点 P について考える．

(1)　(s,t) が $3s-t=1$, $s\geq 0$, $s+t\leq 1$ を満たして動くとき，P の軌跡を図示せよ．

(2)　(s,t) が $3s-t\leq 1$, $s\geq 0$, $s+t\leq 1$ を満たして動くとき，P の存在範囲 D の面積を，△OAB の面積 S を用いて表せ．

568 根底 実戦 典型

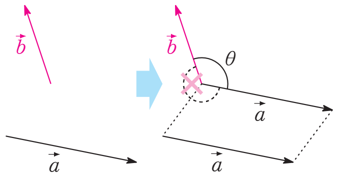
(1)　$s\cdot 1+t\sqrt{2}=0$ (s, t は有理数) のとき，$s=t=0$ であることを示せ．ただし，$\sqrt{2}$ は無理数であることを用いてよいとする．

(2)　$s\cdot 1+t\omega=0$ (s, t は実数) のとき，$s=t=0$ であることを示せ．ただし，ω は虚数であるとする．

(3)　$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$ (s, t は実数) のとき，$s=t=0$ であることを示せ．ただし，$\vec{a}$, $\vec{b}$ は $\vec{0}$ でなく平行でないとする．

7 内積 Ⅱ+B 2

1 ベクトルどうしのなす角



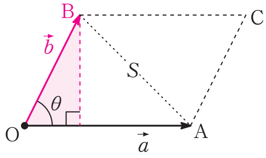
2 ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の**なす角 θ** は，始点をそろえて 1) 測ります．ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ の方です (図の × の角ではありません)．

言い訳 下線部 1) は，5 1 1 言い訳で述べたように，正しく述べると次のようになります：

「$\vec{a}, \vec{b}$ を始点のそろった有向線分で表して」

長いですね (笑)．という訳で，「ベクトルの始点をそろえる」と言い回しました．悪しからず…

2 内積の定義



右図のように，2 ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の始点をそろえ，平行四辺形 OACB を作ると，その**面積** S は

$$S = \underbrace{|\vec{a}|}_{\text{底辺}} \cdot \underbrace{|\vec{b}| \sin\theta}_{\text{高さ}}. \cdots ①$$

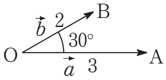
面積と対をなす量として，2 ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の**内積**なるものを考え，「$\vec{a} \cdot \vec{b}$」と表して次のように定めます：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{|\vec{a}|}_{\text{底辺}} \cdot \underbrace{|\vec{b}| \cos\theta}_{???} \cdots ②$$

①と②の違いは，sin と cos だけ

??? この意味は後述

例 $\vec{a}, \vec{b}$ の大きさがそれぞれ 3，2 であり，なす角が 30° なら，

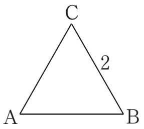


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 \cdot \cos 30° = 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

注 ご覧の通り，「ベクトルの内積」は実数です． 内積はベクトルじゃない！

例題 5 7 a 内積の定義 根底 実戦 [→演習問題 5 10 1]

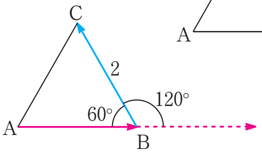
右図の正三角形 ABC において，内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ の値を求めよ．



注意！ 2 ベクトルの始点がそろっていませんよ！

解答 2 ベクトルのなす角は，始点を B に統一して測ると $180° - 60° = 120°$．よって

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120° = 2 \cdot 2 \cdot \frac{-1}{2} = -2. /\!/$$



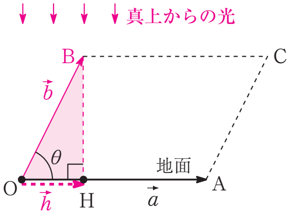
補足 $\vec{a}, \vec{b}$ の少なくとも一方が $\vec{0}$ (その大きさは 0) であるとき，内積の値は $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ と定めます．

3 内積の意味 ハイレベル

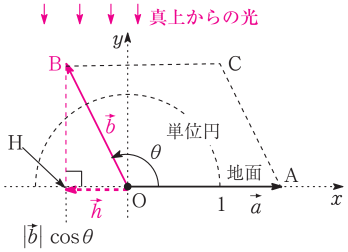
注 将来各方面において有効活用できる内容です [→Ⅱ+B 3 3 「**点と直線の距離公式**」]．少し理解するのに時間がかかるかもしれませんが，徐々に理解していきましょう．■

2 における，①式の「高さ」に対応する②式の「???」について解説します．

〔図 1〕



〔図 2〕



B から直線 OA に垂線 BH を下ろします．θ が鋭角の場合，上の〔**図 1**〕で色の付いた直角三角形 OBH に注目すれば，「???」は「ベクトル $\vec{h}=\overrightarrow{OH}$ の長さ（大きさ）」ですね．

この「$\vec{h}$」について説明します．ベクトル $\vec{a}$ を「地面」に見立て，その“真上”から光を当てると，ベクトル $\vec{b}$ の「影」が地面に映りますね．この影が $\vec{h}$ であり，次のように言います：

> $\vec{h}$ は，$\vec{b}$ の $\vec{a}$ への**正射影ベクトル**である．

つまり〔**図 1**〕においては，②の「???$=|\vec{b}|\cos\theta$」は，この正射影ベクトルの「長さ」です．

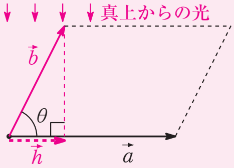
θ が 90° 以上の場合も含めると直角三角形では考えにくいので，上の〔**図 2**〕のように xy 平面を導入し，三角比を利用するべく単位円をとります（**I+A 3 5 3**「余弦定理」の証明で用いた図と同じです）．

$\vec{b}$ の終点 B の座標は，B$(|\vec{b}|\cos\theta, |\vec{b}|\sin\theta)$ です．よって②の「???$=|\vec{b}|\cos\theta$」は，H の x 座標，つまり**正射影ベクトル** $\vec{h}$ の符号も考えた長さです．

内積の意味 **原理**

$$\text{面積 } S = \underbrace{|\vec{a}|}_{\text{底辺}}\cdot\underbrace{|\vec{b}|\sin\theta}_{\text{高さ}}. \quad \cdots ①$$

$$\text{内積 } \vec{a}\cdot\vec{b} = \underbrace{|\vec{a}|}_{\text{底辺}}\cdot\underbrace{|\vec{b}|\cos\theta}_{\text{正射影ベクトル } \vec{h} \text{ の符号付長さ } ^{1)}}. \quad \cdots ②$$

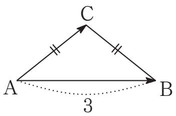


注 1)：耳慣れない表現だと思いますが，「数直線」や「座標」って，まさにこの「符号付長さ」を表したものですね．ここでは，“地面”を表すベクトル $\vec{a}$ と同じ向きが正，反対向きが負です．

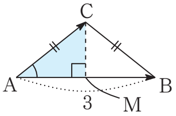
例題 5 7 b 内積の意味 根底 実戦

［→演習問題 5 10 1］

右図の二等辺三角形 ABC において，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の値を求めよ．



着眼 2 ベクトルの始点はそろっていますね．ただし，$|\overrightarrow{AC}|$，∠A がどちらもわかっていません．どうしたものか…



解答 C から AB へ垂線 CM を下ろすと，M は AB の中点であり，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|\cos A$$
$$= AB\times AM = 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2}.\ /\!\!/$$

参考 $\overrightarrow{AM}$ は，$\overrightarrow{AC}$ の $\overrightarrow{AB}$ への正射影ベクトルですね．

4 内積の成分計算

右図の三角形において余弦定理を用いると

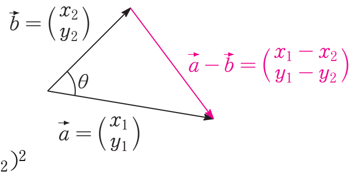
$$\underbrace{|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}_{\text{三平方の定理}} - 2\underbrace{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta}_{\text{内積 }\vec{a}\cdot\vec{b}} \cdots ①$$

$$\therefore\ 2\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2$$

$$= x_1{}^2+y_1{}^2+x_2{}^2+y_2{}^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2$$

$$= 2(x_1x_2+y_1y_2).$$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2+y_1y_2.$$



x 成分どうし，y 成分どうしをそれぞれ掛けて加えるだけ．覚えやすいですね！

成分による内積 **定理**

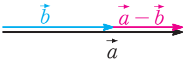
$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = x_1x_2+y_1y_2\ .$$

言い訳 内積を，「$\vec{a}\cdot\vec{b}$」と書かず上式左辺のように成分表示で記するのは正式な表現ではありませんが，使っても支障ないでしょう．

重要 ①を見るとわかるように，「余弦定理」とは，「三平方の定理」の形の後に，「−2×内積」がくっついたものだとみなせます．

補足 余弦定理①は，$\theta=0°$, 180° でも成り立ちます．例えば $\theta=0°$ のとき，①は

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2 -2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cdot1 = (|\vec{a}|-|\vec{b}|)^2.$$

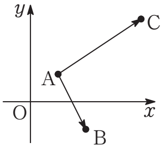


i.e. $|\vec{a}-\vec{b}| = \big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big|$. これは右図より成り立つ ($\theta=180°$でも同様).

例題 5 7 C 成分による内積 根底 実戦

[→演習問題 5 10 1]

xy 平面上に 3 点 A(1, 1)，B(2, −1)，C(4, 3) がある．内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値を求めよ．



方針 2 ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を成分で表します．

解答 $$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix}2-1\\-1-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4-1\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = 1\cdot3-2\cdot2=-1. /\!/$$

参考 見たカンジ，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角は鈍角っぽいですね．なので，内積の値が負になる訳です．

[→5 8 1]

5 内積の演算法則

内積の演算は，数を表す普通の文字式と同様なルールで行うことができます．

内積の演算 **定理**

普通の文字式の場合

❶ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ⋯ $ab=ba$

❷ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ ⋯ $a(b+c)=ab+ac$

❸ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (k は実数) ⋯ $(ka)b=k(ab)$

❷を，成分を用いて証明します（他も同様に示せます）．実に単純かつ機械的な計算に過ぎず，証明過程に対する知的な喜びは，ゼロです（笑）．❶❸の証明についても同様です．

〔証明〕　**重要度**⇩

$\vec{a}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$ として

$$\text{左辺}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\cdot\left\{\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2+x_3\\y_2+y_3\end{pmatrix}$$

$$=x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)=(x_1x_2+x_1x_3)+(y_1y_2+y_1y_3)$$

ここで，$^{1)}$普通の文字式の演算法則を用いた

$$=(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1x_3+y_1y_3)=\text{右辺}.\ \square$$

ね．面白味ないでしょ（笑）

注　1)：結局，**ベクトル**の内積の成分による求め方は，「x 成分」および「y 成分」という**実数**どうしの積によって表されるため，数を表す普通の文字式の演算規則と同等なものができ上がるという訳です．

補足　$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\,|\vec{a}|\cos 0^\circ=|\vec{a}|^2$　同じベクトルどうしの「内積」は，「大きさ」の 2 乗

となります．実はこれ，「長さ」（大きさ）と「内積」を結びつける重要公式です．後に図形の計量において大活躍することになります．[→5 8 2]

注意！　同じベクトルどうしの内積を $\cancel{\vec{a}^2}$ と書いてはいけません．これは約束ね．

例題 5 7 d　ベクトルの演算法則　根底 実戦

[→演習問題 5 10 4]

$|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ のとき，次の各値を求めよ．

(1)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})$　　　(2)　$|2\vec{a}-\vec{b}|$

方針　(1) 普通の文字式を展開するような軽い気持ちで．

(2) 上記**補足**で述べたことを使います．

(1)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})$　普通の文字式の場合 $(a+b)(a+3b)$

$$=^{1)}\ |\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2$$

$a^2+4ab+3b^2$

$$=9+4\cdot\frac{1}{2}+3\cdot4=23./\!/$$

注意！　同じベクトルどうしの内積：$\vec{\bigcirc}\cdot\vec{\bigcirc}$ は，大きさの 2 乗：$|\vec{\bigcirc}|^2$ と書くこと！

(2)　$|2\vec{a}-\vec{b}|^2$　長さは 2 乗せよ．すると…

$(2a\ -\ b)^2$

$$=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$$

同じベクトルどうしの内積になり，

$$=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$4a^2\ -\ 4ab\ +\ b^2$

展開して“パーツ”に分解できる．

$$=4\cdot9-4\cdot\frac{1}{2}+4=38.$$

$$\therefore\ |2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{38}./\!/$$

解説　内積は，普通の文字式と全く同じ感覚で展開できるんですね．もちろん，逆向きの変形である因数分解についても同様です．

注　1)：この式は紙には書かず，即座に問題文にある数値を代入してしまいましょう！

重要　2，4，5 と見てきてわかるように，内積を求める方法として，次の 3 つがあります．

内積の求め方　方法論

1. 定義　　2. 成分　　3. 演算法則

8 内積による計量 Ⅱ+B 2

前節 2 で学んだ内積の定義：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\overbrace{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}^{\text{長さ}}\cos\overset{\leftarrow\vec{a},\,\vec{b}\text{ のなす「角」}}{\theta}$ …(＊) には，「長さ」と「角」という図計量が含まれています．また，前節 5 で見たように内積の演算規則はとてもシンプルであり，“機械的に”（神経をすり減らすことなく）計算できてしまいます．以上の 2 つの理由により，「内積」は，「計量」を行うためのとても便利なツールとなります．

1 内積による角の計量

上記 (＊) の両辺を $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,(\neq 0)$ で割れば，$\cos\theta$ の値を求める公式が得られます．また，$\cos\theta$ と $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は同符号ですから，内積の符号により，なす角 θ と 90° との大小がわかります．

角と内積　$\vec{a},\vec{b}\ (\neq\vec{0})$ のなす角を θ とする．

○ 角：$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$. ••• 上記 (＊) より

$$\circ\begin{cases}\theta<90^\circ\iff\vec{a}\cdot\vec{b}>0.\\ \theta=90^\circ\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0.\ ^{1)}\\ \theta>90^\circ\iff\vec{a}\cdot\vec{b}<0.\end{cases}$$

注 1)：このとき「$\vec{a}$ と $\vec{b}$」は**垂直**であるといい，$\vec{a}\perp\vec{b}$ と表します．一般に，次の関係が成り立ちます：

ベクトルの垂直と内積 **知識**　$\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，

$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$ ••• $\vec{a}=\vec{0}$ or $\vec{b}=\vec{0}$ のときも内積は 0 となります

例題 5 8 a 内積と角　根底 実戦 典型

[→演習問題 5 10 3]

xy 平面上に 3 点 A(1, 2)，B(5, 1)，C(6, 5) がある．

(1) ∠CAB を求めよ．　　(2) ∠ABC を求めよ．

方針 (1) ∠A の計量ですから，A を始点とする 2 ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を用います．

(2) 同様に，B を始点とする 2 ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の内積を用います．

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ だから

$$\cos\angle\mathrm{CAB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{20-3}{\sqrt{17}\sqrt{34}}=\frac{17}{17\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\therefore\ \angle\mathrm{CAB}=45^\circ.$ // ••• 0°～180° で考える

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ だから

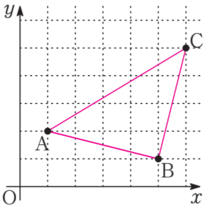
$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-4+4=0.$

$\therefore\ \cos\angle\mathrm{ABC}=0.$

$\therefore\ \angle\mathrm{ABC}=90^\circ.$ // ••• つまり $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

注 (2)では，$\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の内積が 0 なので，それぞれの大きさを考えるまでもなくこれら 2 ベクトルは「垂直」だとわかります．

言い訳 右のように正確に図を描けば，△ABC が ∠ABC= 90° の直角二等辺三角形であることがわかり，(1)(2)の答えは瞬時に得られますが…．ここは，ベクトルを用いる練習だと思ってお付き合いくださいね．



2 内積による長さの計量

等式 $\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2$ において，右辺は大きさ（長さ）で左辺は内積であり，内積にはこれまで述べた様々な計算法があります．よって，長さを 2 乗して内積にすり替えることにより，長さの計量をカンタンに行うことができる訳です．

長さと内積 **定理**

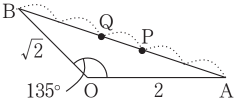
$$\underbrace{|\vec{v}|^2}_{\text{長さ}}=\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}}_{\text{内積}}.$$

長さは 2 乗して内積にすり替える

例題 5 8 b 内積と長さ，角

根底 実戦

[→演習問題 5 10 5]



△OAB において，OA$=2$，OB$=\sqrt{2}$，$\angle$BOA $=135^\circ$ とする．

(1) 線分 AB を $2:3$ に内分する点を P とするとき，OP の長さを求めよ．

(2) AB を $3:2$ に内分する点を Q とするとき，OQ$\perp$AB となることを示せ．

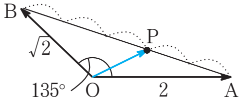
方針 2 ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を表し，内積を用いて計量していきます．

解答 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，

$$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=\sqrt{2},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ=2\sqrt{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}=-2.$$ [1)]

(1)



内分点公式より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+3}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}.\ \cdots①$$

ここで

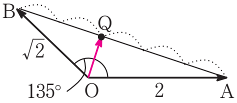
$$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$ [2)]

$$=9\cdot4+12\cdot(-2)+4\cdot2=20.$$

これと①より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{\sqrt{20}}{5}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$ //

(2)



内分点公式より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+2}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}.\ \cdots②$$

ここで

$$(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=-2|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2$$

$$=-2\cdot4-(-2)+3\cdot2$$

$$=-8+2+6=0.$$

これと②より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. □

解説 1)：このように，この後の内積計算において現れるであろう値を予め準備しておくと…

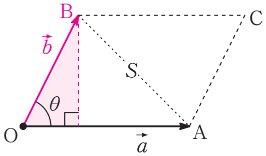
2)：この薄字部分を紙に書く手間を省いて効率良い計算ができます．

補足 (1)(2)とも，①②の後，無駄な分数計算をしないで済ますよう工夫しています：

(1)→①より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{1}{5}|3\vec{a}+2\vec{b}|$ ですね．

(2)→②より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}/\!/ 2\vec{a}+3\vec{b}$ ですね．

3 面積と内積



5 7 2 の 2 式：

$$S=|\vec a|\cdot|\vec b|\sin\theta\ .\ \cdots①$$

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\cdot|\vec b|\cos\theta\ .\ \cdots②$$

を見るとわかるように，「平行四辺形の面積 S」と「内積 $\vec a\cdot\vec b$」が共通な文字 θ によって表されているので，ここから θ を消去し，面積と内積の直接の関係式を得ることができます．①^2＋②^2 により，

$$S^2+(\vec a\cdot\vec b)^2=|\vec a|^2|\vec b|^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=|\vec a|^2|\vec b|^2.\ \cdots③$$

$$\therefore\ \ S=\sqrt{|\vec a|^2|\vec b|^2-(\vec a\cdot\vec b)^2}.$$

さらに，$\vec a=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, $\vec b=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ と成分で表されているとき，③より

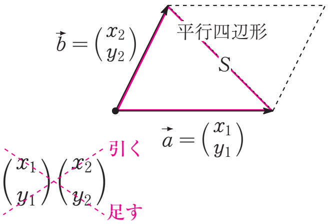
$$S^2=(x_1{}^2+y_1{}^2)(x_2{}^2+y_2{}^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2\ \cdots④$$

$$=\underline{x_1}^2\underline{y_2}^2+\underline{x_2}^2\underline{y_1}^2-2\underline{x_1}\,\underline{x_2y_1}\,\underline{y_2}$$

$$=(\underline{x_1y_2}-\underline{x_2y_1})^2\ \cdots⑤$$

$$\therefore\ \ S=|x_1y_2-x_2y_1|.$$

俗に“たすき掛け”という（右を参照）



解説 ④から⑤への変形は，因数分解の問題としてとても有名です．[→ I+A 演習問題 1 4 12 (2)]

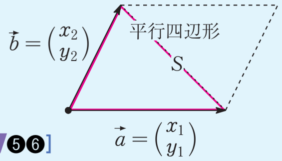
ベクトルによる面積 **定理** （S は，右図の平行四辺形の面積）

$$S=\sqrt{|\vec a|^2|\vec b|^2-(\vec a\cdot\vec b)^2}.$$

この 2 乗を忘れずに！

$$S=|x_1y_2-x_2y_1|.$$

“たすき掛け”．絶対値記号に注意



注 赤色三角形なら，式の先頭に $\frac{1}{2}\times$ が付きます．[→ I+A 3 5 7 ❺❻]

例題 5 8 C 内積と面積 根底 実戦

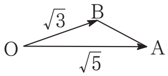
[→演習問題 5 10 3]

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt5$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt3$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$ のとき，三角形 OAB の面積を求めよ．

(2) xy 平面上に 3 点 A(1, 1)，B(2, −1)，C(4, 2) がある．三角形 ABC の面積を求めよ．

方針 上記の公式を適用するだけです．

解答 (1)



$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac12\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$

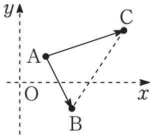
$$=\frac12\sqrt{5\cdot3-3^2}=\frac{\sqrt6}{2}.\,/\!/$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

だから

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac12|1\cdot1-3\cdot(-2)|$$

$$=\frac72.\,/\!/$$



補足 (2)では，A 以外を始点にとっても同様に解けます．

参考 ③式において，$S^2\geqq0$ より，$(\vec a\cdot\vec b)^2\leqq|\vec a|^2|\vec b|^2$. i.e. $(x_1x_2+y_1y_2)^2\leqq(x_1{}^2+y_1{}^2)(x_2{}^2+y_2{}^2)$ が得られます．これは，「コーシー・シュワルツの不等式」[→ II+B 1 12 2] に他なりません．

4 ベクトルの決定

本節の最後に，xy 平面上で何らかの条件を満たすベクトルを求める問題をやってみましょう．今後の学習において，よく用いる手法が登場します．

例題 5 8 d ベクトルの決定 重要度⇧ 根底 実戦

[→演習問題 5 10 2]

xy 平面上で，次の各条件を満たすベクトル $\vec{v}$ についてそれぞれ答えよ．

(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ と平行な単位ベクトル $\vec{v}$ を求めよ．ただし，$\vec{v}$ の x 成分は正とする．

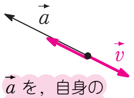
(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ と垂直かつ大きさが 2 であるベクトル $\vec{v}$ を求めよ．

(3) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ と $\vec{v}=\begin{pmatrix}t\\1-t\end{pmatrix}$（$t$ は実数）が平行となる t の値を求めよ．

(4) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ と $\vec{v}=\begin{pmatrix}t\\1-t\end{pmatrix}$（$t$ は実数）が垂直となる t の値を求めよ．

方針 「ベクトル」を決定する 2 つ：「向き」と「大きさ」について考えます．

解答 (1) $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは



$$\pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

$\vec{a}$ を，自身の長さで割る

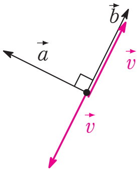
x 成分が正である方を選んで，求めるものは

$$\vec{v}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.\!/\!/$$

(2) $\vec{a}$ と垂直なベクトルの 1 つは，$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 1)．

$$\therefore\ \vec{v}=\underbrace{\pm2}_{\text{符号付長さ}}\cdot\underbrace{\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}}_{\text{単位ベクトル}}$$

$$=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.\!/\!/$$



解説 1)：一般に，次が成り立ちます：

> **重要** xy 平面上で，2 つのベクトル
>
> $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$ を考えると，
>
> $\vec{u}\perp\vec{v}$ ($\because$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$), $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

(3) $\vec{a}\,/\!/\,\vec{v}$ となるための条件は

$3:2=t:(1-t)$.

$3(1-t)=2t$. $\therefore\ t=\dfrac{3}{5}.\!/\!/$

解説 $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ と平行なベクトルである $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}30\\20\end{pmatrix}$ などは，どれも x 成分と y 成分の比が $\vec{a}$ と等しいですね．

注意！ 「ベクトルが平行」⟷「一方が他方の実数 k 倍」のような，解法ガチガチパターン暗記はダメ！

参考 このとき確かに

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}3/5\\2/5\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}/\!/\,\vec{a}\ \text{ですね．}$$

(4) $\vec{a}\perp\vec{v}$ となるための条件は

$\vec{a}\cdot\vec{v}=0$.

$3\cdot t+2\cdot(1-t)=0$. $\therefore\ t=-2.\!/\!/$

参考 このとき確かに

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\vec{a}\ \text{ですね．}$$

9 平面ベクトルの実戦問題

これまで学んできたベクトルの基礎を駆使して，実戦問題を解いてみましょう．基礎がしっかりしていれば，かなり機械的な計算処理で解答できてしまうのが「ベクトル」の特徴です．

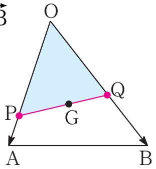
例題 5 9 a 重心を通る直線 根底 実戦 入試

平面上に G を重心とする △OAB がある．G を通る直線 l が辺 OA，OB(両端を除く) と交わるとき，それぞれの交点を P，Q とする．l が動くとき，△OPQ の面積を最小化する P，Q はどのような点であるかを答えよ．

着眼 「ベクトル」の「べ」の字もありませんが，「重心」「共線」「交点」といったベクトルが有効活用できる素材が並んでいますね．

方針 例によって次の方針で：「始点を O に統一」「2 ベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ で表す」．

P，Q の位置を，どのようにベクトルで表すか？



解答 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OB}$

$(0<s<1,\ 0<t<1\ \cdots①)$

とおくと，

$\triangle OPQ:\triangle OAB$

$=OP\cdot OQ:OA\cdot OB$ [1)]

$=sOA\cdot tOB:OA\cdot OB=st:1.$

そこで，st が最小となるような s, t を求める．

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).\ \cdots②$$

G は PQ 上だから，

$$\overrightarrow{OG}=(1-x)\overrightarrow{OP}+x\overrightarrow{OQ}$$

$$=(1-x)s\overrightarrow{OA}+xt\overrightarrow{OB}\ \cdots③$$

と表せて，3 点 O，A，B は共線でないから，②③より

$$\begin{cases}(1-x)s=\dfrac{1}{3}, \\ xt=\dfrac{1}{3}.\end{cases}\quad \begin{cases}1-x=\dfrac{1}{3s}, \\ x=\dfrac{1}{3t}.\end{cases}$$

辺々加えて

$$\frac{1}{3s}+\frac{1}{3t}=1.\ \text{i.e.}\ \frac{1}{s}+\frac{1}{t}=3.\ \cdots④$$

方針 「④ (和が一定)」で「積 st が目標」ですから，“アレ” を使います．■

$\frac{1}{s}, \frac{1}{t}>0$ ゆえ，“相加相乗” [2)] より

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{t}}.$$

これと④より

$$3\geq 2\sqrt{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{t}}.\ st\geq\frac{4}{9}(\text{一定}).$$

大小関係の不等式

等号成立条件は

$\frac{1}{s}=\frac{1}{t}$ かつ④より，

$\frac{1}{s}=\frac{1}{t}=\frac{3}{2}$. i.e. $s=t=\frac{2}{3}$ (①も成り立つ).

このとき st および △OPQ は最小となる．よって答えは次の通り：

P，Q は，線分 OA，OB をそれぞれ 2 : 1 に内分する点.//

解説 1)：角が共通な三角形どうしの面積比です [→ I+A 5 7 1]．こんなに丁寧に説明するまでもない気がしますが.

参考 △OPQ の最小値は，$\frac{4}{9}$△OAB です．

言い訳 2)：正式名称は「相加平均と相乗平均の大小関係」ですが，適宜サボります (笑).

例題 5 9 b 直線へ垂線を下ろす 根底 実戦

[→演習問題 5 10 5]

△OAB において，OA ＝ 5, OB ＝ 6, AB ＝ 7 とする．

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ．

⑵ OA，AB の中点をそれぞれ M，N とし，B から直線 MN へ垂線 BH を下ろす．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．

着眼 ⑴ 次のことは“常識”として知っておかなくてはなりません：

> 三角形の 3 辺の長さから，その 2 辺をなすベクトルの**内積は即座に求まる**．

方針 ⑵「共線条件」＋「垂直→内積 ＝ 0」で OK．内積計算をする際の“準備”が⑴です．あと，文字を**集約**した状態で計算すること．

注 MN は中点どうしを結んだ直線です！

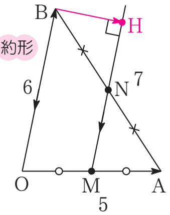
解答 ⑴ $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=5,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=6.$

△OAB において余弦定理を用いると

$$7^2=5^2+6^2-2\times\underbrace{5\cdot6\cos\angle\mathrm{BOA}}_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}.$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{25-13}{2}=6.\,/\!/$$

⑵ ∘ H は MN 上だから



$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MH}}$$

変数集約形

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \cdots①$$

と表せる（∵ MN ∥ OB)．

∘ BH ⊥ OB より

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0.$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0.$$

これと①より

$$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0.$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0.$$

$$\frac{1}{2}\cdot6+t\cdot36-36=0.\quad\therefore\ t=\frac{33}{36}=\frac{11}{12}.$$

これと①より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{11}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}.\,/\!/$$

解説 内積計算を，文字をばら撒くことなく片付けたいので，①の「変数集約形」を用いるのが当然です．

注 結果を目分量でチェック．

参考 ⑴は，次のようにも解答できます：

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=7.\qquad|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=7^2.$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=7^2.$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=7^2.$$

$$6^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5^2=7^2.$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{6^2+5^2-7^2}{2}=6.\,/\!/$$

ただ，ここで用いた「演算法則」は，

余弦定理→内積の成分公式→演算法則

前記解答と同様

の流れで導かれますから，その大元にあたる「余弦定理」で片付けるのが正道だと考えます．

コラム

「図形」の攻め方

1° 図形そのもの
2° 三角比
3° （複素平面）
4° ベクトル
5° 座標

高校数学（大学入試）において「図形」を扱う手法は，右の“五択”です（文系生は 3° を除いた“四択”）．おおよその傾向として，上側ほど「発想力」重視，下側ほど「計算力」主体となります．

本書も含め，「分野に分かれた問題演習」をする機会が多いのですが，入試本番へ向けての実戦テストでは，「どの分野の手法で攻めるか？」という**手法選択**も訓練することになります．

注 どんな図形問題でも，まずは1°「図形そのもの」を描き，見ることから始めましょう．

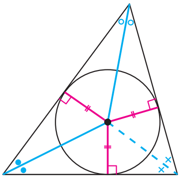
例題 5 9 C 内心の位置ベクトル 根底 実戦 典型 [→演習問題 5 10 6]

点 I を内心とする △ABC において，BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ とする．O を任意の点として，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ．

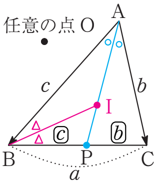
注 「任意の点O」を始点にするよう指示されていますが，**まずは**いつも通り次の方針で：

「始点を頂点A に統一」「2 ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表す」．

方針 「内心」には，右図のように 2 通りの捉え方があります[→ I+A 5 6 2]．ここでは，青色：「角の二等分線」から「線分比」を求める流れが早そうです．



解答 右図のように角の二等分線と点 P をとる．



∘ △ABC に注目して，P は BC を $c : b$ に内分するから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{c+b}.\ \cdots①$$

∘ △BAP に注目して，I は AP を次の比に内分する：

$$\mathrm{BA}:\mathrm{BP}=c:a\cdot\frac{c}{c+b}=(b+c):a.$$

これと①より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{b+c}{b+c+a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$=\frac{b+c}{b+c+a}\cdot\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{c+b}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}.$$

始点を O に変えると

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\vec{a}=\frac{b(\vec{b}-\vec{a})+c(\vec{c}-\vec{a})}{a+b+c}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}.\,/\!/$$

参考 答えの始点 O は「任意の点」ですから，他の点に変えてもこの係数はそのまま保たれます．

とてもキレイな結果ですね．係数の和は

$\dfrac{a+b+c}{a+b+c}=1$ です．[→例題 5 9 e **参考**重心座標]

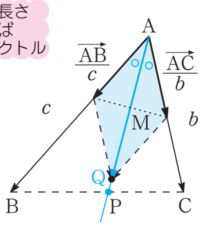
注 「角の二等分線」をベクトルで表現する方法として，次のように「単位ベクトル」を用いる方法もあります：

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きの単位ベクトル：

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c},\ \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b}$$

自身の長さで割れば単位ベクトル

を用いて右のようにひし形を作ると，∠A の二等分線は次のベクトルと平行です：



$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b}$$

$$/\!/\ b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

この方法なら，A の対辺上の点P を意識することなく「角の二等分線」を表現できます（点 Q の代わりにひし形の対角線の交点 M を用いても同様）．ここで用いた考え方は，I+A 5 11 4「角の二等分線の**作図**」と全く同じです．

なお，上記の手法は[→演習問題 5 10 6「傍心」]で使用します．

例題 5 9 d 外心，垂心の位置ベクトル

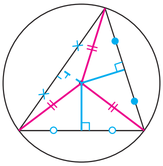
根底 実戦 典型 [→例題 5 12 m]

AB＝3, AC＝2, ∠CAB＝60° である △ABC において，外心を P，垂心を H，重心を G とする．

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ で表せ．　(2) $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ で表せ．

(3) 3点P，G，Hは共線であることを示せ．

解答 (1) **方針** 「外心」には，右図のように2通りの捉え方があります [→ I+A 5 6 1]．

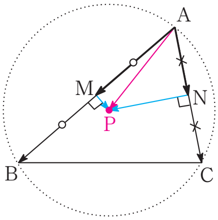


どちらでも解答可能ですが，青色：「垂直二等分線の交点」の方を用いてみます．1) ■

予め準備

$|\overrightarrow{AB}|=3,\ |\overrightarrow{AC}|=2,$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=3.$



$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

とおく．図のように中点 M，N をとると

$\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{AB}$ より

$(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AB}=0.$

$\left(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0.$

$s|\overrightarrow{AB}|^2+t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=0.$

$s\cdot9+t\cdot3-\dfrac{9}{2}=0.$ i.e. $3s+t-\dfrac{3}{2}=0.$ …①

$\overrightarrow{NP}\perp\overrightarrow{AC}$ より

$\left(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=0.$

$s\cdot3+t\cdot4-\dfrac{4}{2}=0.$ …②

②－① より，$3t-\dfrac{1}{2}=0.\ t=\dfrac{1}{6}.$

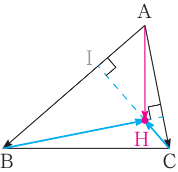
これと①より，$3s=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{3}.\ s=\dfrac{4}{9}.$

以上より，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$//

注 答えを目分量でチェックしておくこと．

1)：こちらの方が計算量が少ないことは，実際にやってみるとわかります．■

(2) **方針** 「垂心」の捉え方は次図の一択です [→ I+A 5 6 4]．何と何が垂直であることを表すか，よく考えて．2) ■



$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ とおく．

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ より 3)

$(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0.$

$(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0.$

$x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0.$

$x\cdot9+y\cdot3-3=0.$ i.e. $3x+y-1=0$ …③

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ より

$(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=0.$

$x\cdot3+y\cdot4-3=0.$ …④

④－③ より，$3y-2=0.\ y=\dfrac{2}{3}.$

これと③より，$3x=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}.\ x=\dfrac{1}{9}.$

以上より，$\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$//

注 2)3)：図中の点 I を用いて ~~$\overrightarrow{CI}\perp\overrightarrow{AI}$~~ などと“くっついた”ものどうしの垂直を考えてしまうと遠回り．CH と AB のように，“離れていても”垂直であることを見抜けるように．■

(3) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$ これと(1)(2)より

$\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AG}$ 始点変えたきゃ差にばらせ

$=\left(\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

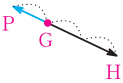
$=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AG}$

$=\left(\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$=-\dfrac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

$\therefore\ \overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GP}.$ …⑤



よって題意は示せた．□

参考 ⑤より，G は PH を 1：2 に内分します．この性質は，三角形一般で成り立ちます．

[→ I+A 演習問題 5 12 11 例題 5 9 f]

例題 5 9 e 位置ベクトルと面積比 根底 実戦 典型 [→例題 5 12 n]

α, β, γ は正の定数とする．△ABC とその内部の点 P があり，$\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$ …① が成り立つとする．△PBC，△PCA，△PAB の面積をそれぞれ s_1, s_2, s_3 として，これらの比 $s_1 : s_2 : s_3$ を求めよ．

方針 いつも通りの方針：「始点を頂点 A に**統一**」「2 ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表す」でいきます．また，未知なる点 P を**集約**したいという意識も大切です．

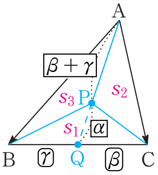
着眼 「面積比」は「線分比」から得られます．[→ I+A 5 7 1]

解答 ①より

$$\alpha(-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+\beta(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+\gamma(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$=\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\cdot\underbrace{\frac{\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\gamma+\beta}}_{\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}.$$



ここに，

Q は BC を $\gamma : \beta$ に内分する点．…②

P は AQ を $(\beta+\gamma) : \alpha$ に内分する．…③

よって Q は AP と BC の交点であり，

②より，$s_2 : s_3 = \beta : \gamma$.

③より，$(s_2+s_3) : s_1 = (\beta+\gamma) : \alpha$.

$\therefore s_1 : s_2 : s_3 = \alpha : \beta : \gamma.$ //

解説 ①の係数がそのまま答えの面積比となるという有名問題でした（笑）．

本問で用いた「面積比」と「線分比」の関係が飲み込めないという人は，[→ I+A 5 7 2]．

そのうち②を用いた部分は，「チェバの定理」の証明過程でも用いましたね．[→ I+A 5 8 1]

参考 ハイレベル↑ “3 つの三角形” の面積比を表す α, β, γ を係数とする等式①：

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}.$$

において，始点を任意の点O に変えて各点の位置ベクトルを $\mathrm{P}(\vec{p})$, $\mathrm{A}(\vec{a})$ などと表すと，

$$\alpha(\vec{a}-\vec{p})+\beta(\vec{b}-\vec{p})+\gamma(\vec{c}-\vec{p})=\vec{0}.$$

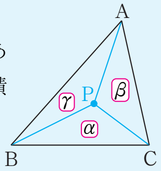
$$\therefore\ \vec{p}=\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\alpha+\beta+\gamma}.\ \cdots(*)$$

この結果は，既に I+A **演習問題** 5 9 16 参考でも述べた通り有名なものです：

重心座標

△ABC の内部に点 P があるとき，右図のような面積比となるための条件は

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}.$$



任意の点 O を始点とした位置ベクトルを $\mathrm{P}(\vec{p})$，$\mathrm{A}(\vec{a})$ などとすると

$$\vec{p}=\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\alpha+\beta+\gamma}.\ \cdots(*)$$

(*) の右辺の係数の組：

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma},\ \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma},\ \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

を，点 P の重心座標という．

(*) の右辺は，係数の和が「1」であり，始点を変えても不変です．（始点 O は，平面 ABC 上にない空間内の任意の点でも OK です．）

(*) の直観的な意味は，平面上の点 P の位置ベクトルが，△ABC の 3 頂点の位置ベクトルそれぞれに適切な “重み” を付けた “加重平均” として表されるということです．「期待値」の意味と似ていますね．[→ I+A 7 10 1]

重要度↓ 上記において，(α, β, γ) のことを重心座標と呼ぶ流派もあります．その場合，1 つの点の「重心座標」が

$(\alpha, \beta, \gamma), (2\alpha, 2\beta, 2\gamma), (10\alpha, 10\beta, 10\gamma), \cdots$

と無数にあることになってしまいますが．

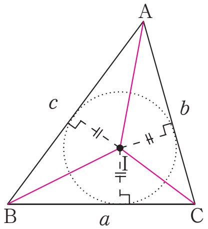
注　(∗) などの結果は，定理として使ってよいものではない気がします．■

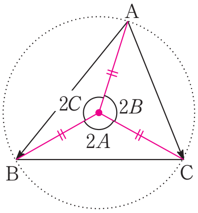
三角形の五心のうち傍心以外の点について，それが三角形の内部にあることを前提として，面積比を表す $\alpha : \beta : \gamma$ は次のようになります．

面積（比）	α	β	γ
重心	1	1	1
内心	a	b	c
外心	$\sin 2A$	$\sin 2B$	$\sin 2C$
垂心	$\tan A$	$\tan B$	$\tan C$

（傍心については，**[→演習問題 5 10 6]**）

重心についてはカンタンです．内心，外心については，次図をもとに各自で面積比を考えてみること：





垂心については，**[→ I+A 演習問題 5 9 17]**

上表の値を前ページ (∗) に代入した式が確かに成り立っていることを，これまで扱った問題を振り返りながら確認してみましょう．

「内心」については，**例題 5 9 c** の答えが前記 (∗) そのものです．

例題 5 9 d (1)「外心」，(2)「垂心」の結果を，任意の点 O を始点とする位置ベクトルで表してみると，次のようになります：

$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ などとおくと，外心 P について

$$\vec{p}-\vec{a} = \frac{4}{9}(\vec{b}-\vec{a}) + \frac{1}{6}(\vec{c}-\vec{a}).$$

$$\vec{p} = \left(1-\frac{4}{9}-\frac{1}{6}\right)\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}.$$

$$\vec{p} = \frac{1}{18}(7\vec{a}+8\vec{b}+3\vec{c}). \quad \cdots ④$$

（係数の和は 1.）

次に垂心 H について

$$\vec{h}-\vec{a} = \frac{1}{9}(\vec{b}-\vec{a}) + \frac{2}{3}(\vec{c}-\vec{a}).$$

$$\vec{h} = \left(1-\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\right)\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}.$$

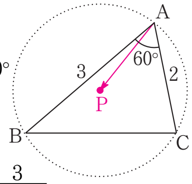
$$\vec{h} = \frac{1}{9}(2\vec{a}+\vec{b}+6\vec{c}). \quad \cdots ⑤$$

（係数の和は 1.）

④⑤式は，次のように書けます：

$$④: \vec{p} = \frac{7\vec{a}+8\vec{b}+3\vec{c}}{7+8+3}.$$

$$⑤: \vec{h} = \frac{2\vec{a}+1\cdot\vec{b}+6\vec{c}}{2+1+6}.$$



余弦定理より

$$\mathrm{BC}^2 = 3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos 60^\circ$$
$$= 9+4-6 = 7.$$

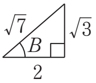
これと正弦定理より

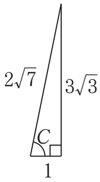
$$\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}.$$

$$\therefore\ \sin B = \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

$$\sin C = \frac{3}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

ここで，$\mathrm{AB}^2 < \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2$ が成り立つから C は鋭角．$\mathrm{AC} < \mathrm{AB}$ より $B < C$ だから B も鋭角．よって右図より





$$\cos B = \frac{2}{\sqrt{7}},\ \tan B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos C = \frac{1}{2\sqrt{7}},\ \tan C = 3\sqrt{3}.$$

以上より

$$\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$$
$$= 2\sin A\cos A : 2\sin B\cos B : 2\sin C\cos C$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} : \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}$$
$$= \frac{1}{4} : \frac{2}{7} : \frac{3}{28} = 7:8:3.$$

$$\tan A : \tan B : \tan C = \sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 3\sqrt{3}$$
$$= 2:1:6.$$

これで，④⑤において前記 (∗) が成り立っていることが確かめられました．

例題 5 9 f 外心，重心，垂心

根底 実戦 典型　[→ I+A演習問題 5 12 11]

△ABC の外心を O，重心を G，垂心を H とする．$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ が成り立つことを示せ．

方針 重心に関しては公式が使えます．垂心の捉え方は既に扱いましたね．

解答

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}. \cdots ①$$

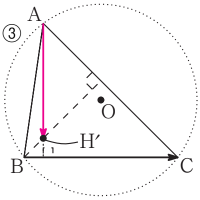
始点は統一

よって

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdots ②$$

を示せばよい．

注意！ ②は，これから示すべき未知なる等式です．■



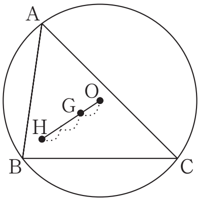
$$\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdots ③$$

とおいて，H′ が垂心 H と一致することを示す．

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{BC}\\ &= (\overrightarrow{OH'} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{BC}\\ &= (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \ (\because ③)\\ &= |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 = 0. \ (\because \text{O は外心})\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{AH'} \perp \overrightarrow{BC}$．同様に，$\overrightarrow{BH'} \perp \overrightarrow{CA}$．よって H′ は △ABC の垂心であり，H と一致する．これと③より，②が示せた．□

解説 本問の結果より，外心，重心，垂心の位置関係は右図のようになります．この 3 点が乗る直線は「**オイラー線**」と呼ばれます．



[→ I+A演習問題 5 12 11 例題 5 9 d (3)]

参考 ハイレベル↑ 重心の公式①における右辺の係数は，和が 1 である「重心座標」[→前問] ですから，始点が外心 O 以外のどの点であろうと同じ係数となります．

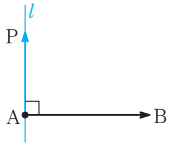
一方，垂心を表す②では，右辺の係数は和が 1 ではなく「重心座標」の形式ではないので，あくまでも始点が「外心 O」のときに限ってこのようなキレイな形になります．

参考 本問と同内容の証明は，既に I+A演習問題 5 12 11 で扱っていました．

コラム

$\vec{0}$ と垂直，内積 $= 0$

5 6 直前のコラムで述べた "解釈"：「$\vec{0}$ は，任意のベクトルと垂直」…㋑ について考えます．



例えば，点 A を通り AB に垂直な直線 l 上に点 P があるための条件 (∗) は，大雑把には「$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$」ですが，これでは P が A と一致して $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ となるケースが漏れてしまうので，一般的には

(∗)：「$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$ …①」または「P ＝ A」

P と A が一致

とします．しかし，㋑の立場をとるなら，「垂直」の中に「P=A」も包含されるので，(∗) は①だけで OK ということになります．また，条件 (∗) はけっきょく内積を用いて「$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$」と表されますから，㋑を認めておけば

「(∗)：P が l 上」$\Longleftrightarrow$「$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$」$\Longleftrightarrow$「内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$」

という関係が成り立ち，とてもスッキリしますね．㋑という解釈が世に広まることを願います．

言い訳 という訳で，本書では「または P=A」の部分をときどき**意図的に**サボります．

"解釈" してね

参考 大学以降では，ベクトルどうしの**直交**という概念があり，次のように明確に定義されています：

「2 ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が**直交**」$\Longleftrightarrow$「内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$」

例題 5 9 g 外心が始点 根底 実戦 典型 入試

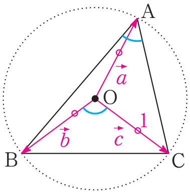
[→演習問題 5 10 7]

三角形 ABC の外接円は，中心が O で半径は 1 とする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと $5\vec{a}+4\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ …① が成り立つとき，∠A を求めよ．

着眼 外心が始点 → 「長さ」が等しい．問われているのは「角」．「長さ」と「角」を結びつけるものといえば，「内積」ですね．

注 ∠A とは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角ですが，長さが等しいのは外心 O を始点とするベクトルです．そこで，「円周角」と「中心角」の関係に注目します．

2 ベクトル $\vec{b}$, $\vec{c}$ のなす角を考え，内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めます．



解答

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$. …②

①を変形して

$$4\vec{b}+3\vec{c}=-5\vec{a}. \quad \cdots ①' \ ^{1)}$$

$$\therefore\ \left|4\vec{b}+3\vec{c}\right|^2=\left|-5\vec{a}\right|^2. \quad \cdots ③$$

$$(4\vec{b}+3\vec{c})\cdot(4\vec{b}+3\vec{c})=25\left|\vec{a}\right|^2.$$

$$16\left|\vec{b}\right|^2+24\vec{b}\cdot\vec{c}+9\left|\vec{c}\right|^2=25\left|\vec{a}\right|^2.$$

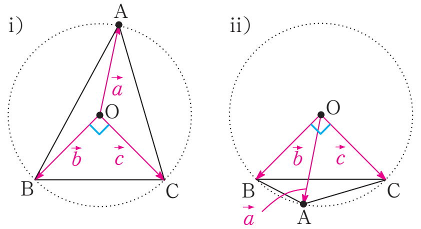
$$16+24\vec{b}\cdot\vec{c}+9=25. \ (\because\ ②)$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=0.$$

よって，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角は 90° ． …④

注 これが「中心角」だから「円周角」はその半分だから答えは 45°…とするのは誤り．次図のように 2 通りのケースが考えられるからです．

方針 ③は，「ベクトル」についての等式①′がもつ「向き」と「大きさ」に関する情報のうち，前者を捨てて後者のみを抜き出したものです．よって③から得た④だけでは解答できないのは当然ですね．捨ててしまっていた情報にも目を向けるべく，再び①′に戻ります．■



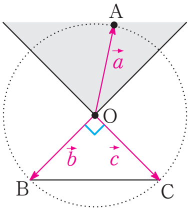
④より上の 2 つのケースが考えられる．

①′より

$$\vec{a}=-\frac{4}{5}\vec{b}-\frac{3}{5}\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}.$$

右辺の係数がともに負だから，A は右図の領域内にある．

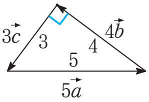


よって，i) の方だけが適するから，求める角は

$$\angle\mathrm{A}=\frac{1}{2}\cdot 90^\circ=45^\circ. /\!/$$

解説 1) : ①′のように $\vec{a}$ を移項してから両辺の大きさを比べることにより，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積だけを作り出すことに成功しています．経験がないと思い浮かびにくいアイデアです．

参考 ① は，3 ベクトル $5\vec{a}$, $4\vec{b}$, $3\vec{c}$ が表す矢印を “継ぎ足す” と右図のような三角形を 1 周してもとに戻ることを意味します．この図から，$\vec{b}\perp\vec{c}$ であることがわかりますね．



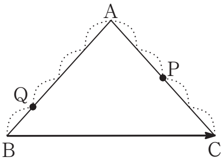
例題 5 9 h 正射影ベクトル 根底 実戦 入試

[→演習問題 5 10 8]

(1) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ $(\neq \vec{0})$ への正射影ベクトル $\vec{h}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ.

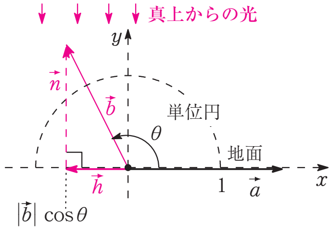
(2) (1)において，$\vec{a}\cdot\vec{h}=\vec{a}\cdot\vec{b}$ が成り立つことを示せ.

(3) 右図の △ABC において，AB = AC = 3，BC = 4 とする．内積 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の値を求めよ.



(4) 座標平面上で A(7, 4) から直線 $l: y=2x$ へ下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

解答 (1)



方針 「正射影ベクトル」とは切っても切り離せない“符号付長さ”を表現するため，座標平面を導入するのが賢い方法です. ■

図のように xy 平面をとると

$$\vec{h}=\underbrace{|\vec{b}|\cos\theta}_{\text{“符号付長さ”}}\cdot\underbrace{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}_{\text{単位ベクトル}}$$

$$=\frac{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

分子, 分母に $|\vec{a}|$ を補った

$$\overset{1)}{=}\underbrace{\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}}_{\text{“符号付長さ”}}\cdot\underbrace{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}_{\text{単位ベクトル}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}.\,/\!/$$

解説 1)：将来的にはこの式が直接書けるようにしましょう．そのときの頭の動きは…

分子：$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は，$|\vec{a}|$ と「$\vec{h}$ の符号付長さ」の積.

$|\vec{a}|$ は余計だから，それで割る.

注 (1)の結果を暗記してはダメ！「公式」扱いすると，それに縛られて柔軟な思考の妨げになります．赤字や上記**解説**で書いた**考え方を理解**し，その場で導きながら使いましょう.

注 正射影ベクトルは，「点と直線の距離公式」の証明[→Ⅱ+B 3 3]でも活躍しました.

(2) (1)より

$$\vec{a}\cdot\vec{h}=\vec{a}\cdot\overset{\text{実数}}{\boxed{\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}}}\vec{a}=\boxed{\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}}\vec{a}\cdot\vec{a}$$

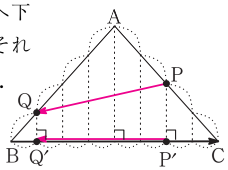
$$=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\cancel{|\vec{a}|^2}}\cancel{|\vec{a}|^2}=\vec{a}\cdot\vec{b}.\ \square$$

注 $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトルは $\vec{h}$. $\vec{h}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトルは $\vec{h}$ 自身．よって与式は当然成り立ちます（笑）.

別解 次のように $\vec{b}$ を分解する手法も覚えておきましょう：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\vec{h}+\vec{n})\ (\vec{n}\text{は図中})$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{h}+\vec{a}\cdot\vec{n}$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{h}\ (\because\ \vec{a}\perp\vec{n}).\square$$

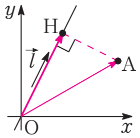
(3) P，Q から BC へ下ろした垂線の足をそれぞれ P′，Q′ とする．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ への正射影ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ だから，(2)より



$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$$
$$=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{P'Q'}\cdot\cos\pi$$
$$=4\cdot4\cdot\frac{5}{8}\cdot(-1)=-10.\,/\!/$$

注 「3」という長さは無関係（笑）.

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ の $\vec{l}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ への正射影ベクトルだから，(1)より



$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\vec{l}|^2}\vec{l}=\frac{1\cdot7+2\cdot4}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

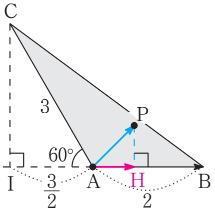
i.e. H(3, 6). //

例題 5 9 i 内積の最大，最小 根底 実戦 入試 [→演習問題 5 10 9]

(1) $AB=2$, $AC=3$, $\angle CAB=120^\circ$ である △ABC の周と内部を動く点 P がある．内積 $F:=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ の最大値，最小値を求めよ．

(2) O を中心とする半径 1 の円周 C 上に，$\angle BOA=90^\circ$ を満たす定点 A，B がある．点 P が C 上を動くとき，内積 $G:=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ の最大値，最小値を求めよ．

着眼 「内積」の**意味**を知っていれば簡単．



解答 (1) P から直線 AB へ垂線 PH を下ろすと（P が AB 上のときは H=P），

$$F=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HP})$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}.$$
$$(\because\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{HP}.)$$ 1)

H が動く範囲は，上図の線分 IB 全体． …①

i) H が A より右側のとき

$$F=AB\cdot AH\cdot\cos 0=AB\cdot AH(>0).$$

ii) H が A より左側のとき

$$F=AB\cdot AH\cdot\cos\pi=-AB\cdot AH(<0).$$

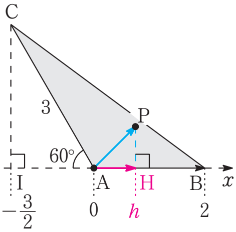
F が最大となるのは i) のときに限られ，

$$\max F=AB\cdot AB=2\cdot 2=4. /\!/$$

F が最小となるのは ii) のときに限られ，

$$\min F=-AB\cdot AI=-2\cdot\frac{3}{2}=-3. /\!/$$

解説 1)：要するに，内積 F とは「底辺 $|\overrightarrow{AB}|\times$ 正射影ベクトル $\overrightarrow{AH}$ の符号付長さ」です．このことがわかっている人にとって，上記のように i) と ii) に分けて議論するのは億劫（おっくう）．そんなときは，「座標」（数直線）を導入します．

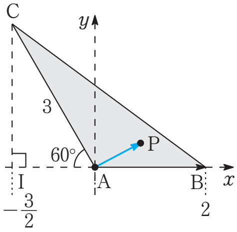


別解 （①以降）右のように x 軸をとり，H(h) とすると，$-\frac{3}{2}\leq h\leq 2$ であり，

$$F=2h.$$

$$\therefore \max F=2\cdot 2=4,$$
$$\min F=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-3. /\!/$$

注 どうせ座標を用いるなら，初めから座標平面を設定すれば単純明快です．■



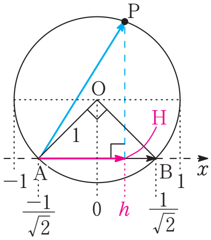
本解 右のように A を原点とする xy 平面上で $P(x, y)$ とすると

$$F=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$=2x.$$

$-\frac{3}{2}\leq x\leq 2$ より

$$\max F=2\cdot 2=4,\ \min F=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-3. /\!/$$

注 内積 F は，「y」と関係なく定まります．



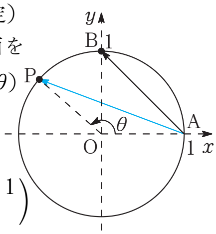
(2) P から直線 AB へ垂線 PH を下ろすと，(1)と同様に

$$G=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HP})$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}.$$

図のように x 軸をとり，H(h) とすると，h の変域は $-1\leq h\leq 1$ であり，

$$G=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\left(h-\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\sqrt{2}h+1.$$

$$\therefore \max F=\sqrt{2}+1,\ \min F=-\sqrt{2}+1. /\!/$$



別解 （座標平面を設定）右図のように xy 平面をとると，$P(\cos\theta, \sin\theta)$ とおけて

$$G=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$$
$$=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta-1\\\sin\theta\end{pmatrix}$$
$$=\sin\theta-\cos\theta+1=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1.$$

θ は任意だから…(以下略)…

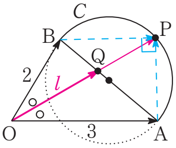
例題 5 9 j 角の二等分線と半円の交点

根底 実戦 入試　[→演習問題 5 10 10]

OA ＝ 3, OB ＝ 2, ∠BOA ＝ 60° である △OAB において，∠A の二等分線を l とする．また，AB を直径とする半円 C を，直線 AB に関して O と反対側に作る．l と C の交点を P として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．

方針　l については「角の二等分線」→「線分比」→「内分点公式」の流れで OK．C 上にあることをどう表せば計算が楽かを考えます．

解答　l と AB の交点を Q とすると，Q は AB を 3 : 2 に内分するから



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{3+2}.$$

P は OQ 上ゆえ，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\parallel 2\vec{a}+3\vec{b}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\ \cdots①$$ と表せる．

次に，[1] $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot2\cdot\frac{1}{2}=3$.

P は C 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}.\ \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0.$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=0.$$

これと①より

$$\left\{k\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)-\vec{a}\right\}\cdot\left\{k\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)-\vec{b}\right\}=0.$$

$$k^2\left|2\vec{a}+3\vec{b}\right|^2-k\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

$$k^2(4\cdot9+12\cdot3+9\cdot4)-k(2\cdot9+5\cdot3+3\cdot4)+3\overset{2)}{=}0.$$

$$36k^2-15k+1=0.\quad(12k-1)(3k-1)=0.$$

$$k=\frac{1}{12},\ \frac{1}{3}.$$

P に対応する k は，このうち大きい方の $\frac{1}{3}$.

これと①より　目分量でチェック

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}.\ /\!/$$

解説　1)：予め内積計算の準備をしておくこと．

2)：内積計算は，文字 k を主体とみて集約したまま進めること．

①で，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ にある分数係数を使うのは下手．

例題 5 9 k ベクトル方程式・基礎

根底 実戦 典型　[→演習問題 5 10 11]

平面上で定点 O を基準点とする位置ベクトルを考える．異なる 2 定点 A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$ に対して，動点 P$(\vec{p})$ が次の図形上にあるための条件を，ベクトルを用いて表せ．

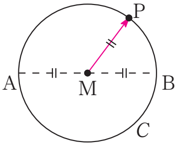
(1)　A，B を直径の両端とする円周 C　　(2)　線分 AB の垂直二等分線 l

語記サポ　直交座標において，ある図形 F 上の点 (x, y) が満たす条件を x, y で用いて表したものが F の**方程式**です．同様に，その条件をベクトルで表したものを，F の**ベクトル方程式**といいます．

方針　(1)(2)とも，2 通りの視点から求めてみましょう．それぞれが良い訓練となりますので．

(1)　**解答 1**（長さに注目）

AB の中点を M とすると，P が円周 C 上にあるための条件は



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right|.$$

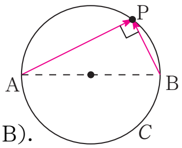
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|.$$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\left|\vec{a}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|.$$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\left|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|.\ /\!/\ \cdots①$$

解答 2（角に注目）

P が円周 C 上にあるための条件は



∠APB＝90° (or P＝A, B).

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ (P＝A, B でも成立).

$$\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{b}\right)=0.\ /\!/\ \cdots②$$

補足　前問では，**解答 2** の方の考え方を使いました．

注　①と②はもちろん同値なベクトル方程式です．②を変形して①を導いてみましょう．その際に大切なことは次の通り：

『ベクトルの内積に関する計算は，普通の文字式を展開・因数分解するのとまったく同じ感覚で実行できる．』ただし，内積を表すために必ず「・」を打つこと．そして「2乗」の所は必ず「$|\vec{\triangle}|^2$」（大きさの2乗）と書くこと．

以下においては対応する"普通の文字式"の計算を赤字で添えていきます．（動点の位置ベクトル $\vec{p}$ のところを変数っぽい文字 x で表しています．）

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0.$$

$$(x-a)(x-b)=0$$

$$|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

$$x^2-(a+b)x+ab=0$$

1) $$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2=\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab$$

ここで，右辺は

$$\frac{|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}}{4}$$

$$=\frac{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}{4}=\left|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|^2.$$

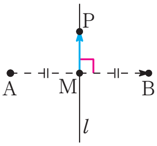
よって上式は，

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2=\left|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|^2.$$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\left|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|.$$ ①になった

解説　1)：「平方完成」も普通の文字式と同様に行えることは，逆向きに展開することを考えれば納得いくはずです．

(2)　**解答1**（角に注目）



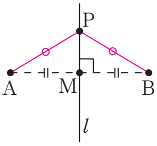
AB の中点を M とすると，P が直線 l 上にあるための条件は

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{MP}$ (or P = M).

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MP}=0$ (P = M でも成立).

$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\left(\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0.$ // …③

解答2（長さに注目）



P が直線 l 上にあるための条件は

$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$.

$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{p}-\vec{b}|$. // …④

注　④を変形して③を導きます．：

$$|\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{p}-\vec{b}|^2.$$

$$(x-a)^2=(x-b)^2$$ $|\vec{p}|^2$ は消える

$$-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{a}|^2=-2\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{b}|^2.$$

$$-2ax+a^2=-2bx+b^2$$

$$2(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{p}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2.$$

$$2(a-b)x=a^2-b^2$$

$$2(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{p}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}).$$

$$2(a-b)x=(a-b)(a+b)$$

2) $$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\left(\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0.$$ ③になった

$$(a-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)=0$$

解説　2)：「因数分解」も普通の文字式と同様です．「展開」の逆に過ぎませんので．

重要　本問で学んだ「円」や「直線」の，「距離」や「角」に注目して作られるベクトル方程式の関係が，今後の土台となります．

例題 5 9 I ベクトル方程式→図示 根底 実戦 典型 [→演習問題 5 10 11]

△ABC を含む平面上で，次のベクトル方程式で表される点 P の軌跡を図示せよ．

(1) $2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$．　(2) $2\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=0$．

方針 (1)(2)とも訳が分からないベクトル方程式ですね (笑)．「始点を統一」と「動点 P を集約」．この 2 つを明確に意識して，意味の分かる形に変形します．

他の点でもできますが

(1)(2)とも，与式の中に A を始点とするベクトルが多いので (笑)，始点を Aに揃えてみます．

内積に関する等式の変形は，前問で見た通り普通の文字式と同じ感覚で．

解答 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおく．

(1) 与式を変形すると

$$2|\vec{p}|^2+|\vec{p}-\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2.$$

$$2x^2+(x-b)^2=b^2$$

$$3|\vec{p}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{p}=0.$$

$$3x^2-2bx=0$$

$$|\vec{p}|^2-\frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{p}=0.\ \cdots①$$

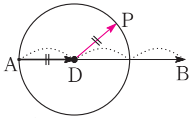
$$x^2-\frac{2}{3}bx=0$$

$$\left|\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{b}\right|^2=\left|\frac{1}{3}\vec{b}\right|^2.$$

$$\left(x-\frac{1}{3}b\right)^2=\left(\frac{1}{3}b\right)^2$$

AB を 1 : 2 に内分する点を D とすると

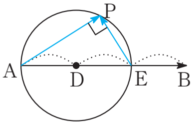
$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2.\ \ |\overrightarrow{\mathrm{DP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|.$$



よって P の軌跡は，右図のような中心 D，半径 AD の円周．//

別解1 ①の後，以下のようにしても OK：

$$\vec{p}\cdot\left(\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{b}\right)=0.$$



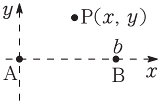
右図のように AB の 3 等分点 D，E をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}})=0.\ \ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EP}}=0.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{EP}}\ \text{(or P = A, E)}.$$

よって P の軌跡は，右上図のような AE を直径とする円周 (中心は D)．//

別解2 座標を設定し，「ベクトル方程式」を「x, y の方程式」に書き直す手もあります．

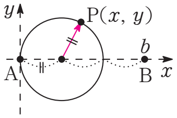


A を原点とする xy 平面をとり，B$(b, 0)$，P(x, y) とおくと，与式は

$$2(x^2+y^2)+(x-b)^2+y^2=b^2.$$

$$3x^2+3y^2-2bx=0.$$

$$\left(x-\frac{b}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{b}{3}\right)^2.$$



よって P の軌跡は右図の通り．

(2) 与式を変形すると

$$2(\vec{c}-\vec{p})\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+2(-\vec{p})\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=0.$$

$$2(c-x)b+b^2+2(-x)c+c^2=0$$

$$-2\vec{p}\cdot(\vec{b}+\vec{c})+|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=0.$$

$$-2x(b+c)+b^2+2bc+c^2=0$$

$$2(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}-|\vec{b}+\vec{c}|^2=0.$$

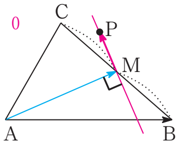
$$2(b+c)x-(b+c)^2=0$$

$$(\vec{b}+\vec{c})\cdot\{2\vec{p}-(\vec{b}+\vec{c})\}=0.\ \cdots②$$

$$(b+c)\{2x-(b+c)\}=0$$

$$\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\cdot\left(\underset{1)}{\vec{p}}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)=0.$$

$$\frac{b+c}{2}\left(x-\frac{b+c}{2}\right)=0$$



BC の中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}=0.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MP}}\ \text{(or P = M)}.$$

∴P の軌跡は，M を通り AM と垂直な直線．//

解説 1)：何気ない変形ですが，このように動点の位置ベクトル $\vec{p}$ **の係数を「1」にすること**により，この後「$\overrightarrow{\mathrm{MP}}$」という表現が可能となっています．式変形の重要なポイントです．

例題 5 9 m ベクトル方程式・応用

根底 実戦　入試　　[→演習問題 5 10 11]

△ABC を含む平面上で，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}})=0$ …① を満たす点 P の軌跡を F とする．

(1)　F を求めよ．

(2)　△ABC の 3 辺の長さが AB = 3, BC = 4, CA = 5 であるとする．P が F 上を動くとき内積 $G:=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

注　例題 5 9 l と例題 5 9 i のミックスです．

「内積 ＝ 0」の形ですが，「何と何が垂直か？」を考えようとしてもよくわかりませんね．その原因は，始点が動点P だからです．

方針　そこで，始点を三角形の 1 頂点 (定点) に**統一**しましょう．そして，動点 P を**集約**します．

着眼　①は，P=A のとき左辺 ＝ 0 より成立します．つまり軌跡 F は点 A を含みます．

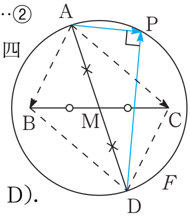
①の括弧内で，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ のみ符号が「＋」ですね．そこで，A を始点にしてみます (他の頂点でも OK です)．

解答　(1)　$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおくと，①は

始点を A に統一

$$-\vec{p}\cdot(-\vec{p}-\vec{b}+\vec{p}-\vec{c}+\vec{p})=0.$$

$$\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{b}-\vec{c})=0.\ \cdots②$$



よって，図のように平行四辺形 ABDC を作ると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=0.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DP}}\ (\text{or P = A, D}).$$

よって P の軌跡 F は，

AD を直径とする円周．つまり

BC の中点 M を中心とする半径 MA の円周．//

補足　平行四辺形の対角線 AD，BC は，それぞれの中点で交わります．■

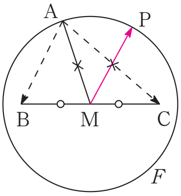
別解　②のあと，次のように平方完成して $\vec{p}$ をさらに集約する手もあります：

$$|\vec{p}|^2-(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}=0.$$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|^2=\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|^2.$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|.$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|.$$



よって P の軌跡 F は，M を中心とする半径 AM の円周．//

注　①式は B，C に関して対称 (互換しても不変)．そこで，B と C の“真ん中”を始点にしてみましょう．アッサリ解決です：

①を変形すると

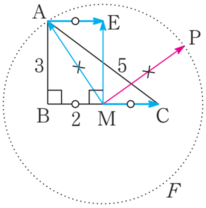
$$(\overrightarrow{\mathrm{MA}}-\overrightarrow{\mathrm{MP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MA}}-\overrightarrow{\mathrm{MP}}-\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}})=0.$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{MA}}-\overrightarrow{\mathrm{MP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}})=0\ (\because\ \overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\vec{0}).$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|^2=0.\ \text{i.e. } |\overrightarrow{\mathrm{MP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|.$$

注　いつでもこのように上手くいく訳ではありません．前記平方完成などもマスターすること．

(2)　**方針**　内積 G において，始点を円 F の中心である M に**統一**し，動点 P を**集約**しましょう．■



△ABC は ∠B= 90° の直角三角形．これと(1)より

F は上図のような円周で，半径は $\mathrm{MA}=\sqrt{13}$.

$$G=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}$$

$$=(\overrightarrow{\mathrm{MP}}-\overrightarrow{\mathrm{MA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MP}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}})$$

始点を M に統一

$$=|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}$$

$$=\underbrace{13}_{1)}-\overrightarrow{\mathrm{ME}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}}_{2)}\ (\text{E は図中の点})$$

$$=13-3\cdot\sqrt{13}\cdot\cos\theta+2\cdot(-2)$$

(θ は $\overrightarrow{\mathrm{ME}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ のなす角)

$$=9-3\sqrt{13}\cos\theta.$$

P は F 上をぐるり 1 周する

θ の変域は $[0,\pi]$ だから，求める変域は，

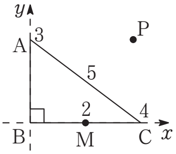
$$9-3\sqrt{13}\leq G\leq 9+3\sqrt{13}.$$ //

(次ページへ続く.)

（前ページから続く.） **注** 1)：これに気付けずに上の式をまたまた平方完成してはダメ. P の動きという**現象そのもの**を見てないから起こる失敗.

解説 2)：「内積 $\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}$」とは，『$\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ と，それへの $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ の**正射影ベクトル** $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ の内積』です．あとは，$|\overrightarrow{\mathrm{MC}}|$ と，$\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ の“符号付長さ”の積を求めるだけです.

参考　仮に，(2)の △ABC において軌跡 F を求めるなら，∠B= 90° に注目して，右のように座標平面を設定する手もあります.



まず，始点を原点 B に統一します：

$$(\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}})=0.$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}})=0.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y-3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-4 \\ y+3 \end{pmatrix}=0.$$

$$x(x-4)+(y-3)(y+3)=0.$$

$$x^2+y^2-4x-9=0.\quad (x-2)^2+y^2=13.$$

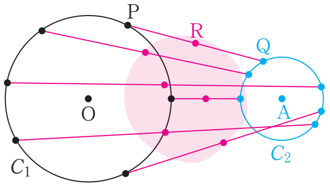
この円の中心は BC の中点 (2, 0)．また，A(0, 3) はたしかにこの方程式を満たしますね.

例題 59n　2つの動点

根底 実戦　典型 入試　[→演習問題 5 13 5]

平面上に，点Oを中心とする半径2の円 C_1 と，Oと異なる点Aを中心とする半径 1 の円 C_2 がある．点Pが C_1 上，点Qが C_2 上を動くとき，線分PQの中点Rが動く範囲 D の面積 S を求めよ.

下書き　つかみどころのない問題ですね．まずは現象そのものを観察しましょう（O と A の距離はテキトーに).



なんとなくではありますが，R が存在しそうな範囲が見えてきました.

方針　しかし，こうした“実験”を重ねても「解答」にはなりません．そこで，「2 つが動く」ときの 1 つの鉄則：「**1 つずつ動かす**」を用いましょう．「2 変数関数」における **1 文字固定**と同じ方法論です.

まずどちらを固定しどちらを先に動かすか？そこは試行錯誤・トライアル&エラーです.

それから，円 C_1, C_2 のベクトル方程式，つまり P，Q が満たすべき条件を事前に表しておきましょう.

解答　O を始点とする位置ベクトルを，A($\vec{a}$)，P($\vec{p}$)，などと表す.

P，Q は次のベクトル方程式を満たす：

$C_1\cdots|\vec{p}|=2$ …①

$C_2\cdots|\vec{q}-\vec{a}|=1$ …②

また，R は PQ の中点だから

$$\vec{r}=\frac{\vec{p}+\vec{q}}{2}.\ \cdots③$$

1° P を固定し，Q を C_2 上で動かす.

着眼　③式において，1° 段階では $\vec{p}$ は一定で，$\vec{q}$ と $\vec{r}$ が動きます．軌跡の求め方の大原則は，

★『消したい $\vec{q}$ を残したい $\vec{r}$ で表す．』

[→Ⅱ+B 例題 37c] ■

③より，$\vec{q}=2\vec{r}-\vec{p}$. ●●● ★を体現した式

これを②へ代入して

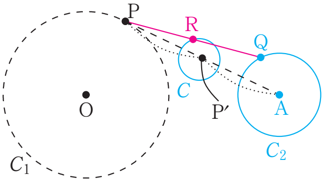
$$|2\vec{r}-\vec{p}-\vec{a}|=1.\qquad \overset{1)}{\left|\vec{r}-\frac{\vec{p}+\vec{a}}{2}\right|}=\frac{1}{2}.$$

AP の中点を P′ とすると，$\vec{p}\,'=\dfrac{\vec{p}+\vec{a}}{2}$ …④

であり，

$$|\vec{r}-\vec{p}\,'|=\frac{1}{2}.\qquad |\overrightarrow{\mathrm{P'R}}|=\frac{1}{2}.$$

よって，1° における R の軌跡は，次図のような中心 P′ 半径 $\frac{1}{2}$ の円周 C.



2° P を C_1 上で動かすときの，C の中心 P′ の軌跡 C' を求める.

方針　④を，前記鉄則★にのっとって変形. ■

④より $\overrightarrow{p}' $ … $\vec{p}=2\vec{p}\,'-\vec{a}$. これを①へ代入して

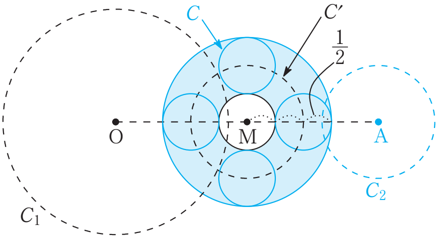
$$|2\vec{p}\,'-\vec{a}|=2.\qquad \left|\vec{p}\,'-\frac{\vec{a}}{2}\right|=1.$$

OA の中点を M とすると，$\vec{m}=\dfrac{\vec{a}}{2}$ であり，

$$|\vec{p}\,'-\vec{m}|=1.\qquad |\overrightarrow{\mathrm{MP'}}|=1.$$

よって，2° における P′ の軌跡 C' は，中心 M 半径 1 の円周.

以上 1°, 2° より，R の存在範囲 D は次図の通り：



$$\therefore\ S=\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=2\pi.\,/\!\!/$$

解説　題意の面積 S は，C_1, C_2 の中心間距離 OA に関係なく定まりました.

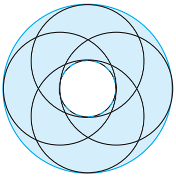
1)：こうして，動点 R の位置ベクトル $\vec{r}$ の係数を「1」にすることが，何気に重要ポイントです．このおかげで，3 行下において「$\overrightarrow{\triangle\mathrm{R}}$」という表現が可能になっていますね.

注　けっきょく D は，次のような図形でした：

　半径 $\frac{1}{2}$ の円周 C が，その中心 P′ が

　半径 1 の円周 C' 上を 1 周するときの通過領域.

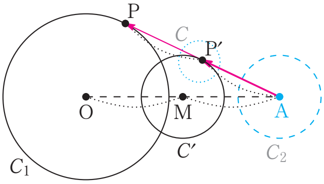
このように，「小さい円 C が大きい円 C' のまわりを 1 周する」ときの通過領域は，直観的に把握しやすいですね.



P，Q を動かす順序を入れ替えて解答してみると，「大きい円が小さい円のまわりを 1 周する」という状況になります．もちろん同じ結果は得られるのですが，内側に “空洞” ができることが見抜きづらくなります.

これとよく似た話題に，Ⅱ+B **演習問題** 3 10 3 **参考 2** で触れています.

参考　作業 2° を，ベクトルを用いず，Ⅰ+A 5 2 5 で学んだ「相似」という概念によって記述してみます.



P′ は AP の中点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP'}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}.\ ^{2)}$$

よって，

C_1 と C' は点 A を**中心**として**相似の位置**にあり，

相似比は $1:\frac{1}{2}$ である.

これによって C' は，中心 M，半径 $2\cdot\frac{1}{2}=1$ の円周であることがわかります.

本問で扱った「円周」という図形はとてもキレイで，ベクトル方程式による明快な表現①②があるのでそれを利用するのが楽ですが，円以外の図形となると，このような「相似の位置」という考え方が不可欠になってきます.

[→**演習問題** 5 13 5]

補足　2)：この等式は，④を変形して

$$\vec{p}\,'-\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{p}-\vec{a})$$

としても得られます.

この関係によって C_1 を C' に移す変換を，**中心相似変換**，もしくは**伸縮写像**というのでしたね.

10 演習問題B

5 10 1 根底 実戦

平面上で，次の内積の値をそれぞれ求めよ．

(1) $\text{AB}=5,\ \text{AC}=4,\ \angle\text{CAB}=120^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}$

(2) $\text{AB}=4,\ \text{AC}=5,\ \text{BC}=6$ のとき，$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}$ (3) $\text{AB}=4,\ \text{AC}=5,\ \text{BC}=5$ のとき，$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}}$

(4) $\vec{a}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ (5) $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$

5 10 2 根底 実戦

座標平面上で，以下の問いにそれぞれ答えよ．

(1) $\vec{a}:=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$ と平行で大きさが 10 であるベクトル $\vec{v}$ を求めよ．

(2) 直線 $l\colon y=\dfrac{1}{2}x$ を原点 O のまわりに $+30^\circ$ 回転した直線を m とする．m と平行な単位ベクトル $\vec{v}$（x, y 成分はともに正）を求めよ．

(3) $\vec{a}:=\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$ と垂直で大きさが 10 であるベクトル $\vec{v}$ を求めよ．ただし，$\vec{v}$ の x 成分は正とする．

(4) 座標平面上に AC = BC の二等辺三角形 ABC があり（C は第 1 象限），$\text{A}(1,1),\ \text{B}(7,3)$，$\text{AC}=\text{BC}=5\sqrt{2}$ とする．C の座標を求めよ．

5 10 3 根底 実戦 典型

座標平面上に 3 点 $\text{A}(-1,1),\ \text{B}(t,t^2),\ \text{C}(t-1,t-1)\ (t\neq-1)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 AB の長さを求めよ． (2) $\theta:=\angle\text{CAB}$ を求めよ． (3) $\triangle\text{ABC}$ の面積を求めよ．

5 10 4 根底 実戦

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=5$ のとき，$\vec{v}:=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ の大きさが最小となる実数 t の値を求めよ．

5 10 5 根底 実戦

平行四辺形 OABC があり，$\text{OA}=3$，$\text{OC}=2$，$\angle\text{COA}<90^\circ$ であり，面積は $3\sqrt{3}$ であるとする．OC の中点を M，BC を 1 : 2 に内分する点を D とし，D から MA に垂線 DH を下ろす．線分比 AH : HM を求めよ．

5 10 6 根底 実戦 典型 重要

$\triangle\text{ABC}$ において，3 辺の長さを $\text{BC}=a,\ \text{CA}=b,\ \text{AB}=c$ とする．

(1) 内角 ∠A の二等分線 l と，∠B の外角の二等分線 m の交点を P をする．$\overrightarrow{\text{AP}}$ を $\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}$ で表せ．

(2) P は ∠C の外角の二等分線 n 上にあることを示せ．

5 10 7 根底 実戦 典型

平面上に三角形 ABC と点 O があり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $|\vec{c}|=2$ …①, $\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}=\vec{0}$ …② が成り立つ．

(1)　△OAB の面積を求めよ．　　(2)　△ABC の面積を求めよ．

5 10 8 根底 実戦

A(1, 1) を中心とする半径 2 の円を C とする．点 B(5, 4) から C へ引いた 2 本の接線の接点を P，Q とするとき，直線 PQ 上の任意の点を R(x, y) として，以下の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ …① を示せ．　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の値を求めよ．

(3)　①を，x, y の関係式として表せ．

5 10 9 根底 実戦 入試

半径 1 の円周 C 上に異なる 3 つの動点 P，Q，R がある．内積 $F:=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の最大値，最小値を求めよ．

5 10 10 根底 実戦 入試

OA $=3$, OB $=5$, AB $=4$ である △OAB において，O を基準点とする位置ベクトルを考え，A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$ とする．

AB の中点を M とし，A を中心とする半径 2 の円周を K とする．直線 OM と K の交点の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

5 10 11 根底 実戦 典型

2 点 A，B を含む平面上で，次のベクトル方程式で表される点 P の軌跡をそれぞれ求めて図示せよ．

(1)　$4\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$　　(2)　$2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=0$

5 10 12 根底 実戦 入試

平面上で，点 O に関する位置ベクトルを，A$(\vec{a})$ $(\vec{a}\neq\vec{0})$，P$(\vec{p})$，Q$(\vec{q})$ とする．

(1)　A を中心として O を通る円 C のベクトル方程式を求めよ．

(2)　半直線 OP 上に，OP·OQ $=1$ となる点 Q をとる．P が C(O を除く) 上を動くとき，Q はある直線上を動くことを，(1)を利用して示せ．

5 10 13 根底 実戦 入試

k, l は正の定数で $lk\neq1$ とする．

平面上で，図形 F と F' は点 O を中心として相似の位置にあり，相似比は $1:k$ とする．…①

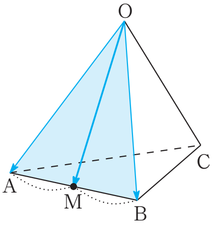
また，図形 F' と F'' は O と異なる点 A を中心として相似の位置にあり，相似比は $1:l$ とする．…②

このとき，図形 F と F'' はある点 B を中心として相似の位置にあることを示し，その相似比を求めよ．

また，B は直線 OA 上にあることを示せ．

11 空間ベクトル

1 平面ベクトルとの違い



空間内で考えるといっても，1つ1つの局面においては平面上で議論することが多く，例えば四面体OABCの辺ABの中点Mの位置ベクトルは，**平面OAB上**で考えればOK．よって空間ベクトルにおいても，多くの場合平面ベクトルで学んだことが**そのまま**適用できます．加法，減法，実数倍なども平面ベクトルと同様です．空間ベクトルで新たに学ぶことなんて，次の**3つのみ**（笑）．

1° 分解の一意性：平面は2ベクトルへの分解．空間では3ベクトルへの分解．

2° 平面での「共線条件」に匹敵する「共面条件」が新たに登場．

3° 座標における成分表示が，平面の2成分から，空間では3成分になる．

次項以降で，1つずつ見ていきます

3つとも，現れるベクトルや成分の個数が増えるだけ．**考え方はほぼいっしょ**（笑）．

語記サポ 「共面」とは，4個（以上）の点が共通な平面上にあるという意味．

2 分解の一意性（空間）

ベクトルの分解（空間） **原理**

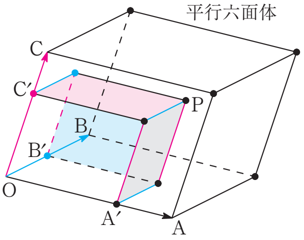
1) 同一平面上にない

4点O, A, B, Cが共面でないとき，空間内の任意の点Pに対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に“分解”

を満たす実数の組(s, t, u)が**存在**し，しかもそれは**一意的**である．



〔証明〕 点Pに対し，右上図のようにPを通り平面OBCなどと平行な平面を作ると交点A′, B′, C′が1つに定まり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+\overrightarrow{\mathrm{OC'}}.\ \cdots②$$

また，A′, B′, C′に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB'}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC'}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \cdots③$$

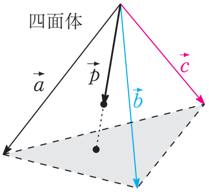
となるs, t, uが1つに定まる．

③を②へ代入すると①を得るから，Pに対して①を満たす(s, t, u)が1つに定まる．□

補足 「1つに定まる」＝「ただ1つだけ存在」．

注 5 3 1 のベクトルの分解（平面）の証明では「平行線」を利用したのに対し，ここでは「平行面」を用いました．

証明過程のどこを見ても，5 3 1 のベクトルの分解（平面）の証明で2つだったのが3つに増え**ただけ**．原稿も，もちろん“コピペ”（笑）．



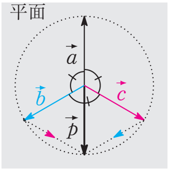
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおいて，抽象化すると次の通り：

3ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は右図のように四面体の3辺をなす 2) とする．

空間内の任意のベクトル $\vec{p}$ に対し，

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$$

を満たす実数の対(s, t, u)が**存在**し，しかもそれは**一意的**である．



注 1)2)：平面と同様，この「前提条件」への言及の仕方として，他に「$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が一次独立（線型独立）」という言い回しもあります［→**例題5 11 b後のコラム**］．

注意！ 1)2)：この前提を欠き，右図のように3ベクトルが“ペシャンコ”になっていると，次のように複数の異なる分解法ができてしまいます．

㋐ $\vec{p}=-1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}$， ㋑ $\vec{p}=0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{c}$ ■

前記で考えた「存在」と「一意」のうち，後者のみを考えた次の結論も覚えておきたいです：

“係数比較” **原理** “ペシャンコ”でない

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は3) 一次独立だとする．このとき，

$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c} \Longrightarrow s=s',\ t=t',\ u=u'.$$

注 3)：不本意ながら，この意味不明な単語（笑）を使うことになってしまいました[→**例題5 11 b後のコラム**]．空間における分解の一意性の前提条件は，「平行でない」という言い方では表せません．例えば前ページ最後の例では，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はどの 2 ベクトルも平行ではないですが，“ペシャンコ”なので前提条件を満たしていませんね．■

この性質を，平面と同様，前述した「平行面」による直観的手法とは別ルートで証明してみましょう．

例題 5 11 a 分解の一意性（空間） 根底 実戦

[→演習問題5 6 8]

s, t, u, s', t', u' は実数とし，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立 …① だとする．
$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c}$ …② のとき，$s=s',\ t=t',\ u=u'$ が成り立つことを背理法で示せ．

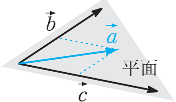
方針 ①と矛盾する結論を導くことが目標です．

解答 ②より

$$(s-s')\vec{a}=(t'-t)\vec{b}+(u'-u)\vec{c}.$$

仮に $s-s' \neq 0$ としたら，

$$\vec{a}=\frac{t'-t}{s-s'}\vec{b}+\frac{u'-u}{s-s'}\vec{c}.$$



よって 3 ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 4) 同一平面上にある．しかしこれは①に反す 5)．よって，

$s-s'=0$, i.e. $s=s'$.

同様にして，$t=t',\ u=u'$．□

注 4)：ベクトルには「位置」という概念がありませんから，より正確には，「同一平面上に乗せることができる」「同一平面上の矢印で表せる」とするべきですが．

5)：このとき，「一次独立」という単語が意味不明なのでピンとこなくなりますね．だから，「不本意」だと言ったのです．とりあえず，「一次独立」＝「ペシャンコでない」と覚えるべし（笑）．

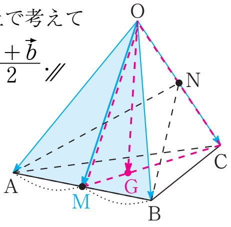
問 「四面体とベクトルの分解」

四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．次の各点について，O を始点とした位置ベクトルを，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ．

(1) 辺 AB の中点 M
(2) 線分 MC を 1：2 に内分する点 G
(3) 辺 OC の中点を N として，△ABN の重心 G′

解答 (1) 平面 OAB 上で考えて

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.\!/\!/$$



(2) 平面 OMC 上で考えて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OM}}+1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{1+2}=\frac{2\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\vec{c}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.\!/\!/$$

注 (2)の点 G は，もちろん △ABC の重心です．その位置ベクトルは，平面 ABC 上にない点 O を始点とした場合にも，平面上に始点をとった場合とまったく同形になることがわかりましたね．

(3) **方針** (2)で，重心公式は空間内でも使えるとわかりましたので…■

$$\overrightarrow{\mathrm{OG'}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}.\!/\!/$$

3 共面条件

共線条件と全く同様な 3 つの形があります．次の**定理**を証明過程も含め**全体セットで**理解して覚えること．これら 3 つのスタイルを，今後状況次第で使い分けます．

共面条件 **定理**

A，B，C は共線でない 3 点

点 P が，平面 ABC上にあるための条件は，ある実数 t, u を用いて次のように表せること：

（O は任意の点）

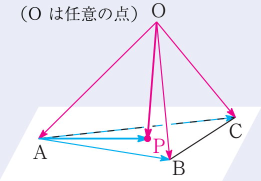
❶ **単純形**
（始点を含む共面）
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$
平面ベクトルの常識

平面 ABC 上のベクトル

❷ **変数集約形**
（始点を含まない共面）
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$
和に分解
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\underline{t}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\underline{u}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$
t, u が**集約**

❸ **始点統一形**
（始点を含まない共面）
$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+u(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$
始点変えたきゃ差にばらせ
$$=(1-t-u)\underline{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}+t\underline{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}+u\underline{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}.$$
始点が**統一**

和 ＝ 1



例題 5 11 b 交点の位置ベクトル（空間） 重要度↑

根底 実戦 典型 **[→演習問題 5 13 2]**

四面体 OABC において，△OBC の重心を G， 線分 AG を 3：1 に内分する点を I とする．次の各ベクトルを $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ．

(1) 直線 OI と平面 ABC の交点を P として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

(2) 辺 AB を 1：2 に内分する点を D，直線 DI と平面 OBC の交点を Q として，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

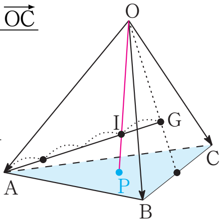
方針 頂点 O を含んだ「OI 上」という共線条件があるので，次の方針で．

- 始点を頂点 O に統一する．
- 3 ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて他を表す．

注 問題中に「O」という名の点がある場合，そこには通常「原点」＝「origin」という意味が込められており，作問者が「ベクトルの始点とせよ」と指示しているようなものです．例外が絶対ないとは断言できませんが．

解答 (1) G は △OBC の重心だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$$
$$=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$



I は線分 AG を 3：1 に内分するから

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{3+1}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+3\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

- P は OI 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{OI}}\,/\!/\,\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$ よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^{1)}\cdots①$$ と表せる．❶

共線条件番号

- P は平面 ABC 上にあるから

共面条件番号

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s-t)\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}_{\vec{a}}+s\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}_{\vec{b}}+t\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}_{\vec{c}}\cdots②$$ ❸

とも表せる．

- 4 点 O，A，B，C は共面でない 2) から，①②より

$$\begin{cases}k=1-s-t,\\ k=s,\\ k=t.\end{cases}$$ 辺々加えると

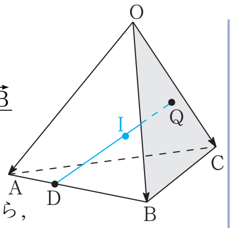
$$k+k+k=1.\therefore\ k=\frac{1}{3}.$$

これと①より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).//$$

注 1)：分数係数 $\frac{1}{4}$ は使いませんよ！

2)：2 本の赤線の間を省いた“解答”が多いですが，この前提条件への言及を怠ったものは誤答です．**[→例題 5 5 c (2)注意！]**



(2)　D は辺 AB を 1：2 に内分するから

$$\overrightarrow{OD}=\frac{2\overrightarrow{OA}+1\cdot\overrightarrow{OB}}{1+2}$$

$$=\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b}).$$

∘ Q は DI 上にあるから，

$$\overrightarrow{OQ}=(1-x)\overrightarrow{OD}+x\overrightarrow{OI}$$

$$=(1-x)\cdot\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}+x\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}\quad\cdots③$$

と表せる．

∘ Q は平面 OBC 上にあり，

[3] $\overrightarrow{OQ}=0\vec{a}+u\vec{b}+v\vec{c}$ …④ とも表せる．

∘ 4 点 O，A，B，C は共面でないから，③④より

$$\frac{2}{3}(1-x)+\frac{x}{4}=0,$$

$$\frac{1-x}{3}+\frac{x}{4}=u,\ \frac{x}{4}=v.$$

$$\therefore 8(1-x)+3x=0.\ x=\frac{8}{5}.$$

これと③より

$$\overrightarrow{OQ}=-\frac{3}{5}\cdot\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}+\frac{8}{5}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

$$=\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}.\text{//}$$

注　[3]：ここからの 4 行で薄字で書いた部分は通常書かずに済ませます．ただし，「前提条件」への言及は忘れずに．

別解　$\overrightarrow{OP}$ の手軽な求め方として，次が有名です：

$$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\underbrace{\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}}_{\overrightarrow{OP'}}.$$

ここに，P′は △ABC の重心．…⑤

$$\overrightarrow{OI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OP'}.\quad\cdots⑥$$

⑤より P′ は平面 ABC 上．

⑥より P′ は OI 上．

よって，P′ は OI と平面 ABC の交点．つまり，P′ と P は同一な点．

$$\therefore\ \overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).\text{//}$$

「P′」という，交点 P とは別に定義した点を用いるのがポイントです．

参考　$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ において，始点を任意の点 X に変えると，

$$\overrightarrow{XI}-\overrightarrow{XO}$$

始点変えたきゃ差にばらせ

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XO}).$$

$$\therefore\overrightarrow{XI}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}).$$

右辺は，X を始点とした 4 頂点の位置ベクトルの相加平均の形でキレイですね．この点 I は四面体 ABCD の**重心**と呼ばれます．

コラム

分解の一意性（空間）の前提条件

（平面）については[→5 6直前のコラム]

分解の一意性（空間）の前提条件への言及方法として，右図において以下のようなものがあります：

① 「4 点 O，A，B，C が共面でない」

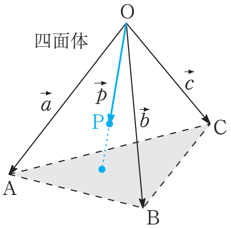
② 「$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立（ or 線型独立)」

これらの表現は，平面の場合とよく似ているので扱いやすいですね．

平面の場合と同様，本書では主に①を用いています．筆者の本音としては，「4 つの点」ではなく「3 つのベクトル」の関係として言及したいので，

③「$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は共面でない」

と表現したいのですが，市民権が得られていないようなので…(用いている書物もありますが).



注　空間においては，「平行でない」という言い方は通用しません．5 11 2 注意！のような “ペシャンコ” な状況を排除できないからです．

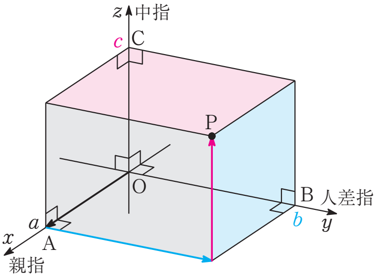
4 座標空間

注　本書では，既に Ⅰ+A 5 の最後や Ⅱ+B 2 の最後で軽く紹介してある内容です．■

空間内で，O を共通の原点とする 3 本の数直線を，右図のようにどの 2 本も直交するようにとります[1]．これら数直線を x 軸，y 軸，z 軸（総称して座標軸）といいます．

空間内の点 P に対して，P を通り各座標軸に垂直な平面とその座標軸の交点 A，B，C，およびそれらの各軸上での座標 a, b, c が 1 つに定まります．

逆に，A(a)，B(b)，C(c) に対して，各点で座標軸と直交する 3 平面の交点として P が 1 つに定まります．

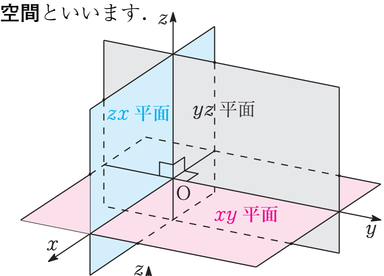


このようにして，任意の点 P と 3 実数の組 (a, b, c) が 1 対 1 に対応付けられます[2]．この (a, b, c) を P の座標といい，このように座標が設定された空間を**座標空間**といいます．

注　[1]：右手の 3 本指が，図中に書いた向きになるようにとるのが決まりです．これを**右手系**といいます．

[2]：もっとかいつまんで言ってしまうと，原点 O から点 P に到る“移動”が，x 軸方向へ a，y 軸方向へ b，z 軸方向へ c であるということです．実用上は，これで事足ります（笑）．

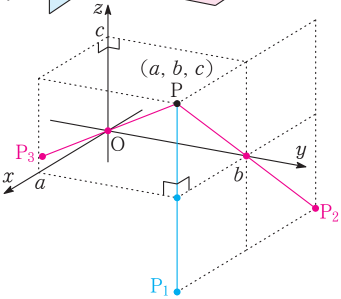
語記サポ　x 軸と y 軸を含む平面のことを xy 平面といいます．yz 平面，zx 平面についても同様です．



問　座標空間で，点 P(a, b, c) を xy 平面，y 軸，原点 O に関して対称移動した点をそれぞれ P_1，P_2，P_3 とする．各点の座標を求めよ．（結果のみ答えよ．）

着眼　x, y, z 座標の符号がそれぞれどうなるかを，図から判断してください．

解答　$P_1\,(a, b, -c)$, $P_2\,(-a, b, -c)$, $P_3\,(-a, -b, -c)$.//

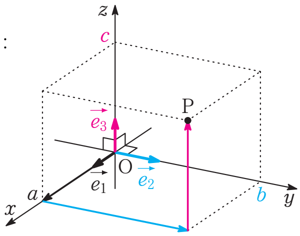


5 座標空間におけるベクトルの成分表示

前項の**注**[2] で述べた“移動”を考えれば，既に本項の説明は済んでいるようなものです．座標平面の場合と同様，原点 O から点 P(a, b, c) に到る x, y, z 軸方向への“移動量”が，ベクトルの成分となります．つまり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ です．

5 11 2「分解の一意性」をベースに少し精密に述べると次の通りです：x, y, z 軸の向きの単位ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ とすると，前記ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$ と“分解”でき，このとき**一意的に決まる**係数 a, b, c によって次のように**成分表示**します：

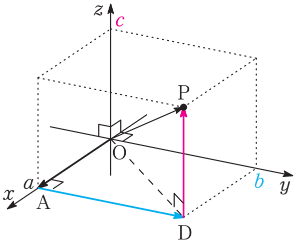
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdots x \text{成分} \\ \cdots y \text{成分} \\ \cdots z \text{成分} \end{array}$$



もちろん，始点が原点以外になっても同様であり，けっきょく座標空間でのベクトルの成分表示は，座標平面でのそれと全く同じルールで使えます．成分が 2 個から 3 個に増えること以外は（笑）．

前記ベクトル $\overrightarrow{OP}$ の大きさは，右図において

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = OD^2 + DP^2 \quad \text{△ODP に注目}$$
$$= OA^2 + AD^2 + DP^2. \quad \text{△OAD に注目}$$
$$\therefore\ |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$



成分表示と大きさ　$\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ のとき，$|\vec{v}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.　これも座標平面と同様

注　相等，加法，減法，実数倍などのルールも，座標平面上のベクトルと同様です．

例題 5 11 C　位置ベクトルの計算（成分表示・空間）　根底 実戦 典型

O を原点とする座標空間内に平行六面体 OABC-DEFG があり，A(3, 4, 5)，C(4, 1, −1)，D(2, −2, 3) とする．次の各点の座標を求めよ．

(1)　頂点 E　　(2)　頂点 F　　(3)　△DEF の重心 H　　(4)　∠DEF の二等分線と直線 DF の交点 P

注　座標空間における問題ですが，座標軸を描くとむしろジャマなだけ．図は，あくまでも思考の補助程度のものと割り切り，正確性を重視し過ぎずに描きます．その分，平面にも増して計算を正しく実行することを心掛けます．

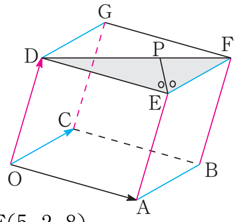
方針　「和」「差」「実数倍」という**演算**を行うことができる「ベクトル」を活用します．

着眼　下図で，同じ色の辺は全て等長かつ平行．

O から隣り合う頂点へ到る 3 ベクトルの成分は，その 3 点の座標と同じ数を成分とします．

解答

(1)　$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$$
$$= \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}5\\2\\8\end{pmatrix}.\ \text{i.e. } E(5, 2, 8).//$$



(2)　$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF}$
$$= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC}$$
$$= \begin{pmatrix}5\\2\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\3\\7\end{pmatrix}.$$

i.e. F(9, 3, 7).//

解説　(1)では，「平行四辺形」OAED の対角線をなすベクトル $\overrightarrow{OE}$ を，2 辺 OA，OD をなすベクトル 2 つの和として求めました．一方(2)では，「平行六面体」の対角線をなすベクトル $\overrightarrow{OF}$ を，3 辺 OA，OC，OD をなすベクトル 3 つの和として求めました．両者はそっくりな性質ですね．

(3)　$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$　始点統一
$$= \frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\2\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\3\\7\end{pmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}16\\3\\18\end{pmatrix}.\ \text{i.e. } H\left(\frac{16}{3}, 1, 6\right).//$$

(4)　**方針**「角の二等分線の性質」を使うため，辺 ED，EF の長さを求めます．その際，「ベクトルの大きさ」として計算すること．■

$$ED = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{9+16+25} = 5\sqrt{2},$$
$$EF = |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{16+1+1} = 3\sqrt{2}.$$

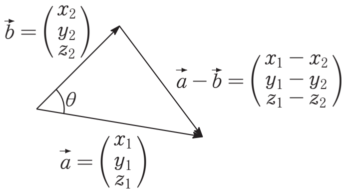
∴ ED : EF = 5 : 3.

よって，P は線分 DF を 5 : 3 に内分するから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3\overrightarrow{OD}+5\overrightarrow{OF}}{5+3}$$
$$= \frac{1}{8}\left\{3\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}9\\3\\7\end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}51\\9\\44\end{pmatrix}.$$

i.e. $P\left(\frac{51}{8}, \frac{9}{8}, \frac{11}{2}\right).//$

6 内積の成分計算



これも平面上と比べて，成分が 3 つに増えるだけ．

右図の三角形において余弦定理を用いると

$$\underbrace{\left|\vec a-\vec b\right|^2=\left|\vec a\right|^2+\left|\vec b\right|^2}_{\text{三平方の定理}}\underbrace{-2\left|\vec a\right|\left|\vec b\right|\cos\theta}_{\text{内積 }\vec a\cdot\vec b}\ \cdots ①$$

$$\therefore\ 2\vec a\cdot\vec b=\left|\vec a\right|^2+\left|\vec b\right|^2-\left|\vec a-\vec b\right|^2$$
$$={x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2+{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2$$
$$=2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2).$$
$$\therefore\ \vec a\cdot\vec b=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

平面と同様，各成分どうしを掛けて加えるだけ．

注　成分計算が平面と同様なので，まったく同じような証明過程により，内積の演算法則も平面の場合と全く同様．新しく覚えようとする必要はありません．

成分による内積（空間） **定理**

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\ .$$

例題 5 11 d 座標空間での角・面積

根底 実戦 **典型**　[→演習問題 5 13 6]

座標空間内に 3 点 A(1, 0, 1)，B(2, 1, −1)，C(−3, 2, 3) がある．

(1)　2 直線 AB，AC のなす角 θ を求めよ．　(2)　△ABC の面積を求めよ．

方針　(1) A で交わる 2 直線ですから，A を始点とする 2 ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の内積を用います．

(2) これも，(1)と同様に内積を利用します．

解答

終点から始点を引く

(1) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2-1\\1-0\\-1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\vec u$ とおく．

$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3-1\\2-0\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}=2\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec v\text{ とおく}}.$

$\vec v$ と同じ向き

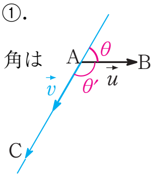
2 ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角 1) θ' は，$\vec u$, $\vec v$ のなす角と等しい 2) から

$$\cos\theta'=\frac{\vec u\cdot\vec v}{\left|\vec u\right|\left|\vec v\right|}$$
$$=\frac{1\cdot(-2)+1\cdot1-2\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}$$
$$=\frac{-3}{\sqrt6\sqrt6}=-\frac12.$$

$0\leqq\theta'\leqq\pi$ より，$\theta'=\frac23\pi$ …①.

よって $\theta'>\frac{\pi}{2}$ だから，求める角は

$$\theta=\pi-\theta'=\frac{\pi}{3}.//$$



注　1)：「2 直線 AB，AC のなす角 $\left(0\sim\frac{\pi}{2}\right)$」と「2 ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角 $(0\sim\pi)$」は，一致しない可能性があります．

2) $\overrightarrow{AC}$ を用いるより計算量が減りますね．■

(2)　$\triangle ABC=\frac12\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}.$

ここで，

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=6,\ \left|\overrightarrow{AC}\right|^2=2^2\left|\vec v\right|^2=4\cdot6,$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\vec u\cdot2\vec v=2\cdot(-3)=-6.$$
$$\triangle ABC=\frac12\sqrt{6\times4\cdot6-(-6)^2}$$
$$=\frac62\sqrt{4-1}=3\sqrt3.//$$

注　(2)は，本問では①を用いて

$$\triangle ABC=\frac12 AB\cdot AC\sin\theta'$$
$$=\frac12\cdot\sqrt6\cdot2\sqrt6\cdot\frac{\sqrt3}{2}=3\sqrt3.$$

と求めることもできますが，上記のように直接求められるようにしておきましょう．

例題 5 11 e ベクトルの決定（空間） 根底 実戦

[→例題 5 8 d]

O を原点とする座標空間内で，次の各問いに答えよ．

(1)　点 A$(2,\ 3,\ -4)$ に関して点 P$(-1,\ 2,\ -3)$ と対称な点 Q の座標を求めよ．

(2)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ とベクトル $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\s\\t\end{pmatrix}$ が平行となるような $s,\ t$ の値を求めよ．

(3)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ と平行で大きさが 5 であるベクトル $\vec{v}$ を求めよ．

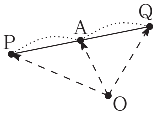
(4)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ と垂直な単位ベクトルで xy 平面と平行なベクトル $\vec{v}$ を求めよ．

(5)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ と $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ のいずれとも垂直な単位ベクトル $\vec{v}$ を求めよ．

注　どの設問も，座標軸を描いて丁寧に図示することに意味はなさそうです．

方針　(2)以降は，「ベクトル」を決定する 2 つ：「向き」と「大きさ」について考えます．

解答　(1)　A は線分 PQ の中点だから



$$\overrightarrow{OA}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}.$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}$$

$$=2\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\-5\end{pmatrix}.$$

i.e. Q$(5,\ 4,\ -5)$.//

解説　原点 O を始点にすると，ベクトルの成分がそのまま点の座標となるので楽ですね．

(2)　$\vec{a}\,/\!/\,\vec{v}$ より

$$1:3=2:s=(-3):t.$$

×3　×3　×3

よって，$s=2\cdot3=6,\ t=-3\cdot3=-9.$//

注　この程度なら，$1:3=2:s$ から比例式 $1\cdot s=3\cdot2$ などとするまでもなく片付けたいです．

(3)　$\vec{v}=\underbrace{\pm5}_{\text{符号付長さ}}\cdot\underbrace{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}_{\text{単位ベクトル}}=\pm\frac{5}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$//

注　「平行」だからといってすぐに「$\vec{v}=k\vec{a}$」などとおくのは感心しません．

(4)　**着眼**　「xy 平面と平行」ということは，z 軸方向の移動がないということですね．■

$\vec{v}\,/\!/\,xy$ 平面 より $\vec{v}=\begin{pmatrix}s\\t\\0\end{pmatrix}$ とおけて，

$\vec{v}\perp\vec{a}$ より，$\vec{v}\cdot\vec{a}=s-t=0.$

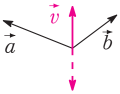
$|\vec{v}|=1$ より，$s^2+t^2=1.$

これらにより

$$s=t,\ 2s^2=1.\ \therefore\ s=t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore\ \vec{v}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.//$$

(5)　$\vec{v}=\begin{pmatrix}s\\t\\u\end{pmatrix}$ とおくと



$\vec{v}\perp\vec{a}$ より，$\vec{v}\cdot\vec{a}=s+2t+u=0.$

$\vec{v}\perp\vec{b}$ より，$\vec{v}\cdot\vec{b}=s-t-u=0.$

辺々加えて，$2s+t=0.$ i.e. $t=-2s.$

これと第 2 式より，$u=3s.$　よって

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}s\\-2s\\3s\end{pmatrix}/\!/\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.$$

これと $|\vec{v}|=1$ より，$\vec{v}=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.$//

注　本問に関しては，文字 $s,\ t,\ u$ を使わないで解く “ウラワザ” が紹介されたりしますが，たぶん上記**解答**の方が速いです（笑）．

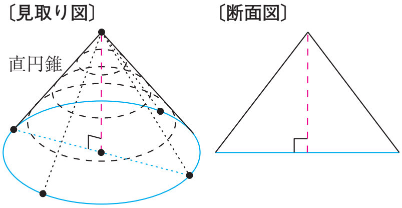
12 空間ベクトルの実戦問題

5 11冒頭で，平面ベクトルに対する空間ベクトルの違いは 3 つだけだと述べましたが，実戦面を考えるとあと 2 つ違いがあります．1 つは「計算量」の増加．例えば成分表示が，平面の x, y(2 つ) から空間では x, y, z(3 つ) に増えます．2 つ目は「図示」．3 次元の立体を紙に描く際，長さや角を正確にとるのは無理なので，“目分量”による答えのチェックができなくなります．総じて，空間ベクトルの問題は，**計算ミスとの闘い**となります．**計算こそが勝敗を決するのです．**

1 空間図形の図示

“2 種類の図” 前述した通り，立体を紙に描くのはかなり無理した作業であり，全ての要求を完璧に満たす図などあり得ません．そこで，次の 2 種類の図を併用します：

	見取り図	投影図（断面図）
概要	立体をある向きから見て	注目すべき 1) 平面図
目的	全体像をおおまかに把握	長さ・角を正確に
注意点	長さ・角が不正確	立体の全貌は見えない

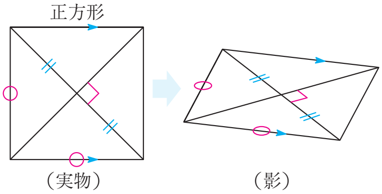


このように，どちらの図示も一長一短です．2 種類の図の“合わせ技”でなんとか凌いでいきます．

注 1)：当該問題の解決にあたって重要な役割を果たす，**適切な断面**を考えることが肝要です．■

「見取り図」について 見取り図の描き方の基本は「平行投影」だと考えます．すなわち，図形上の各点に太陽光のような平行光線を当てたときスクリーン（平面）に映る影を，そのまま紙に描きます．この「投影」のプロセスにおいて，保存されるものと保存されないものとがあります：

- 保存されるもの（右図青色）
  平行な 2 直線の影はやはり平行である．
  同一方向の線分比は保存される．
- 保存されないもの（右図赤色）
  角度は（一般には）変化してしまう．
  異なる方向の線分比は（一般には）保存されない．



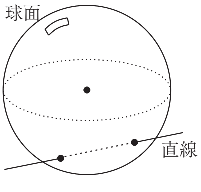
「座標軸」の図示

座標空間の問題で見取り図を描く際，まず次の 2 つの選択をします：

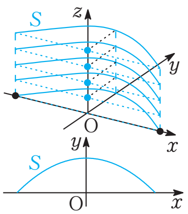
- 座標軸を描くか否か？
- 描く場合，どちらの向きか？

座標軸自体が問題に関与しないときは，右図㋐で OK です．

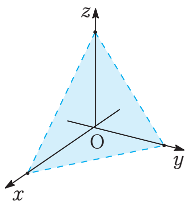
〔㋐座標軸なし〕



〔㋑ x 軸が右向き〕



〔㋒ x 軸が手前向き〕



座標軸に重要な役割があるときは，㋑㋒から選択します．それぞれの長所は次の通り：

㋑ … “真上”から見下ろした xy 平面を描くときに x, y 軸の向きがあまり変わらない．

㋒ … 全座標の正の部分が見やすい位置にある．

一方の長所は，同時に他方の短所となっています．㋑と㋒は一長一短です．

2 直線・平面・球面の典型問題

例題 5 12 a 直線への垂線（座標空間） 根底 実戦 ［→例題 5 9 b］

座標空間内に点 A(1, −1, 3), B(2, −3, 4), C(5, −3, 7) があり，直線 AB を l とする．

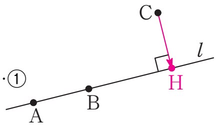
(1) C から l へ下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

(2) l 上に 2 点 D，E をとり，正三角形 CDE を作る．D，E の座標を求めよ．

方針 (1)「共線条件」＋「垂直→内積 ＝ 0」．

(2) H が既知ですから，H から D，E へ到るベクトルを，向きと大きさから作ります．

解答 (1) ○ H は l 上にあるから



$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}$ …①

と表せる．

○ CH ⊥ l より

$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$　$(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AB}=0.$

これと①より

$(\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AB}=0.$

$$\left\{\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0.$$

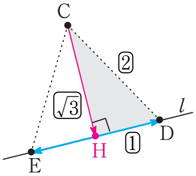
$\underline{-12}+k\cdot\underline{6}=0.$　$k=2.$ k は集約したままで

これと①より

$$\overrightarrow{OH}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\5\end{pmatrix}.$$

i.e. H(3, −5, 5).//

(2) $\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{HE}$ は $\overrightarrow{AB}$ と平行．



大きさは，$\frac{1}{\sqrt{3}}$CH.

(1)より

$$\overrightarrow{CH}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.\ \therefore\ \mathrm{CH}=2\sqrt{3}.$$

以上より，$\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{HE}$ は，

$$\underbrace{\pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}_{\text{符号付長さ}}\cdot\underbrace{\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}}_{\text{単位ベクトル}}=\pm2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ は，$\overrightarrow{OH}$ にこれを加えて

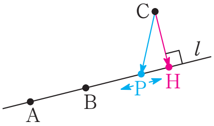
$$\begin{pmatrix}3\\-5\\5\end{pmatrix}\pm\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

よって D，E の座標は

$$\left(3\pm\frac{2}{\sqrt{6}},\ -5\mp\frac{4}{\sqrt{6}},\ 5\pm\frac{2}{\sqrt{6}}\right).//$$

（複号同順.D, E は順不同.）

別解 （H は，l 上の点のうち C から最短の点です．）



l 上の任意の点 P は

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ ①と同形

と表せて，

$$|\overrightarrow{CP}|^2=\left|\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right|^2$$

$$=36+2t\cdot(-12)+t^2\cdot6$$

$$=6(t-2)^2+\underline{12}.$$

これが最小，つまり $t=2$ のときの P が H である．（…以下略…）

この **別解** の方法なら，CH ＝ $\sqrt{\underline{12}}$ が既に求まっていますね．

例題 5 12 b 座標空間内の２直線 根底 実戦 典型 [→演習問題 5 13 7]

xyz 空間に，A$(-3, 1, 0)$, B$(-4, 2, 2)$ を通る直線 l と，C$(-3, 0, 2)$, D$(-2, -1, 3)$ を通る直線 m がある．l, m 上の任意の点をそれぞれ P，Q として以下の問いに答えよ．

(1) l と m はねじれの位置にあることを示せ． (2) 線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

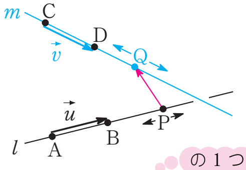
(3) P が線分 AB 上，Q が線分 CD 上を動くとき，線分 PQ が通過する領域の体積 V を求めよ．

方針 直線上の点は，直線と平行な**方向ベクトル**を用いて表せます．

解答 (1) **着眼** 空間内における異なる 2 直線の位置関係には，

「交わる」 「平行」 「ねじれ」

の 3 種類がありました．[→ I+A 5 13 1]
前者 2 つでないことを示せば OK ですね．■



の 1 つ

l, m の方向ベクトルは，それぞれ

$$\vec{u} := \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\ \vec{v} := \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ より，$l \not\parallel m$ …①.

次に，l と m に共有点がないことを示す．

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\vec{u} \ \cdots②,\\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\vec{v} \ \cdots③\end{cases}$$ と表せる．[1)]

この P と Q が一致するための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\vec{v}.$$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} - s\vec{u} + t\vec{v} = \vec{0}.$$ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} - s\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \ \cdots④$$

x, y 成分より

$$\begin{cases}s + t = 0,\\ -1 - s - t = 0.\end{cases}$$ 辺々加えて，$-1 = 0$. [2)]

これは成立し得ないから，P と Q が一致することはない．つまり l と m に共有点はない．
これと①より，題意は示せた．□

注 [1)]：②と③で，異なる文字 s, t を使います．P と Q を独立に（無関係に）動かすためです．

[2)]：仮に x, y 成分が等しくなる (s, t) があっても，そのとき z 成分が等しくなければ P と Q が一致することはないと言えます．

参考 上記 3 つの位置関係のうち，「ねじれ」がもっとも "普通" の位置関係です．■

(2) **方針** 「2 点間の距離」としてではなく，ベクトルの大きさとして計算すること．■

②③のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ = ④の左辺 だから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 = \left|\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{r}\text{ とおく}} - s\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \left|\vec{r} - s\vec{u} + t\vec{v}\right|^2$$

$$= s^2\left|\vec{u}\right|^2 - 2st\vec{u}\cdot\vec{v} + t^2\left|\vec{v}\right|^2$$

s, t の降べきの順に整理

$$-2s\vec{r}\cdot\vec{u} + 2t\vec{r}\cdot\vec{v} + \left|\vec{r}\right|^2$$

$$= s^2\cdot6 - 2st\cdot\underset{3)}{\underline{0}} + t^2\cdot3 - 2s\cdot3 + 2t\cdot3 + 5$$

$$= 6s^2 - 6s + 3t^2 + 6t + 5$$

$$= 6\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 3(t+1)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\geq \frac{1}{2}.$$ 大小関係の不等式

等号は，$(s, t) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ のとき成立．

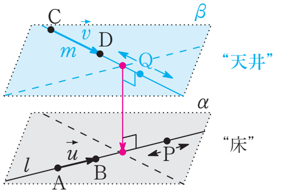
$$\therefore\ \min\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}. /\!/$$

言い訳 (2)の結論：$\min \mathrm{PQ} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ より，(1)の目標：「l と m に共有点はない」も示されたことになりますが，(1)は単独問題と割り切って解いてね（笑）．

注 3)：本問では $\vec{u}\perp\vec{v}$ となっており，内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ が 0 なので助かっています．そうでない場合は，この後の平方完成がメンドウになります．

注 前問(1)では，「垂直」を「最短」と読み替える **別解** を書きました．以下においては，それと逆に「最短」を「垂直」で表してみます．■

別解



方針 上図のような“床”と“天井”を垂直に結ぶ線分の長さが求める最小値となるイメージ．■

l を含み m と平行な平面を α，m を含み l と平行な平面を β とする．

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp l$ となるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{u}=0.$$

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}-s\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=0.$$

$$3-s\cdot6+t\cdot\underset{4)}{\underline{0}}=0.\ \text{i.e.}\ s=\frac{1}{2}.$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp m$ となるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=0.$$

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}-s\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=0.$$

$$3-s\cdot\underset{5)}{\underline{0}}+t\cdot3=0.\ \text{i.e.}\ t=-1.$$

よって，$(s,t)=\left(\frac{1}{2},-1\right)$ のとき，

$$\begin{cases}\mathrm{PQ}\perp l\\ \mathrm{PQ}\perp m\end{cases}\text{より，}\mathrm{PQ}\perp\alpha,\ \beta.$$

求める最小値は，このときのPQの長さであり，

$$\left|\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right|$$

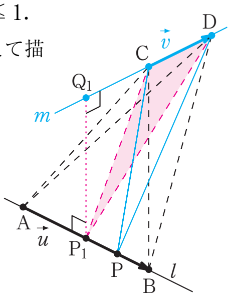
$$=\left|\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.//$$

注 4)5)：こちらの解法でも，内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ のおかげで楽ですね．ただし，たとえ内積が 0 でなくても，この **別解** の方法なら s,t の連立方程式を解くだけのことです．

(3)は，ここで述べた「垂直」を前提として解答していきます．■

(3) P が線分 AB 上，Q が線分 CD 上を動くとき，s,t の変域は

$$0\le s\le1,\ 0\le t\le1.$$



注 (1)の結果も踏まえて描き直すと右の通り：

方針 2つの点 P，Q が動きますから，1 個ずつ動かします．「2 変数関数」における **1 文字固定** と同様です．■

1° P を固定し，Q を線分 CD 上で動かすとき，線分 PQ は △PCD を描く．

2° P を線分 AB 上で動かすとき，1° の △PCD は，四面体 ABCD を描く．

方針 この四面体を，上図赤色の三角形で切断し，その両側にある 2 つの四面体を合わせた図形を考えます．[→ I+A 5 14 4]■

(2)で考えた $s=\frac{1}{2},t=-1$ に対応する P，Q をそれぞれ $\mathrm{P_1,Q_1}$ とする．

$$\begin{cases}\mathrm{AB}\perp\mathrm{P_1Q_1}\\ \mathrm{AB}\perp\mathrm{CD}.\end{cases}\quad\therefore\ \mathrm{AB}\perp\text{平面 }\mathrm{P_1Q_1CD}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\ V&=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{P_1CD}\cdot\mathrm{P_1A}+\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{P_1CD}\cdot\mathrm{P_1B}\\&=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{P_1CD}\cdot\mathrm{AB}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot|\vec{v}|\cdot\mathrm{P_1Q_1}\cdot|\vec{u}|\ \ (\because\ \vec{v}\perp\mathrm{P_1Q_1})\\&=\frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6}=\frac{1}{2}.//\end{aligned}$$

注 「共線条件」を②③のように❷「変数集約形」で表したおかげで，各所の計算がスムーズでした．座標空間では，❸「始点統一形」から「分解の一意性」（“係数比較”）に持ち込むことはまずありません．始点に関係なく，④の後のように「x,y,z 成分」の比較で済みますから（笑）．

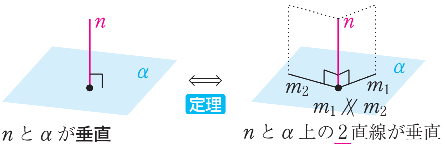
例題 5 12 C 平面に関する対称点 根底 実戦 典型 [→演習問題 5 13 8]

1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC があり，OB の中点を D，OC を 1：2 に内分する点を E とする．

平面 ADE に関して O と対称な点を P とする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ．

着眼 「垂線の足」が利用できます．

直線と平面の直交 [→ I+A 5 13 3] は OK？

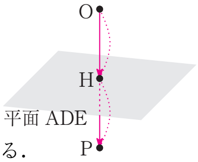


解答 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}. \quad \cdots①$$

O から平面 ADE に下ろした垂線の足を H とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}. \quad \cdots②$$



そこで，まず $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を求める．

∘ H は平面 ADE 上だから，

変数集約形

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ …③と表せる．

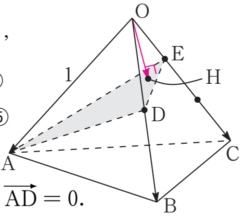
∘ OH⊥ 平面 ADE だから，

上記定理を使う

$$\begin{cases}\mathrm{OH}\perp\mathrm{AD}\\ \mathrm{OH}\perp\mathrm{AE}.\end{cases}$$

つまり，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0 & \cdots④\\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=0. & \cdots⑤\end{cases}$$



③④より

$$(\vec{a}+s\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0.$$

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+s\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2+t\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0.$$

s, t は集約したままで

ここで①より

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}}{2}-\vec{a}\right)=\frac{1}{4}^{1)}-1=-\frac{3}{4}.$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{（△OAD に注目）},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left(\frac{\vec{b}}{2}-\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{\vec{c}}{3}-\vec{a}\right)$$

$$=\underbrace{1}_{|\vec{a}|^2}+\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}_{\vec{b}\cdot\vec{c}\text{ など}}=\frac{2}{3}.$$

よって，$-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}s+\frac{2}{3}t=0.$ …⑥

③⑤より $(\vec{a}+s\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=0.$

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+s\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+t\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|^2=0.$$

ここで①より

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{c}}{3}-\vec{a}\right)=\frac{1}{6}-1=-\frac{5}{6}.$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|^2=\left|\frac{\vec{c}}{3}-\vec{a}\right|^2=\frac{1}{9}+1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{9}.$$

よって，$-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}s+\frac{7}{9}t=0.$ …⑦

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}$は既知

⑥⑦より $\begin{cases}9s+8t=9. & \cdots⑥'\\ 6s+7t=\frac{15}{2}. & \cdots⑦'\end{cases}$

⑦′×3－⑥′×2 より，$5t=\frac{9}{2}$.　$t=\frac{9}{10}$.

これと⑥′より，$s=1-\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}=\frac{2}{10}$.

これらと③より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{a}+\frac{2}{10}\left(\frac{\vec{b}}{2}-\vec{a}\right)+\frac{9}{10}\left(\frac{\vec{c}}{3}-\vec{a}\right)$$

$$=\frac{1}{10}(-\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}).$$

これと②より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{5}(-\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c})$.//

解説 「共面条件」の表現法は「変数集約形」で．キレイに内積計算ができます．

1)：$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2}-|\vec{a}|^2$ を書かずに暗算で済ませます．

そのために，①を**予め**準備することは必須！

言い訳 s, t の値と③より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{2}{10}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{9}{10}\overrightarrow{\mathrm{AE}}.$$

$$\therefore \text{右辺の係数の和}=\frac{2}{10}+\frac{9}{10}=\frac{11}{10}>1.$$

よって H は DE に関して A と反対側なので，前図は不正確でした．でも，そもそも H の位置が未知なので仕方ないです．気にしなくて OK.

例題 5 12 d 四面体の体積 根底 実戦 典型

[→演習問題 5 13 13]

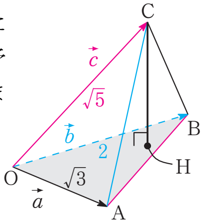
四面体 OABC において，$OA=BC=\sqrt{3}$, $OB=CA=2$, $OC=AB=\sqrt{5}$ とする．
$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおいて，以下の問いに答えよ．

(1) C から平面 OAB に垂線 CH を下ろす．$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

(2) 線分 OH の長さを求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積 V を求めよ．

方針 「垂直」を表すのに内積を使用しますから，予め“例の”準備しておきましょう．



解答 (1) $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=\sqrt{5}$.

△OAB において余弦定理を用いると

$$5=3+4-2\times\underbrace{\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos\angle BOA}_{\vec{a}\cdot\vec{b}}.$$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1.$ 1)

△OBC，△OCA において，同様に

$3=4+5-2\times\vec{b}\cdot\vec{c}.$ $\quad\therefore\ \vec{b}\cdot\vec{c}=3.$

$4=5+3-2\times\vec{c}\cdot\vec{a}.$ $\quad\therefore\ \vec{c}\cdot\vec{a}=2.$

∘ H は平面 OAB 上だから，

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ …① と表せる． 単純形 2)

∘ CH ⊥ 平面 OAB だから，

$$\begin{cases}CH\perp OA\\ CH\perp OB.\end{cases}\quad\text{i.e.}\quad\begin{cases}\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0 & \cdots②\\ \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0. & \cdots③\end{cases}$$

①②より $\quad\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}$

$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0.$

$s\cdot3+t\cdot1-2=0.$ …④ s, t は集約したままで

①③より

$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0.$

$s\cdot1+t\cdot4-3=0.$ …⑤

④×4−⑤ より，$11s-5=0.$ $s=\dfrac{5}{11}.$

これと④より，$t=2-\dfrac{15}{11}=\dfrac{7}{11}.$

これらと①より

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{11}(5\vec{a}+7\vec{b}).\,/\!/$$

言い訳 (1)の結果において，右辺の係数の和は

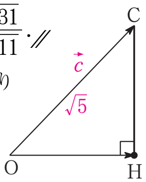
$\dfrac{5}{11}+\dfrac{7}{11}=\dfrac{12}{11}>1.$

よって，実は H は AB に関して O と反対側にあります．冒頭の図を描く段階では，それが見通せていなかったので，結果として不正確な図になっています．それでよいのです．

(2) $|5\vec{a}+7\vec{b}|^2=25\cdot3+70\cdot1+49\cdot4$

$\qquad=75+70+196=341=11\cdot31.$

$$\therefore\ |\overrightarrow{OH}|=\frac{1}{11}\sqrt{11\cdot31}=\frac{\sqrt{31}}{\sqrt{11}}.\,/\!/$$



(3) △OCH に注目して，(2)より

$CH^2=5-\dfrac{31}{11}=\dfrac{24}{11}.$

また，

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3\cdot4-1}=\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

$$\therefore\ V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.\,/\!/$$

解説 1)：三角形の 3 辺の長さから，その 2 辺をなすベクトルの内積が即座に求まることは**常識**です．[→例題 5 9 b]

2)：始点を含んだ共面条件ですから，当然「単純形」．

注 (3)における「高さ」は，もちろん

$$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}$$

$$=\frac{1}{11}(5\vec{a}+7\vec{b}-11\vec{c})$$

の大きさを内積によって計算してもできます．ちょっと面倒ですが．

語記サポ この四面体は，4 つの面が全て合同な三角形であり，**等面四面体**と呼ばれます．
[→ I+A 演習問題 5 15 11，演習問題 5 13 11]

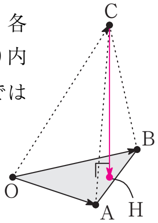
参考 **演習問題 5 13 11**では，本問と全く同一な四面体について，別の角度からの検討を行います．

例題 5 12 e 四面体の体積（座標空間） 根底 実戦 典型 [→演習問題 5 13 9]

O を原点とする座標空間内に点 A(1, 0, 2), B(−1, 2, 2), C(4, 5, 0) がある．四面体 OABC の体積 V を求めよ．

方針 原点 O を 1 頂点とする △OAB を「底面」とみるのがトク（△OBC とかでも可）．「高さ」は，C から下ろす垂線を考えます．「共面条件」＋「直線 ⊥ 平面」で OK ですね．

注 いつもの“予め準備”は，各ベクトルが成分表示されており内積が瞬時に求まるので，ここではしなくても大丈夫です．



解答 O を始点とする位置ベクトルを A$(\vec{a})$ などとする．

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}.$$

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot9-3^2}=\frac{3}{2}\cdot2=3.$$

次に，C から平面 OAB に垂線 CH を下ろす．

∘ H は平面 OAB 上だから，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ …① と表せる． 単純形

∘ CH ⊥ 平面 OAB だから，

$$\begin{cases}\mathrm{CH}\perp\mathrm{OA}\\ \mathrm{CH}\perp\mathrm{OB}.\end{cases}\quad \text{i.e.}\quad \begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\ \cdots②\\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0.\ \cdots③\end{cases}$$

①②より $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0.$

$s\cdot5+t\cdot3-4=0.$ …④ s,t は集約したままで

①③より

$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0.$

$s\cdot3+t\cdot9-6=0.$ …⑤

④×3−⑤ より，$12s-6=0.$ $s=\dfrac{1}{2}.$

これと④より，$3t=4-\dfrac{5}{2}.$ $t=\dfrac{1}{2}.$

これらと①より 実は，H は AB の中点

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=|-2|\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right|=2\cdot3=6.$$

以上より，$V=\dfrac{1}{3}\cdot3\cdot6=6.$//

解説 前問とやることはほぼ同じ．違うのは内積を「成分」で計算することだけ．

文字 s,t は**集約**したままで！

注 $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ という平面 OAB に垂直なベクトル（法線ベクトル）が重要な役割を果たしていますね．そこで，**法線ベクトル**を初めに求めてしまう方法もご紹介します：

別解 1 平面 OAB の法線ベクトルの 1 つ [1)]：

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}\text{は，}\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{n}=0\text{ より }l+2n=0.\\ \vec{b}\cdot\vec{n}=0\text{ より }-l+2m+2n=0\end{cases}$$

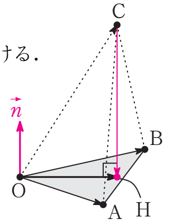
を満たす．辺々加えて，$2m+4n=0.$ よって，

$m=-2n,\ l=-2n.$ $\therefore\ \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ としてよい．[2)]

∘ CH // $\vec{n}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\vec{n}$ …⑥とおける．



∘ CH ⊥ 平面 OAB より

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}.$ ∴ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0.$

これと⑥より

$\vec{n}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\vec{n})=0.$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k|\vec{n}|^2=0.$ [3)] $18+k\cdot9=0.$

$k=-2.$ ∴ $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=-2\vec{n}.$ (…以下略…)

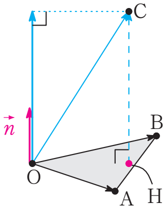
補足 [1)2)]：法線ベクトルは，大きさも考えると無限個ありますが，ここではその方向だけが重要なので，成分がなるべくカンタンな値になるものを使用しました．

注 [3]: この等式を用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = -\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}.$$

どこかで見覚えのある形になりましたね：

別解2 $\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の $\vec{n}$ への正射影ベクトルだから，



$$\overrightarrow{\mathrm{HC}} = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{18}{9}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

注 平面の法線ベクトルが既知の場合には，この方法がいちばん手早いでしょう.

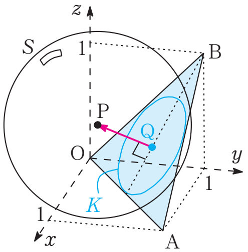
注 原点 O が四面体の 1 頂点でなくても，「四面体の各辺をなすベクトルを考える」という方針は不変です.

例題 5 12 f 球と三角形 根底 実戦 入試

[→演習問題 5 13 17]

O を原点とする xyz 空間に定点 A(1, 1, 0), B(0, 1, 1) と，半径が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ である球面 S がある. S が △OAB の 3 辺と接するとき，S の中心 P の座標を求めよ.

着眼 座標軸も描きたくなる設定ですね. 問題そのものは「球と三角形」をテーマとしていますが，平面 OAB 上で考えると，けっきょく…



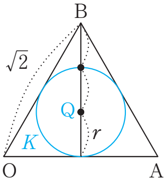
解答 S は △OAB の各辺と共有点を 1 つだけもつ.

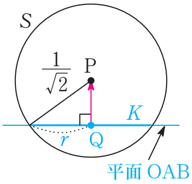
よって平面 OAB 上で，S との交円 K は △OAB の内接円. △OAB は正三角形（1 辺の長さ $= \sqrt{2}$）だから，その内接円 K の中心 Q(内心) は重心でもある. よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

次に，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ について考える.





K の半径を r とすると，前図左より

$$r = \frac{1}{3}\times\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

これと前図右より，$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}| = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

次に，平面 OAB の法線ベクトルを $\vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ とすると，$\vec{n}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のいずれとも垂直だから

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0,\ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0.$$

$$a+b=0,\ b+c=0.\quad \therefore\ a=c=-b.$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{QP}} /\!/ \vec{v} := \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \underbrace{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\text{符号付長さ}}\times\underbrace{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}_{\text{単位ベクトル}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

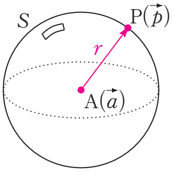
$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$$\text{i.e. P}\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)\text{ or }(0,\ 1,\ 0).\,/\!/$$

注 答えの 1 つ：P(0, 1, 0) から円 K の各接点に到る距離は，球 S の半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ と一致していますね. これで結果のチェックができました.

別解 ごく単純に，P(x, y, z) とおき，3 つの接点（各辺の中点）との距離を考えて 3 元連立方程式を立てても解決します.

3 ベクトル方程式（空間）



平面上と同様に，空間内の図形も**ベクトル方程式**で表すことができます．

例　O を始点とする位置ベクトルを考え，A($\vec{a}$) とすると，中心 A，半径 $r\,(>0)$ の球面 S 上に動点 P($\vec{p}$) があるための条件，つまり球面 S のベクトル方程式は，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=r.\qquad \text{i.e. } |\vec{p}-\vec{a}|=r.\ \cdots ①$$

座標空間内で A(a, b, c)，P(x, y, z) とおいて①を表したもの，つまり球面 S の方程式は，

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.\ \cdots ①'$$

重要　ハッキリと言い切ります．**ベクトル方程式①の方が，方程式①′より遥かに高機能です**．筆者は，後者を使うことはほぼ皆無です．（例外的な内容を 4 で扱いますが．）

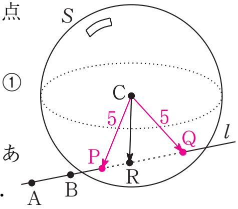
例題 5 12 g 球と直線の交点

根底 実戦 典型

座標空間内で，2 点 A(1, 2, 2)，B(2, 3, 4) を通る直線 l と，球面 $S:(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=25$ がある．l と S の 2 つの交点を P，Q とするとき，線分 PQ の長さを求めよ．

語記サポ　本問の PQ のことを，「S が l から切り取る線分」といいます．

方針　点 P，Q が満たすべき条件：「共線条件」と「球面上」を，それぞれベクトルで表します．



解答　l 上の任意の点を R とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ \cdots ①$

と表せる．

球面 S は半径が 5 であり，中心は (3, 0, 1)．これを C として，R が S 上にもあるための条件は

$|\overrightarrow{\mathrm{CR}}|=5.\ \cdots ②$　　$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=5.$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5.\ (\because\ ①)$

$$\left|\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right|^2=5^2.$$

$9+2t\cdot2+t^2\cdot6=25.\quad 3t^2+2t-8=0.$

$(3t-4)(t+2)=0.\ \therefore\ t=-2,\ \dfrac{4}{3}.$

これらに対応する R が P，Q だから，

$\{\overrightarrow{\mathrm{AP}}, \overrightarrow{\mathrm{AQ}}\}=\left\{-2\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\}.$ 順不同

$$\begin{aligned}\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|&=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\\&=\left|\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-(-2\overrightarrow{\mathrm{AB}})\right|\\&=\left|\frac{10}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right|=\frac{10}{3}\sqrt{6}.\ /\!/\end{aligned}$$

解説　R が S 上にある条件を，**ベクトル方程式②**で表すことがポイントです．

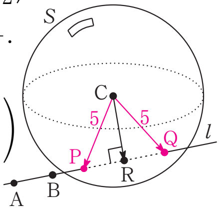
注意！　x, y, z で書かれた方程式に①を代入するのは，未知数 t をまき散らす典型的な下手解答．

別解　「円」が直線から切り取る線分には，中心と直線との垂直距離を利用する手が有効でした [→ Ⅱ+B **例題** 3 6 d (2)]．これをマネて…

$\overrightarrow{\mathrm{CR}}\perp l$ となるとき，

$$\left\{\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=0.$$

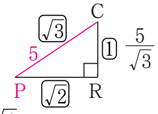
$2+t\cdot6=0.\quad t=-\dfrac{1}{3}.$



このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CR}}&=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-7\\5\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

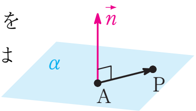
$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{CR}}|=\dfrac{1}{3}\sqrt{75}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}.$



$\therefore\ \mathrm{PQ}=2\times\mathrm{PR}=2\times5\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{10}{3}\sqrt{6}.\ /\!/$

注　「垂直」の代わりに，$|\overrightarrow{\mathrm{CR}}|$ の最小値を求める方針でも OK です．

空間内の「平面」は，平面上の「直線」と同様に考えて**ベクトル方程式**で表すことができます．



例 O を始点とする位置ベクトルを $A(\vec{a})$，$P(\vec{p})$ とすると，1 **点** A を通り $\vec{n}$ を**法線ベクトル**とする平面 α 上に動点 P があるための条件（α のベクトル方程式）は

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$ (or P = A).　　i.e. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$.　…②

座標空間内で A(a, b, c)，P(x, y, z) とおいて②を表したもの，つまり平面 α の方程式は，

II+B 3 2 2 「直線」と同様

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \text{として，} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\} = 0. \text{ i.e. } \underbrace{l(x-a)+m(y-b)+n(z-c)}_{\text{法線ベクトルの成分}} = 0. \cdots ②'$$

方程式②′において，***x*, *y*, *z* の係数が法線ベクトルの成分**を表します．

重要 試験で方程式②′を活用することは稀（まれ）です．**ベクトル方程式**②の方が，断然優れています．

例題 5 12 h 球と平面の交円 根底 実戦　[→演習問題 5 13 17]

O を原点とする座標空間内で，球面 S: $x^2+y^2+z^2+2x-4z=4$ と平面 α: $x+2y-2z=1$ の交円を C とする．C の中心 P の座標と半径 r を求めよ． 「交円」＝交わってできる円

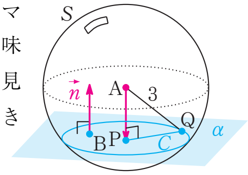
注 問題文の「方程式」自体はほぼ使いません．

着眼 α の方程式における x, y, z の係数が，α の法線ベクトルの成分です．α 上にある 1 点は，カンタンに見つかりますね．

解答 P は S の中心から α へ下ろした垂線の足．

- S: $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=9$ より，
  S は中心 A(−1, 0, 2)，半径 3 の球面．
- α は 1 点 B(1, 0, 0) を通り，
  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面．

方針 座標軸を描きマジメに図示しても意味なし．自分にとって見やすい向きに図を描きましょう．■



- $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{n}$ より　とりあえず O を始点に
  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{n}$ …①と表せる．
- P は α 上だから　始点変えたきゃ差にバラせ
  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$.　　$\vec{n} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) = 0$.

これと①より　α のベクトル方程式

$\vec{n} \cdot (\overrightarrow{OA} + t\vec{n} - \overrightarrow{OB}) = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = 0.$$

$-6 + t \cdot 9 = 0$.　$t = \frac{2}{3}$.　これと①より

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

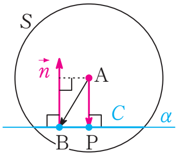
i.e. $P\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.//

また，$|\overrightarrow{AP}| = \left|\frac{2}{3}\vec{n}\right| = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$.

前図の △APQ より，$r = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.//

別解 垂線と言えば，正射影ベクトル！

$\overrightarrow{AP}$ は，$\overrightarrow{AB}$ の $\vec{n}$ への正射影ベクトルだから



$$\overrightarrow{AP} = \underbrace{\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\vec{n}|}}_{\text{“符号付長さ”}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}}_{\text{単位ベクトル}}$$

$$= \frac{1}{9} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

以下略

解説 S，α のいずれについても，x, y, z の「方程式」はほとんど使っていません．球面，平面がもつ図形的特性に関する情報をつかんだら，あとはベクトルで表しましょう．

注 ①では，P の座標に直結するよう原点 O を始点にしましたが，その後の内積処理を重視して B を始点にとるのも OK.

参考 「点と直線の距離公式」とよく似た「点と平面の距離公式」というのもありますが，覚えて使う価値はありません．[→演習問題 5 13 17]

例題 5 12 i　ベクトル方程式・応用（空間）　根底 実戦

［→例題 5 9 m］

空間内に正四面体 OABC(1 辺の長さは 1) があり，$2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}} \leq k$ (k は実数) …①を満たす点 P が描く図形 (点 P の集合) を S とする.

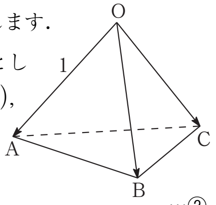
(1)　S が空集合とはならないような k の範囲を求めよ．また，そのとき S の体積を k で表せ.

(2)　BC の中点 L が S に属するような k の範囲を求めよ.

(3)　正四面体 OABC 全体が S に含まれるような k の範囲を求めよ.

着眼　①は空間内でのベクトル方程式 (のようなもの) です (実際は不等式ですが).

方針　始点を三角形の 1 頂点 (定点) に**統一**します.「O」という名の頂点があるので，それを始点にします (「原点」＝「origin」).
そして，動点 P を**集約**します.



解答　(1)　O を基準点とした位置ベクトルを $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{P}(\vec{p})$ などとすると，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}. \quad\cdots②$$

予め準備

①は

始点を O に統一

$$2|\vec{p}|^2+(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{c})\leq k.$$

$$4|\vec{p}|^2-(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+1\leq k.$$

$\vec{p}$について整理

(∵　②より $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=1.$)

$$|\vec{p}|^2-\frac{1}{4}(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}\leq\frac{k-1}{4}.$$

$|\vec{p}|^2$ の係数を 1 にする

$$\left|\vec{p}-\frac{1}{8}(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|^2$$
$$\leq\frac{1}{64}|2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2+\frac{k-1}{4}. \quad\cdots③$$

ここで②より

$$|2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=4+1+1+\frac{1}{2}(4+2+4)=11.$$

よって③は

$$\left|\vec{p}-\frac{1}{8}(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|^2\leq\frac{16k-5}{64}. \quad\cdots③'$$

左辺は 0 以上の任意の実数値をとり得る．よって，これを満たす $\mathrm{P}(\vec{p})$ が存在するための条件は

$$右辺\geq 0. \quad \therefore\ k\geq\frac{5}{16}.//$$

このとき，$\vec{n}:=\frac{1}{8}(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$, $\mathrm{N}(\vec{n})$ とすると，③′は

$$|\vec{p}-\vec{n}|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{NP}}\right|^2\leq\frac{16k-5}{64}.$$

よって S は，N を中心とする球体で，その半径^2 は上式の右辺．よって求める体積は，

$$\frac{4}{3}\pi(半径)^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{16k-5}{64}\right)^{\frac{3}{2}}.//$$

言い訳　**重要度⬇**　より正確に述べると，$k=\frac{5}{16}$ のときは半径 ＝ 0，つまり S は「1 点 N」ですが，その体積は「0」ですから問題なしです.

語記サポ　「球面」が表面だけを表すのに対し，「球体」は中身も詰まった球を意味します.

(2)　$\mathrm{L}(\vec{l})$ として，$\vec{l}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$. ③′より L が S に属するための条件は

$$\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{1}{8}(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|^2\leq\frac{16k-5}{64}.$$

$$|-2\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}|^2\leq 16k-5.$$

ここで，左辺 ＝ 4＋9＋9－6＋9－6 ＝ 19 だから，

$$19\leq 16k-5. \quad \therefore\ k\geq\frac{3}{2}.//$$

(3)　**着眼**　「正四面体 OABC 全体」といっても，実際に考えるのは四面体の 4 頂点です.
(2)の「中点 L」を見て，S の中心 N が**どんな点か**が見抜けると，1 頂点で済みます. ■
題意の条件は，4 頂点 O，A，B，C が全て S に属すること，つまりこれらのうち中心 N から最も遠い点が S に属すること.　…(*)
そこで，N から 4 頂点に到る距離を比べる.

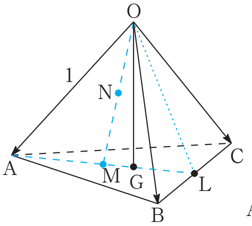
$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ より,

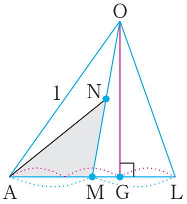
$$\vec{n} = \frac{1}{8}(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$= \frac{1}{8}(2\vec{a}+2\vec{l}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{l}}{2}.$$

よって，AL の中点を $\mathrm{M}(\vec{m})$ として，$\vec{n} = \dfrac{1}{2}\vec{m}$

だから，N は OM の中点である．





上右の断面図で考える (G は △ABC の重心).

仮に N が OG 上にあれば，NA ＝ NB ＝ NC.

実際には N は OM 上なので，

NA ＜ NB (＝ NC). …④

次に, NO＝NM であり, △AMN に注目すると

∠A ＜ 90° ＜ ∠M より,

NM ＜ NA.

辺の長短と角の大小
[→ I+A 5 4 4]

∴ NO ＜ NA.

これと④より，N から最も遠い頂点は B と C である．よって題意の条件 (∗) は

B∈S. i.e. P＝B のとき①が成り立つこと．1)

すなわち

$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BB}} + \overbrace{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}^{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}} \leq k.$$

$$k \geq 2+0+\frac{1}{2}.\quad k \geq \frac{5}{2}.//$$

解説 1)：もちろん，(2)と同様に③′の「$\vec{p}$」の所へ $\vec{b}$ を代入して内積計算しても求まりますが，元の①式へ代入した方が，第 2 項が消えるので手早いですね．

コラム

先を読む力

これまでの学習を通して，「始点を含まない共線条件・共面条件」の表し方：❷，❸の使い分けについて，次のことがつかめている人も多いと思います：『分解の一意性 (係数比較) の問題では❸：始点統一形』．『座標や内積計算の問題では❷：変数集約形』．実際，多くの場合それで上手くいきます．

しかし，筆者はそうした“使い分けルール”をまとめ上げて強調するようなマネはしていません．理由は，学力伸長の妨げになるからです．

『どういうタイプの問題で，どのパターンの解法を使うの？』これこそが，数学が苦手な人・数学が伸びない人特有の思考回路です．要するに，問題を見た時点で既にその解き方を知っている状態を作りたい．考えないで答えを出すシステムを予め構築しておきたい．で，試験場では頭を使って戦うことなくやり過ごしたい…残念ながらそれは叶わぬ願いです．だって，試験ではアナタが知らないタイプの問題がわんさか出るんですから (笑)．よって筆者は，方法論としてどんな選択肢があるかは提示しますが，その使い分けを細かく指示しないことが多いです (例外もありますし，学年・習熟度にもよりますが)．

数学ができる人は，ほとんどの場合逆向きに頭を使っている気がします．つまり前記の例でいうと，

✕ 分解の一意性 (係数比較) タイプの問題 → 始点統一形で解くと覚える ✕

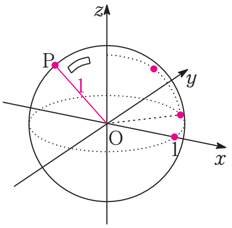
○ 仮に始点統一形を使ったら → 分解の一意性 (係数比較) が上手くいくことを**見抜く** ○

要するに，試行錯誤・トライアル&エラーの精神です．次の一手，あるいは二・三手先を読んで，今 何をすべきかを判断します．試験場で，ウンウン唸って格闘するのです．もちろん“完璧”などありえません．筆者もたまに読みが外れます．そしたら，修正するまでです．

この**先を読む力**を磨くためにも，普段から暗算で処理できる範囲を広げていきましょう．

4 座標空間での図形の方程式

Ⅱ+B 3 1 2 で述べたように，座標平面上の**曲線**とは，ある等式（方程式）を満たす点 (x, y) 全体の集合でした．座標空間においても同様です．



xyz 空間内で，例えばこれまでにも扱ってきた等式 $x^2+y^2+z^2=1$ で表される「**球面** S」とは，これを満たす**点** (x, y, z)：

$$\cdots, (1, 0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \cdots \text{ などなど}$$

全体の**集合**です．

> **定義**　xyz 空間内で，方程式 $f(x, y, z)=0$ …① で表される
> 「**曲面** S」とは，等式①を満たす**点**全体の**集合**である．
> 等式①を，曲面 S の**方程式**という．

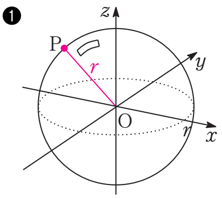
語記サポ　「平面」も「曲面」の一種と考えます．「曲面」を，「図形」とか「軌跡」と呼んだりもします．

注　「方程式」ばかりを見るのではなく，**図形そのものの特性**を注視することが重要です．例えば上の球面 S は，「中心 O からの距離が 1」という条件を満たす点の集合ですね．■

以下において，代表的な曲面とその方程式をいくつかご紹介します．**必ず自身で**，「たしかにこの図形はこの方程式を満たす点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ の集合であること」を確認するべし．

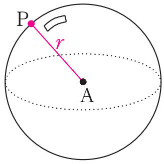
球面

❶



中心 O(0, 0, 0)，半径 r
$\mathrm{OP}=r$
$x^2+y^2+z^2=r^2$

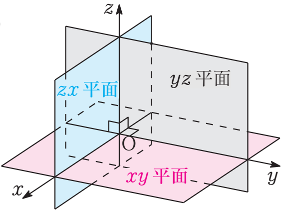
❶′



中心 $\mathrm{A}(a, b, c)$，半径 r
$\mathrm{AP}=r$
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

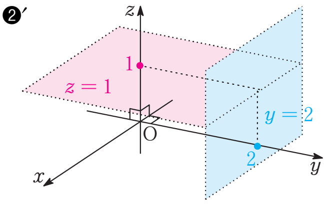
平面

❷



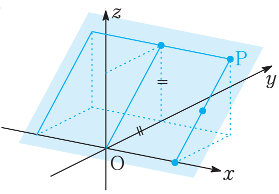
xy 平面：$z=0$（z 軸と垂直）
yz 平面：$x=0$（x 軸と垂直）
zx 平面：$y=0$（y 軸と垂直）

❷′



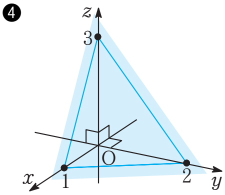
$z=1$（xy 平面と平行，z 軸と垂直）
$y=2$（zx 平面と平行，y 軸と垂直）

❸



$z=y$（x 軸を含む）
点 (0, 2, 2)，(2, 0, 0)，
(2, 1, 1)，(2, 2, 2) など

❹

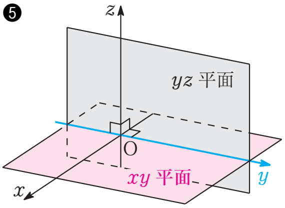


$6x+3y+2z=6$
切片を確認
法線ベクトルは $\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$

注　上記の例や 3「ベクトル方程式」②′式からもわかる通り，一般に，座標空間において x, y, z の 1 次方程式は「平面」を表します．

直線

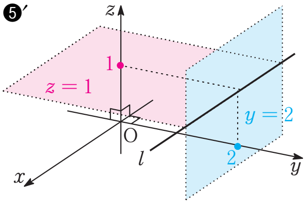
❺



y 軸：$\begin{cases} z = 0 \ (xy \text{ 平面}) \\ x = 0 \ (yz \text{ 平面}) \end{cases}$

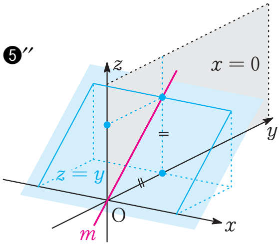
zx 平面と垂直

❺′



l: $\begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \left(\begin{array}{l} x \text{ 軸と平行} \\ yz \text{ 平面と垂直} \end{array} \right)$

❺″



m: $\begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$

yz 平面上の直線

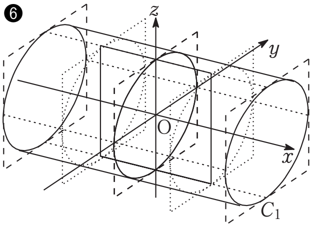
一般の直線も，このように連立方程式で表すことが可能です．実際にそうすることは滅多にないですが．

重要　座標空間内の図形はふつう次のように表されます：

> 単一の方程式は「**面**」を表す．例：$z = 1$
>
> 「**線**」は連立方程式で表される．例：$\begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$
>
> 線：$\begin{cases} y = 2\text{: 面} \\ z = 1\text{: 面} \end{cases}$
>
> つまり，「面」と「面」の交わりが「線」．　i.e. **面 ∩ 面 ＝ 線.**

円柱　円柱側面

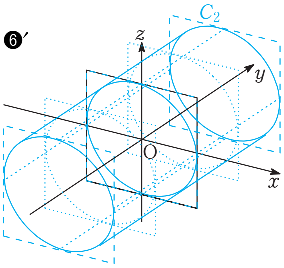
❻



C_1: $y^2 + z^2 = r^2$

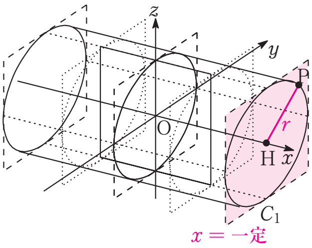
x 軸が円柱の軸，底円の半径 r

❻′



C_2: $x^2 + z^2 = r^2$

y 軸が円柱の軸，底円の半径 r

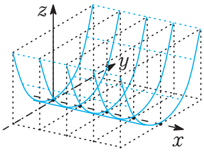


考え方　C_1 の方程式を導いてみましょう（上図右）．平面 $x =$ 一定 上で考えて，点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ が C_1 上にあるための条件は，軸上の点 $\mathrm{H}(x, 0, 0)$ との距離が半径 r に等しいこと，すなわち

$$(x - x)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = r^2. \text{ i.e. } y^2 + z^2 = r^2. \cdots ①$$

注　円柱側面 C_1 の平面 $x =$ 一定 との**交わり**は，x の値に関係なくつねに x 軸上に中心をもつ半径 r の円周（線）です（いわゆる“金太郎飴（あめ）”）．言い換えると，平面 $x =$ 一定 上の円周を x 軸方向に平行移動してできる曲面が円柱 C_1 です．

一般に，ある曲線を x 軸方向に平行移動してできる曲面 ＝「柱」の方程式は，上記のように赤波線部が x の値によらず消えるため，①のような「x」を含まない式となります．例えば方程式「$z = y^2$」は，yz 平面上の放物線を x 軸方向に平行移動したものです．



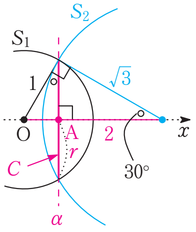
> **「柱」の方程式**
>
> x 軸方向の平行移動によって作られる「柱」の方程式は，x を含まない $f(y, z) = 0$ の形となる．

例題 5 12 j 立体図形と方程式 根底 実戦

[→演習問題 5 13 18]

xyz 空間内に 2 つの曲面 S_1: $x^2+y^2+z^2=1$ …①，S_2: $(x-2)^2+y^2+z^2=3$ …② がある．S_1 と S_2 の交わり（共通部分）$S_1\cap S_2$ は，ある平面上の円周であることを示せ．また，その平面 α の方程式，およびその円周 C の中心 A の座標と半径 r を求めよ．

解答 **参考** もちろん，右図のような中心を含んだ断面図を描いて図形的に片づけることも可能です．3 辺比が 1：2：$\sqrt{3}$ である有名直角三角形に着目すると，次の通り：



$$\alpha\colon x=\frac{1}{2},\ \mathrm{A}\left(\frac{1}{2},0,0\right),\ r=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

注 しかしここでは，図形的考察ではなく，**方程式①②に基づいて考える練習をしましょう．**

■

①②を連立 1) する．①－② より

$$4x-4=-2.\ \cdots③\quad \text{i.e. } x=\frac{1}{2}.\ \cdots③'$$

これを①へ代入して

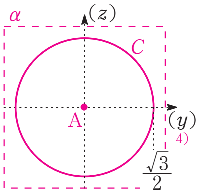
$$\frac{1}{4}+y^2+z^2=1.\ \text{i.e. } y^2+z^2=\frac{3}{4}.\ \cdots④$$

ここに，$S_1\cap S_2$ を表す式を同値変形すると，

$$S_1\cap S_2:\left\{\begin{array}{l}\overset{\text{球面 } S_1}{①}\\ \underset{\text{球面 } S_2}{②}\end{array}\right.\overset{2)}{\iff}\left\{\begin{array}{l}\overset{\text{球面 } S_1}{①}\\ \underset{\text{平面 } \alpha}{③'}\end{array}\right.\overset{3)}{\iff}\left\{\begin{array}{l}\overset{\text{平面 } \alpha}{③'}\\ \underset{\text{円柱 } C_1}{④}\end{array}\right.$$

よって $S_1\cap S_2$ は，1 次方程式 ③′ が表す平面 α 上にある．

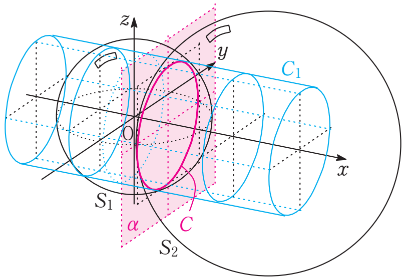
これと④より，$S_1\cap S_2$ は円周であり，その交円 C は右図の通り．



$$\therefore\ \alpha\colon x=\frac{1}{2},\ \mathrm{A}\left(\frac{1}{2},0,0\right),\ r=\frac{\sqrt{3}}{2}.\,/\!/$$

解説 ④式は x を含まないので，x 軸方向の平行移動によってできる円柱側面（C_1 とする）を表します．よって，平面 $x=$ 一定 との交わりは，x の値によらずつねに yz 平面（$x=0$）上の円 $y^2+z^2=\frac{3}{4}$ を x 軸方向に平行移動したものとなります．

前記の同値変形は，赤字で書き添えた“図形の組み替え”と対応しています．図示すると次の通りです：



「球と球」→「球と平面」→「平面と円柱」の順に組み替えましたが，交わりとして定まる図形は，どれも「円周 C」です．

注 2) ①－③ より②が導かれることを確認．

3) ③′ ④より①が導かれることを確認．

補足 1)：①②をともに満たす共通な x, y のみを考えるという宣言でしたね．

4)：y 軸や z 軸は，α 上にはなく，平面 $x=0$ にあります．そこで，座標軸を点線にして，「(y)」と括弧で囲むことで，座標軸の“影”を描いていることを伝えている“つもり”です（笑）．

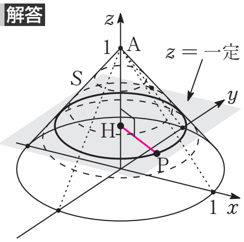
例題 5 12 k 円錐と平面の交わり

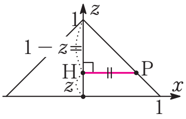
根底 実戦　　[→演習問題 5 13 18]

座標空間内で，xy 平面上の単位円を底面とし，A$(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐側面を S とする．また，x 軸と点 B$(0, 1, 1)$ を含む平面を α とし，S と α が交わってできる曲線を C とする．α 上で，C と x 軸が囲む部分 D の面積を求めよ．

方針　図形そのものを考察するだけでは無理そう．方程式を活用しましょう．

解答





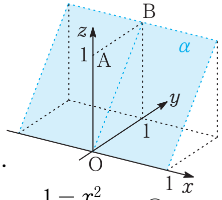
S の方程式を求める．平面 z＝一定 $(0\leqq z\leqq 1)$ 上で考えて，点 P(x, y, z) が S 上にあるための条件は，軸上の点 H$(0, 0, z)$ との距離が断面の円の半径 $1-z$ に等しいこと（上図右）$^{1)}$，すなわち

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2=(1-z)^2.$$

$$\therefore S:\ x^2+y^2=(1-z)^2\ (0\leqq z\leqq 1).\ \cdots①$$

平面 α の方程式は，右図より

$$\alpha:\ z=y.\ \cdots②$$



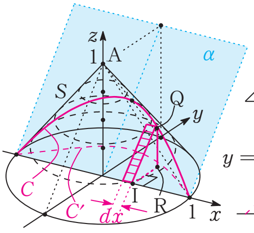
①②を連立すると

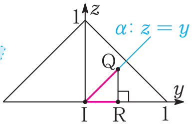
$$x^2+y^2=(1-y)^2.$$

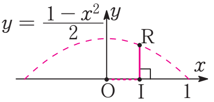
$$x^2=1-2y.\ \text{i.e. } y=\frac{1-x^2}{2}.\ \cdots③$$

ここに，交わり $C=S\cap\alpha$ を表す式を同値変形すると，

$$C:\begin{cases}\overset{\text{円錐 }S}{①}\\ \underset{\text{平面 }\alpha}{②}\end{cases}\iff\begin{cases}\overset{\text{平面 }\alpha}{②}\\ \underset{\text{柱（放物面）}}{③}\end{cases}$$







③が表す「柱」と xy 平面の交わりは放物線

C': $y=\dfrac{1-x^2}{2}$, $z=0$ であり，前図のように平面 x＝一定 において C 上の点 Q，C' 上の点 R，x 軸上の点 I をとると，IQ⊥ x 軸 より，求める面積は

$$\underbrace{\int_{-1}^{1}}_{\text{細かく集める}}\underbrace{\overset{\text{垂直}}{\mathrm{IQ}\,dx}}_{\text{細長長方形の面積}}{}^{2)}$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{2}\cdot\mathrm{IR}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{2}\cdot\frac{1-x^2}{2}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{-\sqrt{2}}{2}(x+1)(x-1)\,dx$$

$$=\frac{-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{-1}{6}\cdot(1+1)^3$$ 6 分の 1 公式

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}.\ /\!/$$

解説　1)：円錐 S は，z 軸のまわりの回転体です．軸に垂直な切り口は円ですから，方程式は比較的容易に求まります（円柱と同様です）．③式は z を含まないので，z 軸方向の平行移動によってできる柱を表します．平面 z ＝ 一定 との交わりは，z の値によらずつねに xy 平面 $(z=0)$ 上の放物線 $y=\dfrac{1-x^2}{2}$ を z 軸方向に平行移動したものとなります．③が表す曲面を，「放物面」といいます．

2)：定積分と面積の関係を**理解**していれば，正しく立式できますね．

[→Ⅱ+B 6 5 5，4 1 4]

２次曲線後　円錐側面と平面の交わりは 2 次曲線となることが知られています．

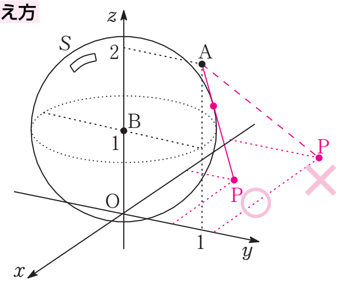
5 座標空間での軌跡

例題 5 12 1 球の接線・軌跡 根底 実戦

[→演習問題 5 13 15]

xyz 空間に球面 $S: x^2+y^2+(z-1)^2=1$ と定点 A$(0, 1, 2)$ がある．A を通る直線 l が S と接しながら動くとき，l と xy 平面との交点 P の軌跡 C を求めよ．

考え方



方法論は至ってシンプル．上図で「○」の付いた P は C に属し，「✕」の付いた P は C に属しません．

このように，「どんな点 P なら題意の条件が成り立つか？」と考えます．例の『固定して真偽判定』ですね．[→Ⅱ+B 3 8 6 **「通過領域」**]

注 「接する」ことの表現法には，「接点重視」と「接点軽視」の 2 通りがありました[→Ⅱ+B **例題 3 8 S 後の重要**]．本問で問われているのは xy 平面上の点 P の軌跡です．接点そのものというより，**「接する」という関係性**こそが重要ですから，接点軽視で．

方針 という訳で，点 P を**固定**して考え，直線 AP が S に接するための条件を表します．

解答 球面 S は半径が 1 であり，中心は $(0, 0, 1)$．これを B とする．

P$(X, Y, 0)$ とおく．直線 AP 上の任意の点を Q とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ …①と表せる．

Q が S 上にもあるための条件は，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\right|=1. \cdots ② \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=1.$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=1. (\because ①)$$

$$\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}X\\Y-1\\-2\end{pmatrix}\right|^2=1^2.$$

$$\underset{1}{\cancel{2}}+2t(Y-3)+t^2\{X^2+(Y-1)^2+4\}=\underset{0}{\cancel{1}}.$$

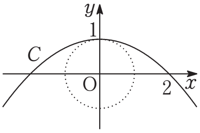
直線 AP が S と接するための条件は，これを満たす実数 t がただ 1 つ存在すること．すなわち

$$\frac{判別式}{4}=(Y-3)^2-\{X^2+(Y-1)^2+4\}=0.$$

$$-4Y-X^2+4=0.$$

以上より，求める軌跡は

$$C: y=1-\frac{x^2}{4}, z=0. /\!/$$



注 Q が S 上にある条件は，**ベクトル方程式**②で表しましょう．[→**下のコラム**]

2 次曲線 後 軌跡 C は放物線となりましたね．A を通る S の接線全体は円錐側面となります．これと平面の交わりは 2 次曲線[→7]となることが有名です．

コラム

「計算過程」について

上の例題で，①を，S のベクトル方程式②ではなく，x, y, z による方程式へ代入すると，変数 t が散らばってしまいけっこう大変な計算が残ります．ところが困ったことに，その計算過程を省き，「これを計算すると次のようになる」とか言ってしれ〜っと整理された結果が書いてあるような書物・授業が世に蔓延しています．これでは，学習者に対して計算法の巧拙など伝えようがありません．

長年の指導経験から確信をもって言い切ります．「計算」が正しく・素早く実行できるか否かが，入試での得点率を決める最大要因の 1 つです．そこを解説しない書物・授業って…全部インチキ (笑)．

6 その他の話題

例題 5 12 m 2つで表す 根底 実戦

[→例題 5 9 d]

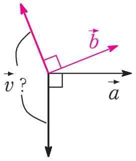
(1) 平面上に 2 ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ があり，$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\not\parallel\vec{b}$ …① とする．
$\vec{v}\cdot\vec{a}=\vec{v}\cdot\vec{b}=0$ …② が成り立つとき，$\vec{v}=\vec{0}$ であることを示せ．

(2) 空間内に平面 α と平行な 2 ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ があり，$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\not\parallel\vec{b}$ …③ とする．
$\vec{n}\perp\vec{a},\ \vec{n}\perp\vec{b}\ (\vec{n}\neq\vec{0})$ …④ が成り立つとき，$\vec{n}\perp\alpha$ であることを示せ．

着眼 ①や③は，2 ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ が平面上で “一次独立” であることを主張しています．

解答 (1) **着眼** ②の意味は，$\vec{v}$ が $\vec{a},\vec{b}$ のいずれとも垂直だということですね．

平面上では，$\vec{v}\neq\vec{0}$ だと「こんなの無理」だと直観的には明らかです（右図）．しかし，ここではそれをキチンと証明することが要請されています．■



①より，$\vec{v}=s\vec{a}+t\vec{b}$ …⑤ と表せて，

②より

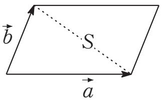
$$\begin{cases}(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{a}=0,\\(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}s\left|\vec{a}\right|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=0, & \cdots⑥\\ s\vec{a}\cdot\vec{b}+t\left|\vec{b}\right|^2=0. & \cdots⑦\end{cases}$$

⑥×$\left|\vec{b}\right|^2$ − ⑦×$\vec{a}\cdot\vec{b}$ より

$$\Big\{\underbrace{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}_{T\text{ とおく}}\Big\}s=0.\ \cdots⑧$$

ここで，①より $\vec{a},\vec{b}$ は右図の平行四辺形の 2 辺をなす．この面積を S とすると



$$S=\sqrt{T},\ S>0.\ \therefore\ T\neq0.$$

これと⑧より，$s=0$．これと⑦より

$$t\left|\vec{b}\right|^2=0.\ \left|\vec{b}\right|\neq0 \text{ より } t=0.$$

これと⑤より，$\vec{v}=\vec{0}$．□

解説 ①：「一次独立」が，$\vec{a},\vec{b}$ の作る平行四辺形（もしくは三角形）が “ペシャンコにならない” と読み替えられて解答できたという訳ですね．

参考 ⑤の後は，次のように簡便に片づきます：

$$\begin{aligned}\left|\vec{v}\right|^2&=\vec{v}\cdot\vec{v}\\&=\vec{v}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})\\&=s\vec{v}\cdot\vec{a}+t\vec{v}\cdot\vec{b}=0\ (\because\ ②).\end{aligned}$$

$\therefore\ \vec{v}=\vec{0}$．□

$\vec{v}\cdot\vec{v}$ の片方だけを⑤の右辺に変えるという芸当でした（笑）．■

(2) **着眼** 例題 5 12 c で確認した $\boxed{\text{直線と平面の直交}}$ をベースに解答します．

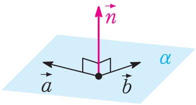
❶「直線 n と平面 α が垂直」
定義 ⟺ ❶′「n と α 上の全直線が垂直」
⟺ ❷「n と α 上の2直線が垂直」 **定理**

要は，❷ ⟹ ❶′（**定理**）を証明せよという訳です．■

α と平行な任意のベクトル $\vec{p}$ は，③より

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$

と表せて



$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\vec{p}&=\vec{n}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})\\&=s\vec{n}\cdot\vec{a}+t\vec{n}\cdot\vec{b}=0\ (\because\ ④).\end{aligned}$$

すなわち $\vec{p}\perp\vec{n}$ だから，$\vec{n}\perp\alpha$．□

参考 この証明は，既に I+A 5 13 3 で済ませていました．

例題 5 12 n　体積比，面積比，線分比　根底 実戦　[→例題 5 9 e]

(1)　三角形 ABC の内部に点 P があり，△PBC，△PCA，△PAB の面積比が $\alpha:\beta:\gamma$(これらは全て正) のとき，$\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ …① が成り立つことを示せ．

(2)　四面体 ABCD の内部に点 O があり，四面体 OBCD, OCDA, ODAB, OABC の体積比が $a:b:c:d$(これらは全て正) のとき，$a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}+d\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}$ …② が成り立つことを示せ．

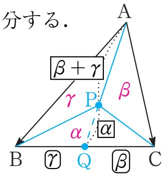
着眼　(1)は，平面ベクトルにおける**例題 5 9 e** の逆向き．「面積比」→「線分比」→「ベクトルの式」の順に考えます．(2)は「体積比」→「面積比」→「(1)へ帰着」の流れで．

方針　とりあえずはいつも通りの方針：「始点を 1 つの頂点に**統一**」，「2 ベクトルで表す (平面)」·「3 ベクトルで表す (空間)」でいきます．その後で，始点を P や O に変えましょう．

解答　(1)　AP と BC の交点を Q とすると

Q は BC を $\gamma:\beta$ に内分する．

P は AQ を $(\beta+\gamma):\alpha$ に内分する．



したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\gamma+\beta},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

$$=\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\cdot\frac{\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\beta+\gamma}=\frac{\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

始点を P に変えると

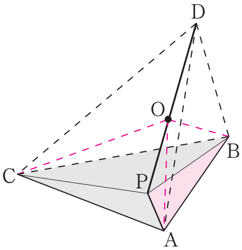
分母を払った

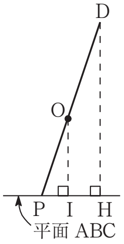
$$(\alpha+\beta+\gamma)(-\overrightarrow{\mathrm{PA}})$$

$$=\beta(\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}})+\gamma(\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}).$$

$\therefore\ \alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ (①が示せた). □

(2)　以下，例えば頂点 O，底面 BCD の四面体の体積を，〔O-BCD〕のように表す．





DO と平面 ABC の交点を P とし 1)，D，O から底面 ABC へ下ろした垂線の足をそれぞれ H，I とすると，

〔D-PBC〕:〔D-PCA〕:〔D-PAB〕

$$=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{PBC}\cdot\mathrm{DH}:\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{PCA}\cdot\mathrm{DH}:\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{PAB}\cdot\mathrm{DH}$$

$=\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=\alpha:\beta:\gamma.$

ただし，(1)の面積比をそのまま用いた 2)．同様に

〔O-PBC〕:〔O-PCA〕:〔O-PAB〕

$=\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=\alpha:\beta:\gamma.$

これらの差をとると 3)

〔O-DBC〕:4)〔O-DCA〕:〔O-DAB〕$=\alpha:\beta:\gamma.$

i.e. $a:b:c=\alpha:\beta:\gamma.$

$\therefore\ a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ (∵ (1)).

始点を O に変えると

$$a(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+b(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+c(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\vec{0}.$$

$$a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}-(a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}.\ \cdots③$$

〔D-ABC〕:〔O-ABC〕

$$=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH}:\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OI}$$

$=\mathrm{DH}:\mathrm{OI}$ (∵ 底面共通)

5)△がペシャンコかも

$=\mathrm{DP}:\mathrm{OP}$(∵ $\triangle\mathrm{DPH}\backsim\triangle\mathrm{OPI}$).

$\therefore\ \mathrm{DP}:\mathrm{OP}=(a+b+c+d):d.$

$\mathrm{DO}:\mathrm{OP}=(a+b+c):d.$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{d}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OD}}.$$

$$-(a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{OP}}=d\overrightarrow{\mathrm{OD}}.$$

これと③より，

$a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}+d\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}$(②が示せた). □

言い訳　5)：そのときは，DH = DP, OI = OP.

解説　けっきょく(2)の「体積比」は，

$$錐の体積 = \frac{1}{3}\cdot 底面積\cdot 高さ$$

より，「面積比」に帰着され，(1)と見事につながりましたね．（**I+A演習問題 5 15 5**でほぼ同内容を経験済みです．）

注　1)：この点の名前を「P」とすることは…

2)：このように(1)につながることを先読みして行いました．

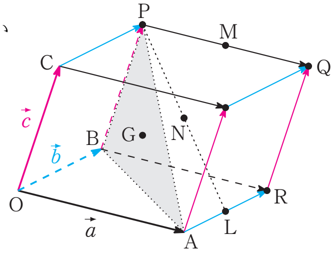
3)：いわゆる「加比の理」を使っています（ここでは加えるのではなく引いていますが）．

[→ **I+A例題 5 7 a** (1) **解説**]

4)：例えば四面体 D-PCA から，底面が共通な O-PCA を取り除くと，四面体 O-DCA となることを，図を見ながら納得してください．

13　演習問題C

5 13 1　根底 実戦 定期



右のような平行六面体がある．$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおいて，次の各ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ．

(1)　$\overrightarrow{OP}$

(2)　$\overrightarrow{OQ}$

(3)　$\overrightarrow{OG}$（G は △ABP の重心）

(4)　$\overrightarrow{OL}$（L は AR の中点）

(5)　$\overrightarrow{OM}$（M は PQ の中点）

(6)　$\overrightarrow{ML}$

(7)　$\overrightarrow{MN}$（N は PL の中点）

5 13 2　根底 実戦 典型

O を頂点とする正四角錐 O-ABCD があり，△OAB の重心を G とする．また，AB を 2 : 1 に外分する点を E，OD の中点を F，直線 EF と平面 OBC の交点を P とする．このとき，GP と AC は平行であることを示せ．

5 13 3　根底 実戦 入試

四面体 OABC において，OB の中点を D，OC を 1 : 2 に内分する点を E とし，△ABC の重心を G とする．直線 OC 上の点 P を，直線 GP が平面 ADE と平行になるようにとる．P は OC 上でどのような位置にあるかを答えよ．

5 13 4　根底 実戦 入試

四面体 OABC において，△ABC の重心を G とする．また，OA を 1 : 2 に内分する点を D，OB を 2 : 1 に内分する点を E，OC を $k:(1-k)$ $(0<k<1)$ に内分する点を F とし，△DEF の重心を P とする．直線 OP と平面 ABC の交点を Q とするとき，Q が △ABG の内部にあるような k の範囲を求めよ．

5 13 5 根底 実戦 典型 入試

空間内に点 O を中心とする半径 3 の球面 S と，長さ 3 の線分 AB がある．点 P が S 上，点 Q が線分 AB 上を動くとき，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 R が動く範囲 D の体積 V を求めよ．

5 13 6 根底 実戦 入試

O を原点とする座標空間内での点 $\mathrm{P}(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ について答えよ．

(1) 線分 OP の長さを求めよ．

(2) 点 $\mathrm{Q}(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0)$ として，$\angle\mathrm{QOP}$ を求めよ．

(3) 点 $\mathrm{P}'(\sin\theta\cos\varphi',\ \sin\theta\sin\varphi',\ \cos\theta)$ とする．$0 < \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq \varphi < \varphi' \leqq \pi$ として，$\angle\mathrm{POP}'$ と $\varphi' - \varphi$ の大小を比べよ．

5 13 7 根底 実戦 典型 入試

xyz 空間に，A(0, 2, 1), B(2, 4, 3) を通る直線 l と，C(1, 2, −3), D(5, 2, 5) を通る直線 m がある．l, m 上の任意の点をそれぞれ P，Q として以下の問いに答えよ．

(1) 線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

(2) P が線分 AB 上，Q が線分 CD 上を動くとき，PQ の中点 R の存在範囲の面積 S を求めよ．

5 13 8 根底 実戦 典型

四面体 OABC があり，OA = 2, OB = 2, OC = 3, ∠AOB = ∠BOC = 60°, ∠COA = 90° とする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおいて，以下に答えよ．

(1) O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ で表せ．

(2) 平面 ABC に関して O と同じ側にある点 P から平面 ABC に垂線 PQ を下ろしたとき，Q は △ABC の内部にあり，4 つの四面体 PQBC，PQCA，PQAB，OABC の体積が全て等しいとする．このとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ で表せ．

5 13 9 根底 実戦

O を原点とする xyz 空間内において，次の四面体 ABCD の体積 V をそれぞれ求めよ．

(1) A(1, −1, 0)，B(1, −1, 3)，C(1, 3, 3)，D(4, 3, 7)

(2) A(5, 0, 0)，B(1, 0, 3)，C(1, 3, 2)，D(−1, −3, −2)

5 13 10 根底 実戦 典型 入試

xyz 空間に点 A(3, 4, 3) と円 $C : (x-3)^2 + y^2 = 4,\ z = 0$ がある．C 上を動く点 P と，z 軸上を動く点 Q をとり，2 つの線分 AQ，QP の長さの和を L とする．L の最小値，およびそのときの P，Q の座標を求めよ．

5 13 11 根底 実戦 入試

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{BC}=\sqrt{3}$, $\mathrm{OB}=\mathrm{CA}=2$, $\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\sqrt{5}$ とする．OA，BC，OB，CA，OC，AB の中点をそれぞれ P，Q，R，S，T，U とする．

(1) 3 つの線分 PQ，RS，TU は，どの 2 つも垂直であることを示せ．また，これら 3 つは 1 点で交わることを示せ．

(2) 八面体 PQRSTU の体積 V_0 を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積 V を求めよ．

5 13 12 根底 実戦 入試

四面体 OABC が，次の条件①②を満たすとする：

$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$, $\mathrm{OB}\perp\mathrm{CA}$, $\mathrm{OC}\perp\mathrm{AB}$. …①

$\triangle\mathrm{OAB}$, $\triangle\mathrm{OBC}$, $\triangle\mathrm{OCA}$ の面積は全て等しい．…②

このとき，O から平面 ABC へ下ろした垂線の足 H は，△ABC の重心であることを示せ．

5 13 13 根底 実戦 入試

四面体 DABC があり，$\mathrm{DA}=2$, $\mathrm{DB}=2$, $\mathrm{DC}=3$, $\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{BDC}=60^\circ$, $\angle\mathrm{CDA}=90^\circ$ とする．$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, $\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}$, $\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とおき，空間内の定点 O に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$, $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\vec{x}$ となるように 4 点 P，Q，R，X をとる．四面体 XPQR の体積 V を求めよ．

5 13 14 根底 実戦 入試

xyz 空間に，A(0, 0, 1) と B(0, 0, −1) を直径の両端とする球面 S がある．S 上に A，B 以外の点 P をとり，直線 AP，BP と xy 平面の交点をそれぞれ Q，R とする．

R が線分 $x+y=\dfrac{1}{2}$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$… ① 上を動くとき，Q の軌跡を求めよ．

5 13 15 根底 実戦 入試

O を原点とする xyz 空間内に，点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を通りベクトル $\vec{v}=(1,\ 0,\ 2)$ に平行な直線 l と球面 $S:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ がある．l と S が接するための実数 $a,\ b$ に関する条件を求めよ．

5 13 16 根底 実戦 入試

xyz 空間に球面 $S:x^2+y^2+z^2=4$ と平面 α: $x=1$，および定点 A(0, 0, 2) がある．S と α の交円 C 上を点 P が動くとき，直線 AP と xy 平面の交点 Q の軌跡 F を求めよ．

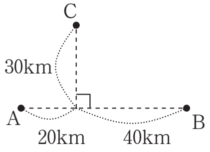
5 13 17 根底 実戦 入試

座標空間に，定点 A(3, −3, 7)，B(1, 0, 0) と平面 α: $2x-y+3z-2=0$ …① がある．A を頂点とし，α 上の正方形 BCDE を底面とする正四角錐をつくる．C，D，E の座標を求めよ．ただし，x 座標は C より E の方が大きいとする．

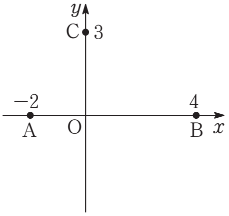
5 13 18 根底 実戦 入試

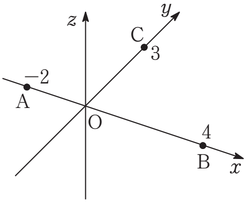
xyz 空間内に 2 つの円柱 C_1: $y^2+z^2=1$ …①, C_2: $x^2+z^2=1$ …② がある．C_1 と C_2 の交わり $C_1 \cap C_2$ を含む平面の方程式を求めよ．

5 13 19 根底 実戦 入試



地表平面[1)](標高 0m) 上に，右図のように離れた 3 つの地点 A，B，C がある．ある日発生した地震の震源 H(地震が発生した地中の点) の深さと，震央 E(震源の真上にある地表上の地点) を特定したい．
そこで，震源 H から A，B，C それぞれに到る距離：d_A, d_B, d_C を「PS 時間」など[2)] をもとに算出して利用する．
右図のように「10km」を長さの単位「1」とし，鉛直上方 (重力と逆向き) に z 軸をとった xyz 空間内で考え，H(x, y, z) $(z \leqq 0)$ とおく．





(1) $d_A=130$(km) …①, $d_B=110$(km) …② がわかっているとき，震源 H はある円周 C 上にあることがわかる．C は xyz 空間内でどのような円周か？また，震央 E はある直線 l 上にあることがわかる．l の方程式を求めよ．

(2) ①②に加えて $d_C=140$(km) …③ がわかったとして，震源 H，震央 E の座標を求めよ．

第 6 章

複素数平面

語記サポ　大学以降では「複素平面」という呼称が一般的です．本書もそちらを多用します．

概要

本来，次章7「2 次曲線」と合わせて 1 単元ですので，ボリュームは“半章分”しかありません．また，押さえるべき基本がカッチリと決まっているので学びやすく，**短期間で習得可能です**．

征服のポイントは，ズバリ「複素数と**ベクトルの対応**」です．したがって，5「ベクトル」が既習であることが大前提です！案外苦手率が高い分野なのですが，この対応を押さえて**正しく学べば**心配要りません．

あと，Ⅱ+B 1 9で学んだ「複素数」に関する基礎知識も不可欠です．最初の6 1 1で軽くおさらいはしますが，複素数の計算等がアヤシイという人は，少し計算練習をして準備してから本章に臨んでください．

注　数学Ⅲの進度との関係としては，いちおう3「微分法」は既習であることを想定しています（それが必須という訳ではありませんが）．また，入試がけっこう近づいてから学習する人も多いと思われますので，問題も入試レベルに近いものをどんどん扱うよう配慮しています．

学習ポイント

1. 「複素数」と，「点」および「**ベクトル**」との対応を学ぶ
2. 直交形式 $x+iy$ で，ベクトルと同様な図形処理を行う
3. 共役複素数 z, $\bar{z}$ により，実部，虚部，絶対値を表現
4. 極形式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ で，積・商を簡便に求め，ベクトルの回転&伸縮を行う

前章の「ベクトル」と同様，基本体系がキッチリ出来上がっているので，問題解法もかなり整備されています．微分・積分法などに比べて，さほど演習量は要りません．

将来入試では

通常は理系生限定の分野だと思われます．多くは他分野と少し融合されており，複素平面単独の凝り過ぎた問題も少ないので，この単元についての凄くマニアックな知識や超絶技巧など不要です．

ただし，それもこれも前述した**正しい学び方**をしていればの話であることをお忘れなく．

この章の内容

［高校数学範囲表］　●当該分野　●関連が深い分野

数学Ⅰ	数学Ⅱ	数学Ⅲ 理系
数と式	いろいろな式	いろいろな関数
２次関数	ベクトルの基礎	極限
三角比	図形と方程式	微分法
データの分析	三角関数	積分法
数学A	指数・対数関数	**数学C**
図形の性質	微分法・積分法	ベクトル
整数	**数学B**	複素数平面
場合の数・確率	数列	２次曲線
	統計的推測	