電磁気学に用いるベクトル公式集

1. スカラー，ベクトル，テンソル

直角座標 (x_1, x_2, x_3) から (x_1', x_2', x_3') への，原点を不動点とする座標回転（直交変換）を

$$x_l' = \sum_i U_{li}\ x_i \quad , \quad x_i = \sum_l (U^{-1})_{il}\ x_l' \qquad \left(\sum_l \text{ は } \sum_{l=1}^{3} \text{ の省略形。以下同様} \right) \tag{1}$$

とする。$\tilde{U}$ を U の転置行列として，係数行列 $\{U_{li}\}$ は

$$\text{（直交条件）} \quad \sum_l U_{li} U_{lj} = \delta_{ij} \qquad \text{したがって} \quad (U^{-1})_{il} = \tilde{U}_{il} = U_{li} \tag{2}$$

を満たす。この座標変換で成分が

$$A'_l = \sum_i U_{li}\ A_i \tag{3}$$

のように，座標と同じ形で変換される量 を **ベクトル**,

$$T'_{lm} = \sum_{i,j} U_{li}\ T_{ij}\ (U^{-1})_{jm} = \sum_{i,j} U_{li}\ U_{mj}\ T_{ij} \tag{4}$$

のように変換される量を**テンソル**という。変換を受けない量が**スカラー**である。

この定義に従えば，あとで出てくる**ナブラ**演算

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2},\ \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \qquad \text{（**注**} \quad x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z \text{ である）}$$

は以下のようにしてベクトルであることが示される：

$$\frac{\partial}{\partial x_l'} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x_l'} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i (U^{-1})_{il} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i U_{li} \frac{\partial}{\partial x_i}\ , \quad \text{したがって} \quad \nabla_l' = \sum_i U_{li} \nabla_i$$

２つのベクトルの**スカラー積**は，以下のように座標変換では変換されず，スカラーである：

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})' = \sum_l A_l' B_l' = \sum_l \sum_i \sum_j U_{li} U_{lj}\ A_i B_j = \sum_i \sum_j \delta_{ij} A_i B_j = \sum_i A_i B_i = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$$

２つのベクトル量が比例関係（線形関係）にあるとき，その比例係数は一般にテンソル量である。例えばベクトル $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ が比例関係にあり，その各成分が比例係数 $\{\epsilon_{ij}\}$ を用いて

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij}\ E_j$$

で関係づけられているとき，座標変換 (1.1) に対するベクトルの変換公式を用いれば

$$D_l' = \sum_i U_{li} D_i = \sum_i U_{li} \sum_j \epsilon_{ij} E_j = \sum_i \sum_j U_{li} \epsilon_{ij} \sum_m (U^{-1})_{jm} E_m' = \sum_m \left(\sum_{i,j} U_{li} \epsilon_{ij} (U^{-1})_{jm} \right) E_m'$$

となる。(　) が変換後の座標系における比例係数 $\{\epsilon_{lm}'\}$ で，テンソルの変換の約束に従っている：

$$\epsilon'_{lm} = \sum_{i,j} U_{li}\ \epsilon_{ij}\ (U^{-1})_{jm} = \sum_{i,j} U_{li}\ U_{mj}\ \epsilon_{ij}$$

2. かけ算公式

ある方向の単位ベクトル（長さ１のベクトル）を $\boldsymbol{e}$，また，x，y，z 方向の単位ベクトルを，それぞれ $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ と書く。（以下共通）

スカラー積 $$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=AB\cos\theta=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{5}$$

ベクトル積 $$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{e}_z \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\ ,\qquad |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=AB\sin\theta \tag{7}$$

テンソル積 $$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})_{ij}=A_iB_j \tag{8}$$

例：ベクトル $\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{e}$ -方向の平行・垂直成分

$$\boldsymbol{A}_{||}=(\boldsymbol{e}\ \boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{A}\ ,\quad \text{または}\quad (\boldsymbol{A}_{||})_i=\sum_j(\boldsymbol{e}\ \boldsymbol{e})_{ij}\ A_j=\sum_j e_ie_jA_j=(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{A})\ e_i$$

$$\boldsymbol{A}_{\perp}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_{||}=(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{e}\ \boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{A}\ ,\quad \text{または}\quad (\boldsymbol{A}_{\perp})_i=\sum_j(\delta_{ij}-e_ie_j)\ A_j$$

テンソル $\boldsymbol{e}\ \boldsymbol{e}$ は，$\boldsymbol{e}$ 方向への**射影演算子**になる。（次の形の方がお馴染み。）

$\boldsymbol{A}$ の成分分解 $$\boldsymbol{A}_{||}=(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{e}\ ,\quad \boldsymbol{A}_{\perp}=(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{e}=\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{e} \tag{9}$$

スカラー３重積 $$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{10}$$

これは，３つの右手系ベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ で作られる平行６面体の体積を表す。

ベクトル３重積 $$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{11}$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} \tag{12}$$

ヤコビの恒等式 $$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0 \tag{13}$$

４重積
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})&=\{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}\}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\cdot\{\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\}\\&=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})&=\{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{D}\}\boldsymbol{C}-\{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}\}\boldsymbol{D}\\&=\{\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\}\boldsymbol{B}-\{\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\}\boldsymbol{A}\end{aligned} \tag{15}$$

平行条件 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$ **直交条件** $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$ (16)

同一平面条件 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0$ (17)

3. 微分公式

ナブラベクトル　$$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{18}$$

勾配　$$\nabla\phi = \mathrm{grad}\ \phi = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{19}$$

発散　$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{20}$$

回転　$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{21}$$

$$\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi \tag{22}$$

$$\nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi \tag{23}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) \tag{24}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\cdot\boldsymbol{A} + \nabla\cdot\boldsymbol{B} \tag{25}$$

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\phi\cdot\boldsymbol{A} + \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A} \tag{26}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{27}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla\times\boldsymbol{B} \tag{28}$$

$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\phi\times\boldsymbol{A} + \phi\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{29}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) \tag{30}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\nabla = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (\boldsymbol{A}\cdot\nabla \neq \nabla\cdot\boldsymbol{A} \text{ に注意}) \tag{31}$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\phi = \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\phi) \tag{32}$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_x)\boldsymbol{e}_x + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_y)\boldsymbol{e}_y + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_z)\boldsymbol{e}_z \tag{33}$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\phi\boldsymbol{B} = \phi(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi) \tag{34}$$

２階微分　ラプラシアン:　$$\nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{35}$$

これに対して，ベクトル積は　$\nabla\times\nabla = 0$　(36)

$$\text{div grad}\ \phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi \tag{37}$$

$$\text{rot grad}\ \phi = \nabla\times\nabla\phi = 0 \quad \textbf{（渦なし場）} \tag{38}$$

$$\text{div rot}\ \boldsymbol{A} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = (\nabla\times\nabla)\cdot\boldsymbol{A} = 0 \quad \textbf{（湧き出しなし場）} \tag{39}$$

$$\text{rot rot}\ \boldsymbol{A} = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{40}$$

$$\text{grad div}\ \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{41}$$

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = \nabla\phi\cdot\nabla\psi + \phi\nabla^2\psi \tag{42}$$

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) = \phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi \tag{43}$$

$$\nabla^2(\phi\psi) = \psi\nabla^2\phi + 2\nabla\psi\cdot\nabla\phi + \phi\nabla^2\psi \tag{44}$$

（その他）

（r，$\boldsymbol{r}$ に対する演算）

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y + \boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z\ ,\quad r\mathrm{d}r = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z\ ,\quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{etc}\ \ \text{より}$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = r\ \mathrm{d}r \tag{45}$$

$$\nabla r = \text{grad}\ r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{46}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r} = \text{div}\ \boldsymbol{r} = 3 \tag{47}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{r} = \text{rot}\ \boldsymbol{r} = 0 \tag{48}$$

ヘルムホルツの分解定理　任意のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ は，渦なし場（$\text{rot} = 0$）と湧き出しなし場（$\text{div} = 0$）に一意的に分解される：

$$\boldsymbol{V} = \text{grad}\ \phi + \text{rot}\ \boldsymbol{A} \tag{49}$$

4．積分公式

以下では，S は任意の閉曲面，$\mathrm{V_S}$ は S で囲まれた空間領域，$\boldsymbol{n}$ は S 上の各点で外向きに向かう法線ベクトル（単位ベクトル）とする。$\phi(\boldsymbol{r})$ はスカラー場，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ はベクトル場である。また，$\oint$ は，閉じた閉曲面（または閉曲線）に沿った積分であることを強調する意味で用いる。

$$\int_{\mathrm{V_S}} \nabla\phi \; \mathrm{d}V = \oint_{\mathrm{S}} \phi \; \boldsymbol{n} \; \mathrm{d}S \tag{49}$$

$$\int_{\mathrm{V_S}} \nabla\cdot\boldsymbol{A} \; \mathrm{d}V = \oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} \; \mathrm{d}S \qquad \text{（ガウスの定理）} \tag{50}$$

$$\int_{\mathrm{V_S}} \nabla\times\boldsymbol{A} \; \mathrm{d}V = \oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A} \; \mathrm{d}S \tag{51}$$

$$\int_{\mathrm{V_S}} (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi) \; \mathrm{d}V = \oint_{\mathrm{S}} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{n} \; \mathrm{d}S \qquad \text{（グリーンの定理）} \quad \leftarrow (45)\text{ より} \tag{52}$$

以下では，C は閉曲線，$\mathrm{S_C}$ は C を境界とする曲面，$\boldsymbol{n}$ は $\mathrm{S_C}$ 上の各点における法線ベクトルである。$\boldsymbol{n}$ の向きは，閉曲線 C に沿う積分方向に「右ねじ」を回したとき,「ねじが貫く向き」を正の向きとする。

$$\int_{\mathrm{S_C}} \boldsymbol{n}\times\nabla\phi \; \mathrm{d}S = \oint_{\mathrm{C}} \phi \; \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{53}$$

$$\int_{\mathrm{S_C}} (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n} \; \mathrm{d}S = \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \text{（ストークスの定理）} \tag{54}$$

$$\int_{\mathrm{S_C}} (\boldsymbol{n}\times\nabla)\times\boldsymbol{A} \; \mathrm{d}S = \oint_{\mathrm{C}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A} \tag{55}$$

5．曲線座標

以下では，$f(\boldsymbol{r})$ はスカラー場，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ はベクトル場とする。直角座標以外では一般に，$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\alpha \neq \nabla^2 A_\alpha$ である。最後の $\nabla^2\boldsymbol{A}$ に対する公式は，見つけにくいので保存しておくと便利である。

（円柱座標）　$(r,\ \varphi,\ z)$

$$\text{体積要素} \quad \mathrm{d}V = r\;\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\varphi\;\mathrm{d}z \qquad\qquad \text{線分要素} \quad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{56}$$

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}\;, \qquad (\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi}\;, \qquad (\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{57}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{58}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{59}$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla\times\boldsymbol{A})_r &= \frac{1}{r}\ \frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\\
(\nabla\times\boldsymbol{A})_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\\
(\nabla\times\boldsymbol{A})_z &= \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)-\frac{1}{r}\ \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}
\end{aligned}
\tag{60}
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla^2\boldsymbol{A})_r &= \nabla^2 A_r-\frac{A_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\\
(\nabla^2\boldsymbol{A})_\varphi &= \nabla^2 A_\varphi-\frac{A_\varphi}{r^2}+\frac{2}{r^2}\ \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\\
(\nabla^2\boldsymbol{A})_z &= \nabla^2 A_z
\end{aligned}
\tag{61}
$$

（球座標）　$(r,\ \theta,\ \varphi)$

$$
\text{体積要素}\quad \mathrm{d}V=r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi \qquad \text{線分要素}\quad \mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\ \mathrm{d}\varphi^2 \tag{62}
$$

$$
(\nabla f)_r=\frac{\partial f}{\partial r}\ ,\qquad (\nabla f)_\theta=\frac{1}{r}\ \frac{\partial f}{\partial\theta}\ ,\qquad (\nabla f)_\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial f}{\partial\varphi} \tag{63}
$$

$$
\nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\ \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \tag{64}
$$

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{65}
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla\times\boldsymbol{A})_r &= \frac{1}{r\sin\theta}\ \left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\\
(\nabla\times\boldsymbol{A})_\theta &= \frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\\
(\nabla\times\boldsymbol{A})_\varphi &= \frac{1}{r}\ \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]
\end{aligned}
\tag{66}
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla^2\boldsymbol{A})_r &= \nabla^2 A_r-\frac{2}{r^2}\ \left[A_r+\frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]\\
(\nabla^2\boldsymbol{A})_\theta &= \nabla^2 A_\theta+\frac{2}{r^2}\ \left[\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{A_\theta}{2\sin^2\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]\\
(\nabla^2\boldsymbol{A})_\varphi &= \nabla^2 A_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\ \left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}+\cot\theta\ \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}-\frac{A_\varphi}{2\sin\theta}\right]
\end{aligned}
\tag{67}
$$

（楕円体座標）　$(\xi,\ \eta,\ \zeta)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>b>c) \tag{68}$$

に対して，付随するパラメータ曲面族

$$\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}+\frac{z^2}{c^2+s}=1 \tag{69}$$

を定義する。分母をはらって

$$F(s)=(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)-x^2(s+b^2)(s+c^2)-y^2(s+c^2)(s+a^2)-z^2(s+a^2)(s+b^2) \tag{70}$$

と置けば，$F(-a^2)<0,\ F(-b^2)>0,\ F(-c^2)<0$ だから，3 次方程式 $F(s)=0$ は 3 つの実数解

$$\xi>-c^2\ >\eta>-b^2>\zeta>-a^2 \tag{71}$$

をもつ。このとき，ξ は楕円体面族 ($\xi=0$ が元の楕円体)，$\eta,\ \zeta$ はこれに直交する 2 種類の双曲面族を表し，$(\xi\ ,\eta,\ \zeta)$ が新たな直交座標系になる。元の座標系との関係は

$$x^2=\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\ y^2=\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\ z^2=\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \tag{72}$$

である。分かりやすいよう対称形に書いているが，y^2 では分母・分子が負であることに注意。ここで

$$H(s)=(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)\ ,\quad H(\xi)>0,\ H(\eta)<0,\ H(\zeta)>0 \tag{73}$$

を定義しておく。以下では係数はすべて正になるようにしてあり，こうしておくと間違えない。

$$\nabla f \;=\; 2\sqrt{\frac{H(\xi)}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}\,\frac{\partial f}{\partial\xi}\,\boldsymbol{e}_\xi+2\sqrt{\frac{-H(\eta)}{(\xi-\eta)(\eta-\zeta)}}\,\frac{\partial f}{\partial\eta}\,\boldsymbol{e}_\eta+2\sqrt{\frac{H(\zeta)}{(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)}}\,\frac{\partial f}{\partial\zeta}\,\boldsymbol{e}_\zeta \tag{74}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} \;=\; & \frac{2\sqrt{H(\xi)}}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}\,A_\xi \;+\; \frac{2\sqrt{-H(\eta)}}{(\xi-\eta)(\eta-\zeta)}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{(\eta-\zeta)(\xi-\eta)}\,A_\eta \\ & +\;\frac{2\sqrt{H(\zeta)}}{(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\sqrt{(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)}\,A_\zeta\end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 f \;=\; & \frac{4}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)}\left[(\eta-\zeta)\left(\sqrt{H(\xi)}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2 \;+\; (\xi-\zeta)\left(\sqrt{-H(\eta)}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2\right. \\ & \left. +\;(\xi-\eta)\left(\sqrt{H(\zeta)}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^2\ \right]\ f\end{aligned} \tag{76}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_\xi \;=\; \sqrt{\frac{-H(\eta)}{\xi-\eta}}\,\frac{2}{\eta-\zeta}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{\eta-\zeta}\,A_\zeta \;-\; \sqrt{\frac{H(\zeta)}{\xi-\zeta}}\,\frac{2}{\eta-\zeta}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\sqrt{\eta-\zeta}\,A_\eta \quad \text{etc.} \tag{77}$$