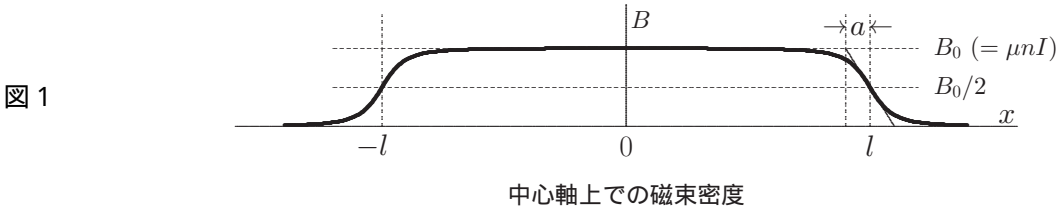


[250'] が詳細すぎて分かりにくいという苦情が寄せられたので、ダイジェスト版にしました。
気になる部分があれば、詳細版を見てください。

解説 (詳細は →[250']) 半径 a , 長さ $2l$ のソレノイドに一樣な巻き数密度 n で導線が巻かれていて電流 I を流すとき、ソレノイドの中心軸上の磁束密度は図 1 のようになります。端から半径 a 程度の部分を除いてほぼ一定、 $B_0 = \mu n I$ で、端では $B_0/2$ になります。(端での磁束密度の平行成分 $B_{\parallel}(l)$ が、長さ 2 倍のソレノイドの中央での値の半分であることは、今年の東大入試で問になっています。)



端で $B_{\parallel}$ が減少する分だけ、磁力線は外へ逃げ出しますが、その垂直成分 $B_{\perp}$ が電流に軸方向の電磁力、円電流の 1 巻きあたりで $2\pi a I B_{\perp}$ を及ぼします。したがって、ソレノイドの右半分 (主として端から半径 a 程度付近) の電流に働く軸方向の力は、負の向きに

$$F = 2\pi a \times n I \int_0^l B_{\perp}(x) dx = \frac{2\pi a B_0}{\mu} \int_0^l B_{\perp}(x) dx \tag{1}$$

です。磁力線の保存は、Gauss の法則 ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の積分形) で表現できますから、図 2-右図のようにソレノイドの右半分の内側に密着する円筒面に Gauss の法則を適用して

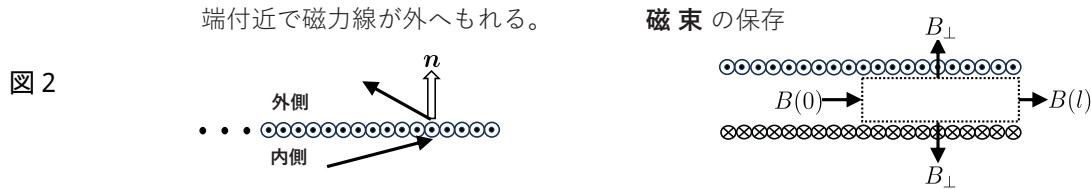
$$2\pi a \int_0^l B_{\perp}(x) dx = \pi a^2 [B(0) - B(l)] = \frac{\pi a^2 B_0}{2} \tag{2}$$

したがって、軸方向の電磁力は

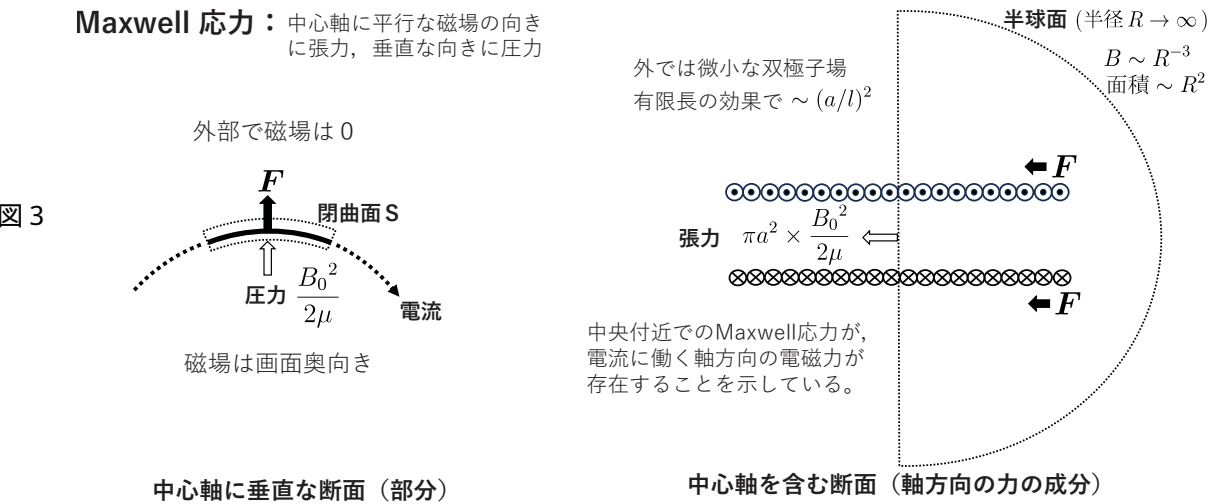
$$F = \pi a^2 \times \frac{B_0^2}{2\mu}$$

(3)

となります。



これを Maxwell 応力で求めるためには、テンソルについての積分定理¹を正確に使う必要がありますが、『磁力線の方に張力、垂直に圧力』を図 3 のように上手に使いえば、簡単に結論が得られます。



¹ 任意の閉曲面 S の表面で静磁場の Maxwell 応力を積分したものは、S 内の電流に働く電磁力のベクトル和に等しい。

物理問題 II

次の文章を読んで、 に適した式または数値を、{ }からは適切なものを一つ選びその番号を、それぞれの解答欄に記入せよ。なお、 はすでに で与えられたものと同じものを表す。また、問1～問3では、指示にしたがって、解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。ただし、円周率を π とし、以下に登場する物質や気体の透磁率はすべて μ とする。

- (1) 図1のように、長さ d 、半径 r の円筒に抵抗の無視できる導線を一様に N 回巻き付けて作ったソレノイド(以下コイルとよぶ)がある。円筒内部は気体で満たされており、コイルの長さ d は r と比べて十分長く、このコイルに電流を流すと円筒内部には一様な磁束密度ができる。このコイルに外部電源を接続して電流 I を流したときに円筒内部に発生する磁束密度の大きさはイ

次に、微小時間 Δt の間に電流を I から $I + \Delta I$ にゆっくりと変化させると、コイルには誘導起電力□ $\times \frac{\Delta I}{\Delta t}$ が発生する(ΔI は微小量であり、起電力の符号は電流の上流側の電位が高い場合を正とする)。このことから、このコイルの自己インダクタンスはハ

また、時間 Δt の間に外部電源がコイルにした仕事はニ $\times \Delta I$ である。

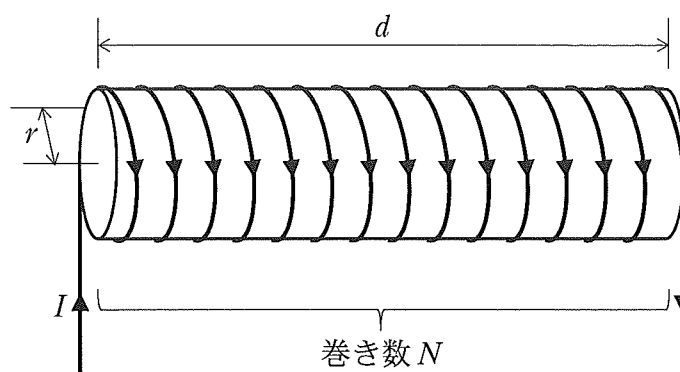


図1

図1のコイルに電流 I が流れているとき、コイルにはエネルギー 木 が蓄えられている。コイルを流れる電流が I から $I + \Delta I$ に変化する際のこのエネルギーの増加は、 $\Delta x \ll x$ を満たす十分小さな Δx に対して成立する近似式

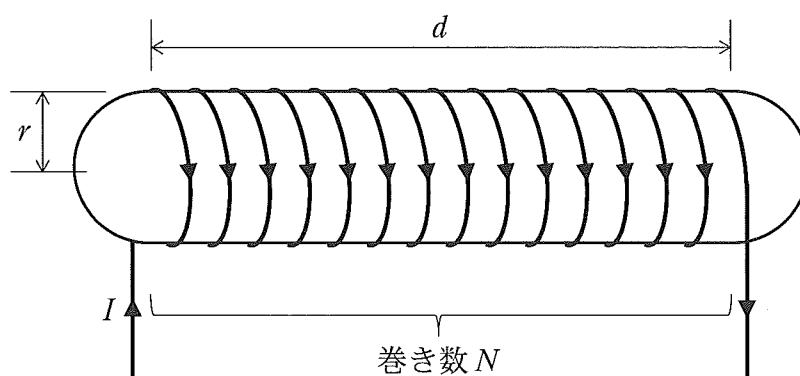
$$(x + \Delta x)^2 - x^2 \doteq 2x\Delta x \quad (\text{i})$$

を使うと 二 $\times \Delta I$ となり、外部電源がコイルにした仕事と一致する。つまり、外部電源が行った仕事がコイルのエネルギーとして蓄積される。

これでは内外の圧力差を維持できないのでは？

- (2) 図2のように、バルーンアート用の風船のような細長い円筒形状をした伸縮自在の閉じた膜に、伸縮自在で抵抗の無視できる導線を巻き数密度(円筒軸方向の単位長さ当たりの導線の本数)が一樣となるように N 回巻き付けて作ったソレノイド(以下コイルとよぶ)がある。膜内部の気体の量は調整でき、このとき膜は円筒形状を保ったまま半径や長さが変わる。導線は膜に接着されており、膜の半径や長さが変化するとき導線は膜に接したままむらなく伸び縮みし、巻き数密度は一樣に保たれるものとする。また、膜は厚みの無視できる絶縁体でできており、膜と導線は容易に伸縮するものとし、膜の面積、導線の長さおよび形状の変化に要する仕事は十分小さく無視できるものとする。

なお、以下では必要に応じて近似式(i)を使って $(\Delta t)^2$ を無視し、解答欄には Δt を使わずに解答を記入せよ。



まず、コイルの両端を固定装置で固定して動かないようにし、膜の長さが d に保たれるようにした。この状態でコイルに電流 I を流し、膜内部の気体の量を調整して、図 2 のようにコイルの半径が r となる状態を作った。このとき、コイル内部には一様な磁束密度 $\boxed{\text{イ}}$ が発生した。この状態から、電流 I を一定に保ったまま膜内部の気体の量をゆっくり増加させたところ、コイルの半径は速さ v で大きくなり、微小時間 Δt ののちに $r + v\Delta t$ になった。このとき、コイル一巻きを貫く磁束は Δt の間に $\Delta\Phi = \boxed{\text{ヘ}} \times \Delta t$ だけ増加するので、コイルには誘導起電力 $\boxed{\text{ト}}$ が発生する(起電力の符号は電流の上流側の電位が高いときを正とする)。また、時間 Δt の間に外部電源がコイルに対して行う仕事は $\boxed{\text{チ}} \times \Delta t$ である。

一方、コイルに蓄えられるエネルギー($\boxed{\text{ホ}}$)は、コイル半径が大きくなったことにより時間 Δt の間に $\boxed{\text{リ}} \times \Delta t$ だけ増加する。このエネルギーの変化は、外部電源が行った仕事 $\boxed{\text{チ}} \times \Delta t$ と、膜内外の気体の圧力差が膜に対して行った仕事の和に等しい。時間 Δt の間にコイルの体積は $\boxed{\text{ヌ}} \times \Delta t$ だけ増加するので、膜内外の気体の圧力差を

$$\delta p = (\text{外部の気体の圧力}) - (\text{内部の気体の圧力})$$

とすると、膜内外の気体の圧力差が時間 Δt の間に膜に対して行う仕事は δp を使って $\boxed{\text{ル}} \times \Delta t$ と書ける。以上のことから膜内外の気体の圧力差 δp を求めることができ、 μ と $\boxed{\text{イ}}$ で求めたコイル内部の磁束密度 B のみを用いて表すと $\delta p = \boxed{\text{ヲ}}$ と書ける。

Misleading !

いま、膜には膜内外の気体がもたらす圧力差に加え、電流 I が作り出す圧力が働いている。これらの圧力がつり合いの条件を満たすことから、電流 I が作り出す圧力は、{ワ：①コイルを膨らませる方向に働いている、②コイルを収縮させる方向に働いている、③働いていない}。

これは何？導線が及ぼす力？

電流が作り出す圧力(磁場の力？Maxwell応力？)が直接、膜に働くことは絶対にありません。「伸縮自在」の導線が、気体が漏れないようにぎっしりと詰めて巻かれており、両端はなめらかに滑る蓋(ふた)をして密封してあると思えばいいでしょう。

電荷の間に働く力を電場が生じた周りの空間を介して及ぼし合っていると考えるのが、静電場のマクスウェル応力の考え方ですが、電流の間に働く電磁力も、静磁場のマクスウェル応力で表すことができます。しかし応力が及ぶのは、あくまで電流に対してです。

電流に働いているのは「電流×磁束密度」の電磁力です。向きはソレノイドの面に垂直ですが、外では磁束密度が0であるため、力の大きさは半分です。さらに端の付近では磁力線が一様ではなく外へ漏れ出ます。この漏れ出る磁力線の軸に垂直な成分が端の付近の電流に対して軸に平行な方向に押し込む力を及ぼします。これが次の問題(3)です。

◇M10(756=108)

- (3) コイルを図2の状態に戻してから、コイルの半径を r に固定したうえでコイルの円筒軸方向の長さを自由に変化させられるようにした。コイルの円筒軸方向の長さが d の状態から、電流 I を一定に保ったまま膜の内部の気体量を変化させたところ、円筒軸方向の長さが速さ v でゆっくりと大きくなり、微小時間 Δt ののちに $d + v\Delta t$ になった。このとき、 $\Delta x \ll x$ を満たす十分小さな Δx に対して成り立つ近似式

$$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \doteq -\frac{\Delta x}{x^2} \quad (\text{ii})$$

を使って Δt の2次以上の項を無視すると、微小時間 Δt の間に外部電源がコイルに対して行う仕事は 力 $\times \Delta t$ であることが分かる。このとき問1～問3に答えよ。

問1 膜内外の気体の圧力差を

$$\delta p = (\text{外部の気体の圧力}) - (\text{内部の気体の圧力})$$

とするとき、 δp を求めよ。ただし、近似式(ii)を使って Δt の2次以上の項を無視し、解答には μ と イ で求めたコイル内部の磁束密度 B のみを用いよ。

Confusing !

問2 電流 I がコイルの両端面に作り出す圧力の向きについて、適切なものを以下から選んで番号を解答欄に記入せよ。

- ① コイルが円筒軸方向に伸びようとする圧力が働いている。
- ② コイルが円筒軸方向に縮もうとする圧力が働いている。
- ③ 圧力は働いていない。

問3 問2の結果を、コイルを形成する各一巻きの導線を流れる電流が相互に及ぼす力に基づいて簡潔に説明せよ。

『同じ向きの円形電流はたがいに引き合う力を及ぼし合っており、端ではその均衡が破れてソレノイドを押し込む力が生じる。』

電流に働く力を表すのは、ソレノイドの中央で作られる圧力(張力)で、端の断面での圧力はその $1/4$ 弱です。それに、ソレノイドの両端の切り口は伸縮自在の膜のままでは気体の圧力差を保持できません。膨んでもそれ以上は伸びない素材か、変形しない板を接着しておく必要があります。板であれば導線が力を及ぼし、板の内外の気体の圧力差と釣り合いますが、この力は決して圧力(張力)ではありません。単にソレノイドの断面積に比例する普通の力です。
 問題を解くのに支障はないので、受験生は実にやっかいな計算をするのに夢中で試験場では気が付かなかったでしょうが、物理的なメカニズムはちゃんと把握しておく方がいいでしょう。正確な理解なしに生半可な「マクスウェル応力」という知識で鵜呑みしてしまうのは禁物です。