一般の曲線座標系　（参考）J.A.Stratton "*ELECTROMAGNETIC THEORY*", Chap.1, p.38-

$u^i = f_i(x,\, y,\, z),\, (i = 1,\, 2,\, 3)$ に対して，**共変基底**と共変計量テンソルを

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_i \boldsymbol{a}_i \mathrm{d}u^i\,, \quad \boldsymbol{a}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial x}{\partial u^i}\,, \frac{\partial y}{\partial u^i}\,, \frac{\partial z}{\partial u^i} \right) \tag{1}$$

$$g_{ij} = \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{\cdot}\, \boldsymbol{a}_j = \sum_x \frac{\partial x}{\partial u^i}\frac{\partial x}{\partial u^j} \quad (= g_{ji})\,, \quad g = \det\,[g_{ij}] \tag{2}$$

と定義する。（ここでは行列を $[\cdots]$ で表すことにする。）計量テンソルの意味は

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j \tag{3}$$

であり，$[g_{ij}] = \textbf{diagonal}$ のとき**直交座標系**である。これに対して**反変基底**と反変計量テンソル

$$\boldsymbol{a}^i = \frac{1}{V}(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k)\,, \quad V = \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{\cdot}\,(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k) \quad (i,\, j,\, k:\, \textbf{cyclic})\,, \quad g^{lm} = \boldsymbol{a}^l\boldsymbol{\cdot}\, \boldsymbol{a}^m \tag{4}$$

を導入する。$\boldsymbol{a}^i$ と $\boldsymbol{a}_i$ は**逆ベクトル**の関係 (m1)，$[g_{ij}]$ と $[g^{lm}]$ はたがいに逆行列 (m2) である。すなわち

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{\cdot}\, \boldsymbol{a}^j = \boldsymbol{a}^j\boldsymbol{\cdot}\, \boldsymbol{a}_i = \delta_i^j\,, \quad \sum_k g^{jk}g_{ki} = \delta_i^j\,, \quad \boldsymbol{a}^l = \sum_i g^{li}\boldsymbol{a}_i\,, \quad \boldsymbol{a}_i = \sum_l g_{il}\boldsymbol{a}^l \tag{5}$$

$\boldsymbol{a}^i$ を並べた行列 $[\boldsymbol{a}^i]$（の転置）は $(\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y,\, \mathrm{d}z) = \sum_i \boldsymbol{a}_i\mathrm{d}u^i$ の変換行列 $[\boldsymbol{a}_i]$ の逆行列であり，

$$\boldsymbol{a}^i = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x}, \frac{\partial u^i}{\partial y}, \frac{\partial u^i}{\partial z} \right) = \nabla u^i \tag{6}$$

ベクトル $\boldsymbol{B}$ の共変成分，反変成分をそれぞれ

$$\boldsymbol{B} = \sum b_i\boldsymbol{a}^i = \sum_i b^i\boldsymbol{a}_i \tag{7}$$

で定義する。普通のベクトルや座標 $\{u^i\}$ は（基底と）反変，∇ は共変である。(5) を用いれば

$$b_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{a}_i\,, \quad b^i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{a}^i = \sum_j g^{ij}\, b_j \tag{8}$$

規格化した単位ベクトル $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i/\sqrt{\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{\cdot}\, \boldsymbol{a}_i} = \boldsymbol{a}_i/\sqrt{g_{ii}}$ を用いて（反変）成分を表すこともある：

$$\boldsymbol{B} = \sum_i B^i\boldsymbol{e}_i\,, \quad B^i = \sqrt{g_{ii}}\, b^i \qquad \text{直交座標系}^{\text{(m12)}}\text{では記号 } h_i = \sqrt{g_{ii}},\ \sqrt{g} = h_1h_2h_3 \text{ を用いる。} \tag{9}$$

（発散，回転，勾配の公式） (m6-m8)

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}(\sqrt{g}\, b^i)\,, \quad \mathrm{div}(\phi\boldsymbol{B}) = \phi\,\mathrm{div}\boldsymbol{B} + \sum_i b^i\frac{\partial\phi}{\partial u^i} = \phi\,\mathrm{div}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\cdot}\,\mathrm{grad}\phi \tag{10}$$

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})^1 = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})\boldsymbol{\cdot}\, \boldsymbol{a}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial b_3}{\partial u^2} - \frac{\partial b_2}{\partial u^3} \right) \quad (\mathrm{cyclic})\,, \quad b_i = \sum_j b^jg_{ji} \tag{11}$$

$$\mathrm{grad}\,\phi = \sum_i \boldsymbol{a}^i\frac{\partial\phi}{\partial u^i} = \sum_i\sum_j \frac{\partial\phi}{\partial u^i}g^{ij}\boldsymbol{a}_j\,, \quad \mathrm{grad}(\phi\psi) = \phi\mathrm{grad}\psi + \psi\mathrm{grad}\phi \tag{12}$$

$$\nabla^2\phi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\phi) = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i\sum_j \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial u^j} \right) = \sum_{i,j} g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial u^k} \right)\phi \quad ※ \tag{13}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A}) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) \quad \text{：ユークリッド空間では等式が成り立つ。一般に } (\nabla^2\boldsymbol{A})^i \neq \nabla^2 A^i \tag{14}$$

次ページ以下は説明のメモ (m1) - (m12)　　※ 後半は (m9)，(m10) を用いて示される。

(m1) 逆ベクトルの関係： 電磁気学に必要な 3 次元では，この定義の方が幾何学的意味（直交性など）が分かりやすく，後の応用でも便利であるが，一般次元では計量テンソル $[g_{ij}]$ の逆行列 $[g^{ij}]$ を用いて

$$\boldsymbol{a}^i = \sum_j g^{ij}\boldsymbol{a}_j \tag{15}$$

で定義され，直交性

$$\boldsymbol{a}^i\cdot\boldsymbol{a}_j = \sum_k g^{ik}\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_j = \sum_k g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j \tag{16}$$

は明らかである。逆行列は余因子を用いて表すことができる。→ (m11)

(m2) 逆行列の関係： $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_i \boldsymbol{a}_i\mathrm{d}u^i$ を $\{\boldsymbol{a}^i\}$ で展開して係数を du_i とするとき

$$\sum_i \boldsymbol{a}_i\mathrm{d}u^i = \sum_i \boldsymbol{a}^i du_i \quad \text{より} \quad \mathrm{d}u^i = \sum_j g^{ij}du_j,\quad du_j = \sum_k g_{jk}\mathrm{d}u^k = \sum_n\sum_k g_{jk}g^{kn}\,du_n \tag{17}$$

(m3) 共変・反変基底の相互関係： ベクトル 3 重積の公式 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ を用いる。

$$V[\boldsymbol{a}^2\times\boldsymbol{a}^3] = \boldsymbol{a}^2\times(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_1 - (\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 \tag{18}$$

(m4) $\boldsymbol{V = \sqrt{g}}$ である： （直観的ではなく，3 次元版ではここが一番の難関）

$\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3$ を $\{\boldsymbol{a}_i\}$ で展開して，出てきた $\boldsymbol{a}^i$ を再び $\boldsymbol{a}_j$, $\boldsymbol{a}_k$ で表す（i, j, k : **cyclic**）:

$$V = \boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{a}_1\cdot\left(\sum_i\,[(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\cdot\boldsymbol{a}^i]\,\boldsymbol{a}_i\right) = \frac{1}{V}\sum_i\,[(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\cdot(\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{a}_k)]\,(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_i) \tag{19}$$

$[\ldots]$ にベクトル 4 重積の公式 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$ を用いると

$$V^2 = \sum_i (g_{2j}\,g_{3k} - g_{2k}\,g_{3j})\,g_{1i} = \sum_i g_{1i}\begin{vmatrix} g_{2j} & g_{2k} \\ g_{3j} & g_{3k}\end{vmatrix} = \det[g_{ij}] = g \tag{20}$$

(m5) 以下はスカラー場やベクトル場の微分を求める際に必要となる。

微小線要素： u^i 方向に $\mathrm{d}u^i$ 変化したときの $\boldsymbol{r}$ の微小変化を次のように定義する：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{a}_i\mathrm{d}u^i\ ,\quad \mathrm{d}s_i = |\mathrm{d}\boldsymbol{s}_i| = \sqrt{g_{ii}}\,\mathrm{d}u^i$$

面積要素： u^1 曲面上で $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_3$ で形成される 微小平行四辺形 の面積は

$$\mathrm{d}\mathcal{A}^1 = |\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}_3| = |\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3|\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 = V|\boldsymbol{a}^1|\,\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 = \sqrt{g\,g^{11}}\,\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 \tag{21}$$

方向まで含めれば

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{A}}^1 = \mathrm{d}\boldsymbol{s}_2\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}_3 = (\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 = \sqrt{g}\,\boldsymbol{a}^1\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 \qquad (V = \sqrt{g}) \tag{22}$$

体積要素： 同じく $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1$，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2$，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_3$ で形成される 微小平行六面体 の体積である。

$$\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}\boldsymbol{s}_1\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}_3) = \boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 = \sqrt{g}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 \tag{23}$$

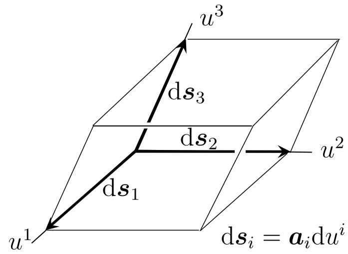
(m6) 勾配： ∇ の 共変 成分

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{\cdot}\nabla = \sum_x \frac{\partial x}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u^i} \quad \text{より} \quad \nabla = \sum_i \boldsymbol{a}^i(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{\cdot}\nabla) = \sum_i \boldsymbol{a}^i\frac{\partial}{\partial u^i} \qquad \left(= \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial u^i}\boldsymbol{a}^i - \frac{\partial \boldsymbol{a}^i}{\partial u^i}\right]\right) \tag{24}$$

(m7) 発散： この形のままではスカラーにならない[1]。微小平行六面体に Gauss の定理を適用して定義する。S は微小平行六面体の表面である。

$$(\nabla\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{B})\mathrm{d}\mathcal{V} = \oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{n}\mathrm{d}\mathcal{A}\ , \quad \boldsymbol{n}\mathrm{d}\mathcal{A}^i = \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{A}}^i = \sqrt{g}\,\boldsymbol{a}^i\mathrm{d}u^j\mathrm{d}u^k \quad (i,j,k：\textbf{cyclic}) \tag{25}$$

$$\boldsymbol{B} = \sum_i (\boldsymbol{B}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{a}^i)\boldsymbol{a}_i = \sum_i b^i\,\boldsymbol{a}_i \tag{26}$$



より，u^1 面上で

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{n}\mathrm{d}\mathcal{A} = \sqrt{g}\,b^1\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 \tag{27}$$

したがって相対する $u^1+\mathrm{d}u^1$ 面と u^1 面での差は

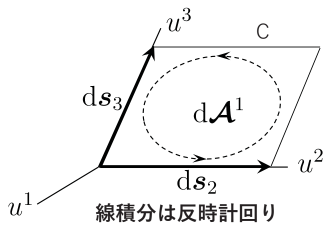
$$\mathrm{d}u^1\frac{\partial}{\partial u^1}b^1\sqrt{g}\,\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 = \mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3\frac{\partial}{\partial u^1}b^1\sqrt{g} \tag{28}$$

以上より，$\mathrm{d}\mathcal{V} = \sqrt{g}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3$ を用いれば

$$\nabla\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}(\sqrt{g}\,b^i) \tag{29}$$

(m8) 回転： 同様に，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2$，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_3$ で作られる微小平行四辺形に対して Stokes の定理を適用して

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{A}}^1\boldsymbol{\cdot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{B}) = \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{B}\boldsymbol{\cdot}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{30}$$



C は閉曲線である平行四辺形の周縁（**反時計回り**）を表す。

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\cdot}\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{a}_2\mathrm{d}u^2 = b_2\mathrm{d}u^2 \tag{31}$$

したがって，相対する u^3 の辺と $u^3+\mathrm{d}u^3$ の辺とでの差は，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2$ の方向を考慮して

$$-\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3\,\frac{\partial b_2}{\partial u^3} \tag{32}$$

であり，辺 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_3$ での寄与と合わせれば，面積要素の表現 $\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{A}}^1 = \sqrt{g}\,\boldsymbol{a}^1\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3$ を用いて

$$\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{\cdot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{B}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial b_3}{\partial u^2} - \frac{\partial b_2}{\partial u^3}\right) \tag{33}$$

これが 反変 成分であるから，$\{\boldsymbol{a}_i\}$，および単位ベクトル $\{\boldsymbol{e}_i\}$ での展開は（i,j,k：**cyclic**）

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial b_k}{\partial u^j} - \frac{\partial b_j}{\partial u^k}\right)\boldsymbol{a}_i = \sum_i \sqrt{\frac{g_{ii}}{g}}\left(\frac{\partial b_k}{\partial u^j} - \frac{\partial b_j}{\partial u^k}\right)\boldsymbol{e}_i \tag{34}$$

$$b_l = \sum_m g_{lm}b^m = \sum_m \frac{g_{lm}}{\sqrt{g_{mm}}}B^m \tag{35}$$

---

[1] 最後の $(\cdots)$ に Christoffel の記号 $\Gamma^l_{ij} = \boldsymbol{a}^l\boldsymbol{\cdot}\dfrac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial u^j} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{a}^l}{\partial u^j}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{a}_i$ より $\dfrac{\partial \boldsymbol{a}^l}{\partial u^j} = -\sum_i \boldsymbol{a}^i\Gamma^l_{ij}$ と，等式 (m11) $\sum_l \Gamma^l_{il} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial u^i}$ を用いて導かれる。等式は 3 次元 の場合，$\sqrt{g} = V = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)$ を使えば，簡単に確認 (m10) することができる。

(m9) 脚注 1： Γ^l_{ij} は，ベクトル $\partial\boldsymbol{a}_i/\partial u^j$ を $\{\boldsymbol{a}_l\}$ で展開した係数で

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial u^j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_l \Gamma^l_{ij}\boldsymbol{a}_l \ \rightarrow \ \Gamma^l_{ij} = \boldsymbol{a}^l\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial u^j} = -\frac{\partial \boldsymbol{a}^l}{\partial u^j}\cdot\boldsymbol{a}_i\ , \quad \frac{\partial \boldsymbol{a}^l}{\partial u^j} = -\sum_i \boldsymbol{a}^i\Gamma^l_{ij} \tag{36}$$

$$-\sum_i \frac{\partial \boldsymbol{a}^i}{\partial u^i} = \sum_{i,j}\Gamma^i_{ji}\boldsymbol{a}^j\ , \quad (i\to k,\ j\to i \text{ として}) \quad \nabla = \sum_i\left(\frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_k \Gamma^k_{ik}\right)\boldsymbol{a}^i \tag{37}$$

(m10) $\boldsymbol{\Gamma^k_{ik}}$ について： 電磁気学や流体力学に必要な <u>3 次元</u> の場合は逆算により簡単に確認できる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial u^i} &= \frac{\partial}{\partial u^i}\left[\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\right] \\ &= \sum_k\Big[\Gamma^k_{1i}\,\boldsymbol{a}_k\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3) + \Gamma^k_{2i}\,\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_k\times\boldsymbol{a}_3) + \Gamma^k_{3i}\,\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_k)\Big] = (\Gamma^1_{1i}+\Gamma^2_{2i}+\Gamma^3_{3i})V\end{aligned} \tag{38}$$

$$\sum_k \Gamma^k_{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u^i} \quad \text{（注．上の定義により } \Gamma^k_{ji}=\Gamma^k_{ij}\text{），よって } \nabla = \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u^i}\sqrt{g}\,\boldsymbol{a}^i \tag{39}$$

さらに，展開 $\boldsymbol{B} = \sum_j b_j\boldsymbol{a}^j$，および (m3) より $V\,[\boldsymbol{a}^1\cdot(\boldsymbol{a}^2\times\boldsymbol{a}^3)] = 1$，$V=\sqrt{g}$ を用いれば

$$\boldsymbol{a}^1\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) = \sum_{i,j}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u^i}\sqrt{g}\,b_j\,\boldsymbol{a}^1\cdot(\boldsymbol{a}^i\times\boldsymbol{a}^j) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial b_3}{\partial u^2} - \frac{\partial b_2}{\partial u^3}\right) \quad (1,\,2,\,3 : \text{cyclic のみ残る}) \tag{40}$$

(m11) Christoffel 記号（一般の次元）：ここでは慣習どおり，断らない限り**重複添字**は和をとるとする。また，$(i,\,j,\,k)$ は必ずしも cyclic を意味しない。

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial u^i}(\boldsymbol{a}_j\cdot\boldsymbol{a}_l) = \frac{\partial \boldsymbol{a}_j}{\partial u^i}\cdot\boldsymbol{a}_l + \frac{\partial \boldsymbol{a}_l}{\partial u^i}\cdot\boldsymbol{a}_j = \Gamma^k_{ji}\,g_{kl} + \Gamma^k_{li}\,g_{kj} \tag{41}$$

から添え字を変えて

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \Gamma^k_{ij}\,g_{kl} + \Gamma^k_{lj}\,g_{ki}\ , \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \Gamma^k_{il}\,g_{kj} + \Gamma^k_{jl}\,g_{ki} \tag{42}$$

を作り，対称性 $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ を用いて「元の式 ＋ 第 2 式 － 第 3 式」を求めると，

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = 2\Gamma^k_{ij}\,g_{kl} \tag{43}$$

以上より，計量テンソルで **Christoffel 記号**が定義される：

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right) \tag{44}$$

$j=k$ とし，k と l について和をとるとき l と k は付け替えてもよいので，第 2 項と第 3 項はキャンセルし

$$\Gamma^k_{ik} = \frac{1}{2}g^{lk}\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} \tag{45}$$

ここで行列 $[g_{kl}]$ の (kl) 成分の**余因子**（小行列式）を G^{lk} とすれば

$$\textbf{逆行列：}\,g^{lk} = g^{-1}G^{lk}\ , \quad \textbf{行列式：}\,g = \sum_l g_{kl}\,G^{lk} \text{（この } k \text{ については和をとらない）} \tag{46}$$

g は行列成分 $\{g_{kl}\}$（のみ）の関数であり，また G^{lk} は余因子の定義により成分 g_{kl} を含まないから

$$g^{lk}\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} = \frac{G^{lk}}{g}\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{kl}}\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial u^i} \qquad \left(\textbf{注．}\text{行列式の定義から } G^{lk} = \frac{\partial g}{\partial g_{kl}}\right) \tag{47}$$

したがって

$$\Gamma^k_{ik} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log g}{\partial u^i} = \frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial u^i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u^i}\ , \qquad \nabla = \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u^i}\sqrt{g}\,\boldsymbol{a}^i \tag{48}$$

(m12) 直交座標系

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{a}_i}{\sqrt{\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_i}} = \frac{\boldsymbol{a}_i}{h_i}\,,\quad \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}\,,\quad h_i = \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{\sum_{x,y,z}\left(\frac{\partial x}{\partial u^i}\right)^2}\,,\quad \sqrt{g} = h_1h_2h_3 \tag{49}$$

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{h_k}\left(\frac{\partial h_k}{\partial u^i}\delta_{jk} + \frac{\partial h_k}{\partial u_j}\delta_{ik} - \frac{h_i}{h_k}\frac{\partial h_i}{\partial u^k}\delta_{ij}\right)\,,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial u^i} = \frac{\boldsymbol{e}_i}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial u^j} - \delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\frac{\boldsymbol{e}_k}{h_k}\frac{\partial h_i}{\partial u^k} \tag{50}$$

$\boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{e}_i$ だから，$B^i = B_i = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{e}_i = b_i/h_i = h_ib^i$ を区別する必要はない。以下では (i,j,k) は **cyclic**

$$\nabla\phi = \sum_{i=1}^{3}\frac{\boldsymbol{e}_i}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u^i} \tag{51}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}h_jh_kB_i \tag{52}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\boldsymbol{e}_i}{h_jh_k}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}h_kB_k - \frac{\partial}{\partial u^k}h_jB_j\right) \tag{53}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}\frac{h_jh_k}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u^i}\,,\qquad \nabla^2\phi\psi = \phi\nabla^2\psi + 2\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \psi\nabla^2\phi \tag{54}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = \sum_{l=1}^{3}\frac{\boldsymbol{e}_l}{h_l}\frac{\partial}{\partial u_l}\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}h_jh_kA_i\right) \tag{55}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\boldsymbol{e}_i}{h_jh_k}\left[\frac{\partial}{\partial u^j}\frac{h_k}{h_ih_j}\left(\frac{\partial h_jA_j}{\partial u^i} - \frac{\partial h_iA_i}{\partial u^j}\right) - \frac{\partial}{\partial u^k}\frac{h_j}{h_kh_i}\left(\frac{\partial h_iA_i}{\partial u^k} - \frac{\partial h_kA_k}{\partial u^i}\right)\right] \tag{56}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) \tag{57}$$

ここで[2]

$$\nabla\cdot\nabla = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\sqrt{g}}{{h_i}^2}\frac{\partial}{\partial u^i} \tag{58}$$

をベクトル $\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{3}A_j\boldsymbol{e}_j$ に形式的に作用させれば

$$\nabla\cdot\nabla\,\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\nabla^2A_i + 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{1}{{h_i}^2}\frac{\partial\boldsymbol{e}_j}{\partial u_i}\right]\frac{\partial A_j}{\partial u^i} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\sqrt{g}}{{h_i}^2}\frac{\partial\boldsymbol{e}_j}{\partial u^i}\right)\right]A_j \tag{59}$$

と書くことができて，曲線座標系では第 2，3 項が残る。しかしながらユークリッド空間では（一般の曲線座標系で）等式 (14) が成り立つことが示されているので，(57) の右辺から計算する方が楽である。

$\nabla^2\boldsymbol{A}$ の一般形は複雑で，ほとんど意味のある形にまとめることはできない。以下を指針にして個々の曲線座標ごとに (57) の右辺を計算する方が賢明である。── 右辺を計算した結果では，第 l 成分 $(\nabla^2\boldsymbol{A})_l$ において $\{A_i\}$ の 2 階微分 の項は対応するベクトル成分のスカラ・ラプラシアン ∇^2A_l の形にまとめられ，それ以外には現れない。直角座標（デカルト座標）以外では，一般にこの項以外に $\{A_i,\,\partial A_i/\partial u_j\}$ の形の線形項が残る。ただし第 l 成分には，$i=l$ の $\partial A_l/\partial u_j$ の形の 1 階微分の項は含まれない。

[2] (13) の後半（※）に対応する表現を用いてもよいが，次の表式が複雑になる。

以下は，2004 年に楕円体座標を扱ったときに (57) の右辺を計算して求めていた結果であるが，もう少しコンパクトにまとまるはずだと思って放置していた。何かの役に立つかもしれないので記録しておく。計量テンソル（ここでは $\{h_i\}$）の 2 階微分には元のユークリッド空間に‘ ゆがみ ’がないことを表す条件式（Riemann-Christoffel 曲率テンソル）があるため，$\{A_i\}$ の係数は別のまとめ方も可能であろう。

以下では $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial u^i}$ の**簡略記号**を用いる。

$$
\begin{aligned}
(\nabla^2 \boldsymbol{A})_1 \;=\;& \nabla^2 A_1 \qquad\qquad \text{2 と 3 については完全に\textbf{対称}} \\
+\;& 2\left[\frac{\partial_1 A_2}{h_1}\left(\frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1}\right)+\frac{\partial_1 A_3}{h_1}\left(\frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1}\right)-\frac{\partial_2 A_2}{h_2}\left(\frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2}\right)-\frac{\partial_3 A_3}{h_3}\left(\frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3}\right)\right] \\
+\;& A_1\left[\frac{1}{h_1}\partial_1\left(\frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2}+\frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3}\right)+\frac{1}{h_2 h_3}\partial_2\left(h_3\frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1}\right)+\frac{1}{h_3 h_2}\partial_3\left(h_2\frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1}\right)\right] \\
+\;& A_2\left[\frac{1}{h_1}\partial_1\left(\frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1}+\frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3}\right)-\frac{1}{h_2 h_3}\partial_2\left(h_3\frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2}\right)\right] \\
+\;& A_3\left[\frac{1}{h_1}\partial_1\left(\frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1}+\frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2}\right)-\frac{1}{h_3 h_2}\partial_3\left(h_2\frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3}\right)\right] \qquad (60)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla^2 \boldsymbol{A})_2 \;=\;& \nabla^2 A_2 \qquad\qquad \text{3 と 1 については完全に\textbf{対称}} \\
+\;& 2\left[\frac{\partial_2 A_3}{h_2}\left(\frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2}\right)+\frac{\partial_2 A_1}{h_2}\left(\frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2}\right)-\frac{\partial_3 A_3}{h_3}\left(\frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3}\right)-\frac{\partial_1 A_1}{h_1}\left(\frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1}\right)\right] \\
+\;& A_2\left[\frac{1}{h_2}\partial_2\left(\frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3}+\frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1}\right)+\frac{1}{h_3 h_1}\partial_3\left(h_1\frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2}\right)+\frac{1}{h_1 h_3}\partial_1\left(h_3\frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2}\right)\right] \\
+\;& A_3\left[\frac{1}{h_2}\partial_2\left(\frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2}+\frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1}\right)-\frac{1}{h_3 h_1}\partial_3\left(h_1\frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3}\right)\right] \\
+\;& A_1\left[\frac{1}{h_2}\partial_2\left(\frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2}+\frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3}\right)-\frac{1}{h_1 h_3}\partial_1\left(h_3\frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1}\right)\right] \qquad (61)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla^2 \boldsymbol{A})_3 \;=\;& \nabla^2 A_3 \qquad\qquad \text{1 と 2 については完全に\textbf{対称}} \\
+\;& 2\left[\frac{\partial_3 A_1}{h_3}\left(\frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3}\right)+\frac{\partial_3 A_2}{h_3}\left(\frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3}\right)-\frac{\partial_1 A_1}{h_1}\left(\frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1}\right)-\frac{\partial_2 A_2}{h_2}\left(\frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2}\right)\right] \\
+\;& A_3\left[\frac{1}{h_3}\partial_3\left(\frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1}+\frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2}\right)+\frac{1}{h_1 h_2}\partial_1\left(h_2\frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3}\right)+\frac{1}{h_2 h_1}\partial_2\left(h_1\frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3}\right)\right] \\
+\;& A_1\left[\frac{1}{h_3}\partial_3\left(\frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3}+\frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2}\right)-\frac{1}{h_1 h_2}\partial_1\left(h_2\frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1}\right)\right] \\
+\;& A_2\left[\frac{1}{h_3}\partial_3\left(\frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3}+\frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1}\right)-\frac{1}{h_2 h_1}\partial_2\left(h_1\frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2}\right)\right] \qquad (62)
\end{aligned}
$$

円柱座標： $(r,\,\varphi,\,z) \;\to\; h_1 = 1,\, h_2 = r,\, h_3 = 1,$　残るのは $\partial_1 h_2 = 1$ のみ

球座標： $(r,\,\theta,\,\varphi) \;\to\; h_1 = 1,\, h_2 = r,\, h_3 = r\sin\theta,$　残るのは $\partial_1 h_2 = 1$, $\partial_1 h_3 = \sin\theta$, $\partial_2 h_3 = r\cos\theta$ のみ，$\partial_3 h_i$ はすべて 0