

円筒状ソレノイドを流れる電流には、内部にできる軸方向の様な磁力線により半径を広げる向きに電磁力が働く。さらに、端付近で外へもれ出る磁力線の軸に垂直な成分が、軸方向に引き込む電磁力を及ぼす。

ソレノイドの中心軸上の磁束密度 半径 a の円電流 I の中心軸上で中心から x だけ離れた点における磁束密度は、Biot-Savart の法則

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I ds}{r^2} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1)$$

から軸方向の成分を取り出して

$$B(x) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_0^{2\pi a} \frac{I ds a}{r^2} \frac{a}{r} = \frac{\mu a^2 I}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (r = \sqrt{a^2 + x^2}) \quad (2)$$

である。半径 a 、長さ $2l$ のソレノイドに様な密度 n ($na \gg 1$)¹ で導線が巻かれていて電流 I を流すとき、並んだ円電流の重ね合わせと考えれば、中心軸上で中心から x の位置にできる磁束密度は

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{\mu a^2}{2} \int_{-l}^l \frac{nI dx'}{[a^2 + (x' - x)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{B_0}{2} \left[\frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + a^2}} + \frac{l + x}{\sqrt{(l + x)^2 + a^2}} \right] \quad (B_0 = \mu n I) \end{aligned} \quad (3)$$

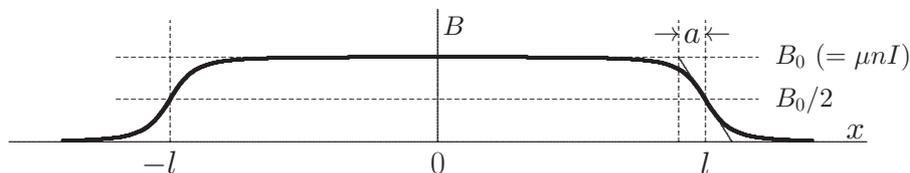
となる。ソレノイドの中央と端ではそれぞれ

$$B(0) = \frac{B_0 l}{\sqrt{l^2 + a^2}} \simeq B_0 \left(1 - \frac{a^2}{2l^2} \right), \quad B(l) = \frac{B_0 l}{\sqrt{4l^2 + a^2}} \simeq \frac{B_0}{2} \left(1 - \frac{a^2}{8l^2} \right) \quad (4)$$

であり、 $l \gg a$ のとき $(a/l)^2$ より高次の寄与を無視すれば

$$B(0) \simeq B_0, \quad B(l) \simeq \frac{B_0}{2} \quad (5)$$

となる²。 $x = l$ での勾配は $B_0/2a$ であり、図のように端から 半径 a 程度 を除けば磁束密度はほぼ一定である。この範囲では、並進対称性から軸上以外でも磁力線は軸に平行と考えられ、ソレノイドの内部では様に B_0 、外部では 0 であることが分かる。軸に垂直な成分は、 $B(x)$ を x について展開すれば、中央辺りで $(a/l)^4 B_0$ 程度にすぎないことが示される。一様でない端の部分では、外へもれ出る磁力線の垂直成分が顕著になる。この端での乱れは、ソレノイドの長さによらず、ほぼ同じ形 で現れる。



中心軸上での磁束密度

端部分における電磁力の軸方向の成分 外へもれ出る磁力線のソレノイドの表面に垂直な成分 $B_{\perp} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ は面を横切るとき連続、軸方向の成分 B_{\parallel} は不連続で、Ampère の法則により $\Delta B_{\parallel} = \mu n I = B_0$ (外側では負) である。これから Maxwell 応力 (後述) の軸方向の成分を計算すればよいが、要するに軸方

¹ コイルのピッチ角 $\alpha = \tan^{-1}(1/2\pi a n)$ が有限なら、軸上で $B_0/2\pi a n$ 程度のらせん状の横成分を無視できなくなる。

² 中心 $x = 0$ での磁束密度は、右半分と左半分のコイル電流が作る磁束密度の和、すなわちソレノイドを真ん中で切り離れたとき切り口にできる磁束密度は $B(0)/2$ である。つまり、このような計算をしなくても、十分に長いソレノイドの端では磁束密度が $B_0/2$ であることは、高校生でも理解できる。一般に任意の位置での磁場ベクトルは、それより左側の部分が右端に作る磁場と、右側の部分が左端に作る磁場の合成である。

向の電磁力を及ぼすのは垂直成分 B_{\perp} であり、コイルの1巻き当たりの力は $2\pi aIB_{\perp}$ となる。したがって、磁力線がもれ出ることによってソレノイドの右半分（主として端から半径 a 程度付近）の電流に働く軸方向の力は、負の向きに

$$F = 2\pi a \times nI \int_0^l B_{\perp}(x) dx \quad (6)$$

である。下の右図のようにソレノイドの右半分の内側に密着する円筒面に Gauss の法則を適用すると³

$$2\pi a \int_0^l B_{\perp}(x) dx = \pi a^2(B(0) - B(l)) \simeq \frac{\pi a^2 B_0}{2} \left(1 - \frac{7a^2}{8l^2}\right) \quad (7)$$

したがって

$$F \simeq \pi a^2 \times \frac{B_0^2}{2\mu} \left(1 - \frac{7a^2}{8l^2}\right) \quad (8)$$

となる。() は長さが有限であることによる補正であり、無視しておいてもよい。



垂直2等分面上での磁束密度 もれ出た磁力線は外側の空間を通過して左右でつながる。(2)からも想像されるように半径 a の円電流は $\pi a^2 I$ の磁気モーメント (EB 対応 → 雑書庫 [214]) に等価である。長さ $2l$ 、巻き数密度 n の細長いソレノイドの磁気モーメントは $2nl \times \pi a^2 I = 2l \times \pi a^2 nI$ であり、端から少し離れた位置 から見れば、両端に $\pm q'$ ($q' = \pi a^2 nI$) の磁極が置かれたと見なすことができる。したがって、ソレノイドの外側の垂直2等分面上での磁束密度は、半径 r の位置で軸に平行に

$$B = \frac{\mu q'}{4\pi(l^2 + r^2)} \frac{2l}{\sqrt{l^2 + r^2}} = \frac{la^2 B_0}{2(l^2 + r^2)^{3/2}} \quad (9)$$

と近似される。面を介して左右が引き合う Maxwell 応力 (後述) は Coulomb 力に等しく

$$\int_0^{\infty} \frac{B^2}{2\mu} 2\pi r dr = \frac{\mu q'^2}{4\pi(2l)^2} = \frac{a^2}{8l^2} \left(\pi a^2 \times \frac{B_0^2}{2\mu}\right) \quad (10)$$

となり、以下のように Maxwell 応力の積分定理を適用すれば、ソレノイドの端付近の電流に働く力はこの分だけ僅かに大きくなる⁴。

静磁場の Maxwell 応力 任意の閉曲面 S 内の電流密度 j に対して働く電磁力のベクトル和に対して

$$\mathbf{F}_S = \int_{S内} \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV = \int_{S内} \left(\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu}\right) \times \mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS \quad (11)$$

が成り立つ。(n は外向きの法線ベクトル) ここで \mathbf{T} は

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} \left(B_{\alpha} B_{\beta} - \frac{B^2}{2} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (\alpha, \beta = x, y, z) \quad (12)$$

³ $x = 0, r \leq a$ での平行成分は、 $B_{\parallel}(r) \simeq (1 + 3a^2 r^2 / 4l^4) B(0)$ と評価され、 B は $x = 0$ の断面内で $(a/l)^2$ の精度の範囲内で一様である。例えば p.1 の図は $a/l = 1/10$ の場合のものであるが、有限長補正は断面内で一律に $1/100$ 、中心と周辺での差 (非一様性) は $1/10000$ 程度である。脚注 2 の考えを半径 r の位置に適用すれば、 $x = 0$ で B が一様なら、 $x = l$ での平行成分 B_{\parallel} も同程度に一様である。

⁴ 積分の下限を a とすれば $(a/l)^4$ の補正項が現れるが、高次のため無視して下限は 0 とした。

で定義される応力テンソルである。法線ベクトルとのドット積は、 $T_\alpha = (T_{\alpha x}, T_{\alpha y}, T_{\alpha z})$ として

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_\alpha = T_\alpha \cdot \mathbf{n} = \sum_\beta T_{\alpha\beta} n_\beta = \frac{1}{\mu} \left((\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) B_\alpha - \frac{B^2}{2} n_\alpha \right) \quad (\alpha = x, y, z) \quad (13)$$

を成分とするベクトル

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mu} \left((\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B} - \frac{B^2}{2} \mathbf{n} \right) \quad (14)$$

であり、特別な場合として

$$\mathbf{n} \parallel \mathbf{B} \text{ のとき } \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{B^2}{2\mu} \mathbf{n} \text{ (張力)}, \quad \mathbf{n} \perp \mathbf{B} \text{ のとき } \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -\frac{B^2}{2\mu} \mathbf{n} \text{ (圧力)} \quad (15)$$

となる。以後では2重添え字(ここでは β)についての和の記号は省略する。

$$(\text{証明}) \quad ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})_x = (\partial_z B_x - \partial_x B_z) B_z - (\partial_x B_y - \partial_y B_x) B_y = (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_x - \frac{1}{2} \partial_x B^2 \quad (16)$$

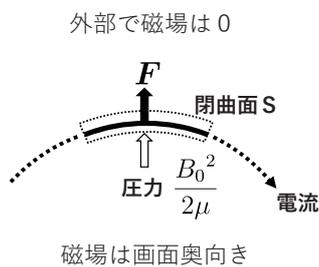
ここで $\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_\beta B_\beta = 0$ より、 $(\mathbf{B} \cdot \nabla) B_\alpha = B_\beta \partial_\beta B_\alpha = \partial_\beta B_\alpha B_\beta$ の関係を用いれば

$$((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})_\alpha = \partial_\beta \left(B_\beta B_\alpha - \frac{B^2}{2} \delta_{\alpha\beta} \right) = \mu \nabla \cdot \mathbf{T}_\alpha \quad (17)$$

あとは、各成分ベクトル T_α に対してガウスの発散定理を用いればよい。

中央付近で中心軸に直交する面内で左図のような断面をもつ閉曲面を考えれば、電流に対して半径を広げる向きに力が働くことが分かる。力の向きは「電流×磁場」そのものであるが、外では磁場が0のため大きさは1/2である。中心軸の方向には、右図のようにソレノイドの右半分を残して半球面で囲み積分定理を適用すれば、十分遠方では双極子場 $\sim R^{-3}$ で面積分の寄与は無視でき、ソレノイドの右半分(主に端部分)の電流には軸に平行方向に $\pi a^2 B_0^2 / 2\mu$ の押し込む力が働いていることが分かる。このように、Maxwell 応力を正しく使えば計算は至って簡単である。[長さが有限であることによる $B(0)$ の補正 $B(0)^2 \simeq B_0^2(1 - a^2/l^2)$ と、垂直2等分面上の応力をあわせると(8)に一致し、これよりわずかに小さい。]

Maxwell 応力： 中心軸に平行な磁場の向きに張力，垂直な向きに圧力



中心軸に垂直な断面 (部分)

外では双極子場

$$\frac{a^2}{8l^2} \left(\pi a^2 \times \frac{B_0^2}{2\mu} \right)$$

(有限長の効果)

$$\text{張力 } \pi a^2 \times \frac{B(0)^2}{2\mu}$$

中央付近でのMaxwell応力が、電流に働く軸方向の電磁力が存在することを示している。

中心軸を含む断面 (軸方向の力の成分)

ソレノイドの端付近の電流に働く力がソレノイドの断面積に比例することから、平行板コンデンサの場合と同様、両端の断面に Maxwell 応力が働くような錯覚に陥りがちであるが、端での値は中央付近の1/4弱である。Maxwell 応力，すなわち磁場の力が働くのはあくまで電流に対してである。2025年度の京大入試問題IIの(3)との関連で言うなら、磁場の Maxwell 応力と内外の空気の圧力差が直接釣り合うわけではないのである。

(メモ1) 中央付近での磁束密度の一様性 中心軸上での $B(x)$ を x について展開すると

$$B(x) = B(0) \left(1 - \frac{3a^2}{2(l^2 + a^2)^2} x^2 + \dots \right) \simeq B(0) \left(1 - \frac{3a^2}{2l^4} x^2 + \dots \right) \quad (18)$$

である。小さくなる分だけ磁力線は軸に垂直方向に逃げていくが、磁力線の保存は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ で表される。円柱座標 (x を z と読む) を用いて表すと、第0近似として 平行成分 B_{\parallel} は断面内で一様とみなして

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r B_{\perp}}{\partial r} = -\frac{\partial B_{\parallel}}{\partial x} = \frac{3a^2 x}{l^4} B(0) \quad \text{より} \quad B_{\perp}(r, x) = \frac{3a^2 x r}{2l^4} B(0) \quad (19)$$

さらに、ソレノイドの内部空間には電流はないから、 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ より

$$\frac{\partial B_{\parallel}}{\partial r} = \frac{\partial B_{\perp}}{\partial x} = \frac{3a^2 r}{2l^4} B(0) \quad (20)$$

$$B_{\parallel}(r, x) = B(x) + \frac{3a^2 r^2}{4l^4} B(0) = \left(1 + \frac{3a^2(r^2 - 2x^2)}{4l^4} + \dots \right) B(0) \quad (21)$$

となり、周辺と軸上での差は第0近似で $(a/l)^4$ 程度であり、ほぼ一様とみなせる。p.2の脚注により $x \simeq l$ でも平行成分 B_{\parallel} は面内で同程度に一様である。さらに、(3) は $B_l(x)$ と表すことにして

$$B_l(x) = \frac{1}{2} [B_{l-x}(0) + B_{l+x}(0)] \quad (-l \leq x \leq l) \quad (22)$$

と書けるから、より広い範囲 (例えば $x \simeq l/2$) で B_{\parallel} の一様性は成り立つと考えられる。この場合、 $B_{\perp} \sim (a/l)^4$ である。

(メモ2) 端の断面での Maxwell 応力と一様性 $x = l$ 付近では $B(x)$ の勾配が大きいため垂直成分を軽視できなくなる。 n は軸方向であるから、Maxwell 応力の平行成分は

$$\mu T_{\parallel} = B_{\parallel}^2 - \frac{1}{2}(B_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2) = \frac{1}{2}B_{\parallel}^2 - \frac{1}{2}B_{\perp}^2 \quad (23)$$

B_{\parallel} は面内で一様だから、最低次の近似で $B_0/2$ とすれば、応力は中央付近での $1/4$ 、さらに垂直成分の寄与によりもう少し小さくなる。上と同様にして $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r B_{\perp}}{\partial r} = -\frac{\partial B(x)}{\partial x} = \frac{B_0}{2a}, \quad B_{\perp} = \frac{r B_0}{4a} \quad (24)$$

面全体では、これを (23) に代入して積分すれば

$$F_{\parallel} = \frac{1}{4} \left(\pi a^2 \times \frac{B_0^2}{2\mu} \right) \times \frac{7}{8} \quad (25)$$

となる。同様にして垂直成分も得られるが、等方性から合力としては 0 である：

$$\mu T_{\perp} = B_{\parallel} B_{\perp} = \frac{B_0^2 r}{8a} \quad (26)$$

さらに、 $x \simeq l$ で $B(x)$ を展開してメモ1と同じ手順を踏めば、一様性が再確認できる；

$$B_{\parallel}(r, x) = \left(1 - \frac{x-l}{a} + \frac{3a^2[r^2 - 2(x-l)^2]}{64l^4} + \dots \right) B(l) \quad (27)$$

電流に働く磁場の Maxwell 応力 ソレノイドの右半分の表面で働く応力の平行成分は、 B_{\parallel} が不連続であるため内と外で異なる。積分定理を用いれば、外では (25) に等しくて $\pi a^2 \times B_0^2/2\mu$ の $7/32$ 倍、内では $25/32$ 倍である。これこそが、電流に直接働いている Maxwell 応力 (の軸方向成分) である。