

スカラー演算子 $|i\nabla|$ について

光の分散関係が $\omega = c|k|$ で与えられることから，スカラー量 $|k|$ に対応するスカラー演算子 $|i\nabla|$ が欲しくなる。そういうものを形式的に想定するのは勝手であるが，実際に演算を明示的に定義することができなければ意味がない。2次元版のスカラー演算子 $|i\nabla^{(2)}|$ は，2相分離の動的過程の問題（拡散方程式に対する Stefan 問題 —— 境界が動的に変化する境界値問題）で導入されたもので，Laplace 方程式に対して静電気学でよく知られた Green 関数法を用いて，非局所的な積分変換で表すことができる。これを一般の d 次元に拡張する。この積分変換の Green 関数は， $d+1$ 次元クーロンポテンシャルの d 次元射影を用いて表すことができる。

[1] 波動方程式の因数分解と定在波

3次元波動方程式

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1)$$

を考える。ベクトル性の微分演算子 ∇ と波数ベクトル k の対応

$$i\nabla \longleftrightarrow k, \quad (i\nabla)^2 \longleftrightarrow k^2 = |k|^2 \longleftrightarrow |i\nabla|^2 \quad (2)$$

を考慮すれば， $(i\nabla)^2 = |i\nabla|^2$ となるようなスカラー演算子 $|i\nabla|$ を，少なくとも形式的には定義できるであろう。もしこれがあれば，波動方程式 (1) が

$$\left(\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} - |i\nabla| \right) \left(\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + |i\nabla| \right) \phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3)$$

のように，演算子として因数分解できることになる。1次元の場合だけは普通に行われるように

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi(x, t) = 0 \quad (4)$$

の形にも分解できるが， $\partial/\partial x$ は $|i\partial/\partial x|$ と異なり，座標の反転で符号が変わる1次元ベクトルであってスカラーではない。この演算子分解の各因子は $\pm x$ 方向の伝搬波の方程式

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = \mp \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t) \quad (5)$$

に対応する。これに倣えば，(3) から以下の波動方程式が導かれる（ここでは前進型のみ扱う。）：

$$\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = |i\nabla| \phi(\mathbf{r}, t) \quad (6)$$

これが分散関係 $\omega = c|k|$ に直接対応する波動方程式である。エネルギー - 運動量の関係が $E = c|p|$ で与えられる質量0の粒子（光子）の Schrödinger 方程式とみなすことができるかもしれない。実際，時間について1階微分方程式であるから， $|i\nabla|$ のエルミート性を用いて，確率 $|\phi|^2$ の保存則を示すことができる（→ 付録1）。

例えば，平面波 $e^{-ik \cdot r}$ が $|i\nabla|$ の実数固有値 $|k|$ の固有関数（後で Fourier 変換の所で示される → p.4）であることから，エネルギー固有値 $E = \hbar c|k|$ の定在波

$$\psi_1 = e^{-itE/\hbar} \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, \quad \psi_2 = e^{-itE/\hbar} \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (7)$$

は，この方程式 (6) に従う。（もちろん，伝搬する平面波， $\psi_1 \pm i\psi_2 = e^{-itE/\hbar \pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ もこれに従う。）これに対して伝搬波の方程式 (5) は，このような定在波の解をもたない。

以下では，Laplace 方程式を利用して，このスカラー演算子 $|i\nabla|$ の明示的な形を求める。

[2] Dirichlet 型の平面境界条件がある Laplace 方程式の形式解

3次元 Laplace 方程式（一般次元への拡張を考えて， z の代わりに u を用いる）

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) \phi(x, y, u) = 0 \quad (8)$$

の， xy 面上で関数の値 $\{\phi(x, y, 0)\}$ が与えられたときの解（ $u > 0$ ：ただし今の場合には表裏で対称）は，静電気学で Green 関数法として知られた以下のような積分形で与えられる：

$$\phi(x, y, u) = \iint \sigma_{\text{ind}}(x' - x, y' - y; u) \phi(x', y', 0) dx' dy' \quad (9)$$

ここで， $\sigma_{\text{ind}}(x' - x, y' - y; u)$ は、『接地された導体外の点 (x, y, u) に置かれた負の単位点電荷によって，導体面上の位置 (x', y') に静電誘導される表面電荷密度』である。境界が平面（ xy 面）である今の場合には，鏡像点 $(x, y, -u)$ に逆符号の仮想電荷を置く鏡像法（電気映像法）を用いて

$$\sigma_{\text{ind}}(x' - x, y' - y; u) = \frac{u}{2\pi [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + u^2]^{3/2}} \quad (10)$$

が得られ，解 (9) は $|i\nabla^{(2)}|$ を用いて以下のように表すことができる：

xy 平面上のベクトルを $(x, y) = \mathbf{a}$ ，2次元ナブラ演算子 $\nabla^{(2)} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ を便宜上， $-i\kappa$ と書く。 $\mathbf{a}' - \mathbf{a}$ をあらためて積分変数 $\mathbf{a}' = (x', y')$ とし，簡略化のため Taylor 展開の指数関数表示

$$\phi(\mathbf{a} + \mathbf{a}', 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \phi(\mathbf{a}, 0) = \exp[\mathbf{a}' \cdot \nabla^{(2)}] \phi(\mathbf{a}, 0) \quad (11)$$

を用いれば，(9) は

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{a}, u) &= \iint \frac{u}{2\pi [x'^2 + y'^2 + u^2]^{3/2}} \exp[-i\mathbf{a}' \cdot \kappa] \phi(\mathbf{a}, 0) dx' dy' \\ &= \left[u \int_0^{\infty} \frac{a' J_0(a' \kappa)}{(a'^2 + u^2)^{3/2}} da' \right] \phi(\mathbf{a}, 0) = \exp(-u\kappa) \phi(\mathbf{a}, 0) \quad (\kappa = |\kappa|) \end{aligned} \quad (12)$$

となる。この変形では， κ を c 数のように扱って以下の Bessel 関数の積分表示（岩波公式集 III，p.178），定積分公式（p.196，p.172）を用いたが，すべて Fourier 変換で考えたと思えばいいだろう：

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \theta} d\theta, \quad \int_0^{\infty} \frac{x J_0(\kappa x)}{(x^2 + u^2)^{3/2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \kappa^{1/2} u^{-1/2} K_{-1/2}(\kappa u) = \frac{e^{-\kappa u}}{u} \quad (13)$$

以上より， κ に対応する Fourier 逆変換を形式的に $|i\nabla^{(2)}|$ と書くことにすれば，解 (9) は

$$\phi(x, y, u) = \exp(-u|i\nabla^{(2)}|) \phi(x, y, 0) \quad (14)$$

と書くことができる。あるいは，当初の Dirichlet 型境界条件が，Neumann 型境界条件

$$-\left[\frac{\partial}{\partial u} \phi(x, y, u) \right]_{u=+0} = |i\nabla^{(2)}| \phi(x, y, 0) \quad (15)$$

に変換されたと考えてもよい。¹すぐ後で見ると $|i\nabla^{(2)}|$ は非局所的な積分演算であり，境界のすぐ外の電場でさえ近傍点の電位だけでは決まらず，かなり遠方の電位が影響するのである。

¹ 相分離界面の発達過程の Stefan 問題で，左辺は界面すぐ外側の拡散流を与える濃度勾配の法線成分，右辺の ϕ は界面の曲率（mean curvature H ）で決まる界面直近の濃度（Gibbs-Thomson 効果）である。これにより蒸発・拡散による界面の発達速度を界面の曲率と関係づけることができる。しかしながら至るところで $H = 0$ の平面では意味がなく，曲率をもつ曲面上の勾配演算子 $\nabla^{(S)}$ に対する $|i\nabla^{(S)}|$ を導入する必要がある。残念ながら $|i\nabla|$ の非局所性のため一般的な曲面に対して Explicit な定式化はできなかった。→ Prog. Theor. Phys. 104, No.2 (2000), p.307-324. およびその参考文献

形式解 (14) は, u で微分することにより, 次の微分積分方程式に従うことがわかる:

$$\frac{\partial}{\partial u} \phi(x, y, u) = -|i\nabla^{(2)}| \phi(x, y, u) \quad (16)$$

両辺の演算子を 2 乗すれば, 何のことはない, Laplace 偏微分方程式の変数分離形

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \phi(x, y, u) = |i\nabla^{(2)}|^2 \phi(x, y, u) = -(\nabla^{(2)})^2 \phi(x, y, u) \quad (17)$$

であり, 今の境界条件には関係なく 調和関数一般 に適用できる。

[3] 演算子 $|i\nabla|$ の積分表示

関係式 (15) を逆用し, 積分形 (9) と (10) の σ_{ind} を用いれば, 直ちに明示的な表現が得られる:

$$|i\nabla^{(2)}| \phi(x, y, 0) = - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \iint \frac{u}{2\pi[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + u^2]^{3/2}} \phi(x', y', 0) dx' dy' \quad (18)$$

$$= - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \iint \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 - 2u^2}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + u^2]^{5/2}} \phi(x', y', 0) dx' dy' \quad (19)$$

界面近傍の電場 (15) に対して境界値 $\{2\phi(x, y, 0)\}$ が双極子シート的な長距離場をもたらしている。

ついでに $|i\nabla^{(2)}|$ の Green 関数 (逆変換)² を求めておこう。境界上でのポテンシャルの値 $\{\phi(x, y, 0)\}$ を与える等価電荷シートは, Gauss の法則と (15) により (注: 今の場合は表裏対称である。)

$$\sigma(x, y) = \text{表裏での電場の差} \Delta \left[-\frac{\partial \phi}{\partial u} \right]_{u=\pm 0} = 2|i\nabla^{(2)}| \phi(x, y, 0) \quad (20)$$

であることから, $|i\nabla^{(2)}|$ の逆演算は, 任意の関数 $\sigma(x, y)$ に対して

$$|i\nabla^{(2)}|^{-1} \sigma(x, y) = 2\phi(x, y, 0) = 2 \iint G_0^{(3)}(x - x', y - y', 0) \sigma(x', y') dx' dy' \quad (21)$$

で定義される。 $G_0^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ は 3 次元 Laplacian $(i\nabla)^2$ の自由 Green 関数 (Coulomb ポテンシャル)

$$(i\nabla)^2 G_0^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad G_0^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (22)$$

である。これにより $|i\nabla^{(2)}|$ の Green 関数は以下のように, あいまいさなしに定義できる:

$$|i\nabla^{(2)}| G^{(2)}(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}') \rightarrow G^{(2)}(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = 2G_0^{(3)}(\mathbf{a} - \mathbf{a}', 0) = \frac{1}{2\pi |\mathbf{a} - \mathbf{a}'|} \quad (23)$$

1 次元でも同様に, 2 次元鏡像法から誘導電荷密度は

$$\sigma_{\text{ind}}(x' - x; u) = \frac{1}{\pi} \frac{u}{(x' - x)^2 + u^2} \quad (24)$$

Green 関数は, 2 次元自由 Green 関数 $G_0^{(2)}(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = -(1/2\pi) \log |\mathbf{a} - \mathbf{a}'|$ より, 以下となる:

$$\left| i \frac{d}{dx} \right| G^{(1)}(x - x') = \delta(x - x') \rightarrow G^{(1)}(x - x') = 2G_0^{(2)}(x - x', 0) = -\frac{1}{\pi} \log |x - x'| \quad (25)$$

² 線形変換 $\mathcal{L}f(x) = f_1(x)$ を積分形 $\int L(x - x')f(x')dx' = f_1(x)$ で表すとき, 逆変換 $f(x) = \int G(x - x')f_1(x')dx'$ を与える積分核 $G(x - x')$ のことで, $\int L(x - x'')G(x'' - x')dx'' = \delta(x - x')$ を満たす。

3次元の場合は一般次元 d で考える方がわかりやすい。 d 次元位置ベクトルを $\mathbf{r}$, d 次元の半径 1 の球の表面積を S_d とする。先ず, 点電荷による電場は等方的で, Gauss の法則より

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| = \frac{1}{S_d r^{d-1}} \quad (r = |\mathbf{r}|), \quad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (26)$$

これを積分して Coulomb ポテンシャル (d 次元 Laplacian の自由 Green 関数) は

$$G_0^{(d)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(d-2)S_d} \frac{1}{r^{d-2}} \quad (27)$$

である。接地境界「面」上の静電誘導電荷密度は, $d+1$ 次元鏡像法により以下となる:

$$\sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) = -2 \left[\frac{\partial}{\partial u'} G_0^{(d+1)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, u' - u) \right]_{u'=0} = \frac{2}{S_{d+1}} \frac{u}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^{(d+1)/2}} \quad (28)$$

この関数の Fourier 変換は, 2次元の場合と同じく Bessel 関数 (1次元では複素積分) を用いて

$$\bar{\sigma}_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{k}; u) = \int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}; u) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^d \mathbf{r} = e^{-ku} \quad (k = |\mathbf{k}|, u > 0) \quad (29)$$

と, どの次元 d でも同じであり, 1次元でも k は $|k|$ を意味する。この結果, 演算 $|i\nabla^{(d)}|$ を

$$|i\nabla^{(d)}| f(\mathbf{r}) = - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) f(\mathbf{r}') d^d \mathbf{r}' \quad (30)$$

で定義すると, 平面波はこの演算子の固有関数であることが示される。すなわち

$$\begin{aligned} |i\nabla^{(d)}| e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} &= - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^d \mathbf{r}' \\ &= - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^d \mathbf{r}' \\ &= - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} e^{-ku} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = k e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (31)$$

となり, 固有値は実数 k ($= |\mathbf{k}|$) である。さらに, $|i\nabla^{(d)}|^2$ に現れる

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}''; u_1) \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}; u_2) d^d \mathbf{r}'' \quad (32)$$

の Fourier 変換は, たたみ込み定理を用いれば Fourier 変換の積

$$\bar{\sigma}_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{k}; u_1) \bar{\sigma}_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{k}; u_2) = e^{-ku_1} e^{-ku_2} \quad (33)$$

で表される。これにより, 当初の目論みであった以下の対応が示される:

$$|i\nabla^{(d)}|^2 \longleftrightarrow \lim_{u_1 \rightarrow +0} \lim_{u_2 \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial u_2} e^{-ku_1} e^{-ku_2} = k^2 = \mathbf{k}^2 \longleftrightarrow (i\nabla^{(d)})^2 \quad (34)$$

最後に

$$\int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) d^d \mathbf{r}' = 1, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (35)$$

$$\int \int \dots \int \frac{\partial}{\partial u} \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u \neq 0) d^d \mathbf{r}' = \frac{\partial}{\partial u} \int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u \neq 0) d^d \mathbf{r}' = 0 \quad (36)$$

$$f(\mathbf{r}) = \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) f(\mathbf{r}') d^d \mathbf{r}' \quad (37)$$

を用いて，連続で滑らかな関数 $f(\mathbf{r})$ に対する各種演算の明示的な積分表式が得られる：

$$\nabla^{(d)} f(\mathbf{r}) = \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \dots \int \frac{2(d+1)u}{S_{d+1}} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^{(d+3)/2}} f(\mathbf{r}') d^d \mathbf{r}' \quad (38)$$

$$(\nabla^{(d)})^2 f(\mathbf{r}) = \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \dots \int \frac{2(d+1)u}{S_{d+1}} \frac{(d+2)(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 - du^2}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^{(d+5)/2}} f(\mathbf{r}') d^d \mathbf{r}' \quad (39)$$

$$|i\nabla^{(d)}| f(\mathbf{r}) = - \lim_{u \rightarrow 0} \int \int \dots \int \frac{2}{S_{d+1}} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 - du^2}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^{(d+3)/2}} f(\mathbf{r}') d^d \mathbf{r}' \quad (40)$$

$$= - \lim_{u \rightarrow 0} \int \int \dots \int \frac{2}{S_{d+1}} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 - du^2}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^{(d+3)/2}} [f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r})] d^d \mathbf{r}' \quad (41)$$

$$= -\mathcal{P} \int \int \dots \int \frac{2}{S_{d+1}} \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{d+1}} [f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r})] d^d \mathbf{r}' \quad (\text{主値積分}) \quad (42)$$

通常の微分演算は $u \rightarrow +0$ で積分の有効範囲が原点に集中するため局所的になるが， $|i\nabla^{(d)}|$ では有効範囲はいずれの次元でも，体積要素の広がり $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{d-1}$ と合わせて $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{-2}$ の形で遠方に及び，非局所的である。原点での発散 $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{-1}$ は， $f(\mathbf{r})$ が連続である限り，(42) の形で回避される。

$|i\nabla^{(d)}|$ の Green 関数は，2次元の場合と同様にして，任意の関数 $\rho(\mathbf{r})$ に対して以下となる：

$$|i\nabla^{(d)}|^{-1} \rho(\mathbf{r}) = 2 \int \dots \int G_0^{(d+1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0) \rho(\mathbf{r}') d^d \mathbf{r}' \quad (43)$$

$$|i\nabla^{(d)}| G^{(d)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rightarrow G^{(d)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 2G_0^{(d+1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0) = \frac{2}{(d-1)S_{d+1}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{d-1}} \quad (44)$$

(積分表示のまとめ)

[3次元]

$$\sigma_{\text{ind}}^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) = \frac{1}{\pi^2} \frac{u}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^2} \quad (45)$$

$$f(\mathbf{r}) = \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \int \sigma_{\text{ind}}^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) f(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (46)$$

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \int \frac{4u}{\pi^2} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^3} f(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (47)$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \int \frac{4u}{\pi^2} \frac{5(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 - 3u^2}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^4} f(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (48)$$

$$|i\nabla| f(\mathbf{r}) = - \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \int \frac{1}{\pi^2} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 - 3u^2}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^3} f(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (49)$$

$$= -\mathcal{P} \int \int \int \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^4} [f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r})] d^3 \mathbf{r}' \quad (50)$$

$$G_0^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} , \quad G^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (51)$$

[2 次元]

$$\sigma_{\text{ind}}^{(2)}(\mathbf{a}' - \mathbf{a} ; u) = \frac{1}{2\pi} \frac{u}{[(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^2 + u^2]^{3/2}} \quad (52)$$

$$f(\mathbf{a}) = \lim_{u \rightarrow +0} \iint \sigma_{\text{ind}}^{(2)}(\mathbf{a}' - \mathbf{a} ; u) f(\mathbf{a}') d^2 \mathbf{a}' \quad (53)$$

$$\nabla^{(2)} f(\mathbf{a}) = \lim_{u \rightarrow +0} \iint \frac{3u}{2\pi} \frac{\mathbf{a}' - \mathbf{a}}{[(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^2 + u^2]^{5/2}} f(\mathbf{a}') d^2 \mathbf{a}' \quad (54)$$

$$(\nabla^{(2)})^2 f(\mathbf{a}) = \lim_{u \rightarrow +0} \iint \frac{3u}{2\pi} \frac{4(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^2 - 2u^2}{[(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^2 + u^2]^{7/2}} f(\mathbf{a}') d^2 \mathbf{a}' \quad (55)$$

$$|i\nabla^{(2)}| f(\mathbf{a}) = - \lim_{u \rightarrow +0} \iint \frac{1}{2\pi} \frac{(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^2 - 2u^2}{[(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^2 + u^2]^{5/2}} f(\mathbf{a}') d^2 \mathbf{a}' \quad (56)$$

$$= -\mathcal{P} \iint \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{a}' - \mathbf{a}|^3} [f(\mathbf{a}') - f(\mathbf{a})] d^2 \mathbf{a}' \quad (57)$$

$$G_0^{(2)}(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = -\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{a} - \mathbf{a}'|, \quad G^{(2)}(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{a}'|} \quad (58)$$

[1 次元]

$$\sigma_{\text{ind}}^{(1)}(x' - x ; u) = \frac{1}{\pi} \frac{u}{(x' - x)^2 + u^2} \quad (59)$$

$$f(x) = \lim_{u \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\text{ind}}^{(1)}(x' - x ; u) f(x') dx' \quad (60)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{u \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2u}{\pi} \frac{x' - x}{[(x' - x)^2 + u^2]^2} f(x') dx' \quad (61)$$

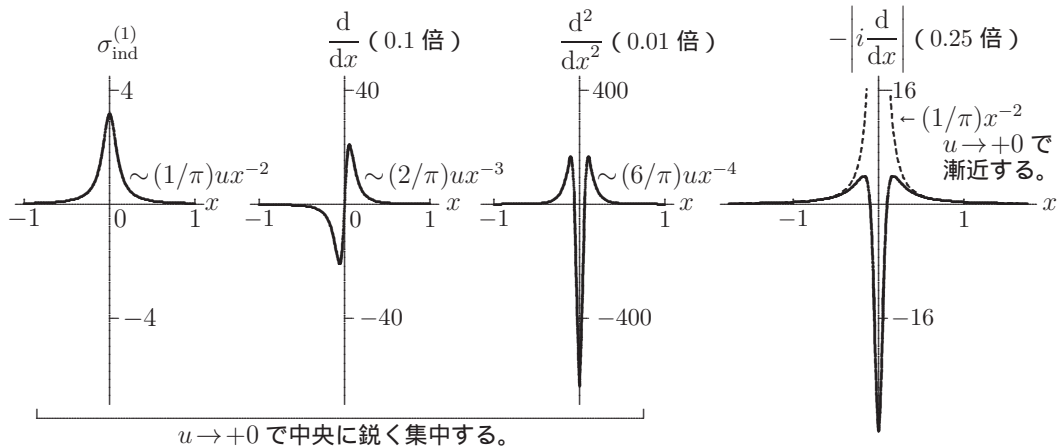
$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = \lim_{u \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2u}{\pi} \frac{3(x' - x)^2 - u^2}{[(x' - x)^2 + u^2]^3} f(x') dx' \quad (62)$$

$$\left|i \frac{d}{dx}\right| f(x) = - \lim_{u \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{(x' - x)^2 - u^2}{[(x' - x)^2 + u^2]^2} f(x') dx' \quad (63)$$

$$= -\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{(x' - x)^2} [f(x') - f(x)] dx' \quad (64)$$

$$G_0^{(1)}(x - x') = -\frac{1}{2}|x - x'|, \quad G^{(1)}(x - x') = -\frac{1}{\pi} \log |x - x'| \quad (65)$$

通常の微分演算に対する積分形の局所性と $|id/dx|$ の非局所性の対比を明確にするため，積分変換の核関数 (kernel) を図示しておく (いずれも $u = 0.1$) :



(付録 1) $|i\nabla^{(d)}|$ がエルミート演算子であることは、直接以下のように示すことができる。

$$\begin{aligned}\int g(\mathbf{r}) |i\nabla^{(d)}| f(\mathbf{r}) d^d \mathbf{r} &= - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \int \int g(\mathbf{r}) \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) f(\mathbf{r}') d^d \mathbf{r}' d^d \mathbf{r} \\ &= - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \int \int f(\mathbf{r}') \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; u) g(\mathbf{r}) d^d \mathbf{r}' d^d \mathbf{r} \\ &= \int f(\mathbf{r}) |i\nabla^{(d)}| g(\mathbf{r}) d^d \mathbf{r}\end{aligned}\quad (66)$$

したがって、(6) 式は

$$\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = |i\nabla| \phi(\mathbf{r}, t), \quad -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi^*(\mathbf{r}, t) = |i\nabla| \phi^*(\mathbf{r}, t)$$

となり、通常通りにして確率の保存則が導かれる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \phi(\mathbf{r}, t)^* \phi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \frac{c}{i} \int [-(|i\nabla| \phi^*) \phi + \phi^* (|i\nabla| \phi)] d\mathbf{r} = 0 \quad (67)$$

しかしながら $|i\nabla|$ が非局所的演算だから、確率密度の連続の方程式の形を導くことはできない。

(付録 2) $\sigma_{\text{ind}}^{(d)}$ の Fourier 変換： $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$ において、先ず角 θ についての積分は

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} S_{d-1} e^{-ikr \cos \theta} r^{d-1} \sin^{d-2} \theta d\theta &= S_{d-1} r^{d-1} \int_0^{\pi/2} \cos(kr \cos \theta) \sin^{d-2} \theta d\theta \\ &= S_{d-1} r^{d-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \left(\frac{2}{kr}\right)^{(d-2)/2} J_{(d-2)/2}(kr) = \frac{(2\pi)^{d/2}}{k^{(d-2)/2}} r^{d/2} J_{(d-2)/2}(kr)\end{aligned}\quad (68)$$

$$\begin{aligned}\int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}; u) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^d \mathbf{r} &= \frac{2(2\pi)^{d/2}}{S_{d+1} k^{(d-2)/2}} \int_0^\infty \frac{ur^{d/2} J_{(d-2)/2}(kr)}{(r^2 + u^2)^{(d+1)/2}} dr \\ &= \frac{2^{d/2} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{1/2} k^{(d-2)/2}} \times \frac{k^{(d-1)/2} u^{1/2}}{2^{(d-1)/2} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} K_{-1/2}(ku) = \left(\frac{2ku}{\pi}\right)^{1/2} K_{-1/2}(ku)\end{aligned}\quad (69)$$

K は変形された Bessel 関数で

$$K_{-1/2}(z) = \sqrt{\pi/2z} e^{-z} \quad (70)$$

以上より

$$\int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}; u) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^d \mathbf{r} = e^{-ku} \quad (71)$$

となる。1次元の場合は

$$\frac{u}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ikx}}{x^2 + u^2} dx = \frac{u}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ikx}}{(x - iu)(x + iu)} dx \quad (72)$$

を複素経路積分で求めればよいが、 k の正負に応じて $k \operatorname{Im} z < 0$ となるよう上半円を通るか、下半円を通るか使い分ける必要があり、結果は $e^{-|k|u}$ である。

逆に言えば、逆変換は $\sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}; u)$ を与える。これも公式集、p.198 の (iii) の 5 番目の公式を使えばちゃんと導かれる。先ず角度についての積分は、上の式 (68) で r と k を入れ替えるだけだから

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^d} \int \int \dots \int e^{-uk} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^d \mathbf{k} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{(2\pi)^{d/2}}{r^{(d-2)/2}} \int_0^\infty k^{d/2} e^{-uk} J_{(d-2)/2}(kr) dk \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{(d+1)/2}} \frac{u}{(r^2 + u^2)^{(d+1)/2}} = \frac{2}{S_{d+1}} \frac{u}{(r^2 + u^2)^{(d+1)/2}} = \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}; u)\end{aligned}\quad (73)$$

したがって、 $k = |\mathbf{k}|$ の Fourier 逆変換で定義した $|i\nabla^{(d)}|$ の積分核関数は以下で与えられる：

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int \int \dots \int k e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^d \mathbf{k} = - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}; u) \quad (74)$$