積分論の基礎
ルベーグ積分入門

吉川　敦
九州大学大学院数理学研究院

平成16年8月2日

目 次

1 Lebesgue 積分の知識の効用について

1.1 口上

Lebesgue[1]は 19 世紀末から 20 世紀前半にかけて活動したフランスの解析学者である．Lebesgue の導入した積分論には，すでに 1 世紀の歴史がある[2]．しかも，20 世紀の数学の進歩と拡大において本質的な貢献をしたと認められる．実際，積分論は 19 世紀の半ばから Fourier 解析と密着して研究されてきたが，Lebesgue の積分論によって時代が画されたのである．数学解析の諸分野はもとより，確率解析や数理統計に加え，およそ根底に Fourier 解析が横たわっている諸学諸技術は直接間接に Lebesgue 積分論の恩恵のもとにある．特に，通信や信号，情報理論を始め，X 線解析や超音波探査などは，Lebesgue 積分の成果なしでは今日の姿はなかったはずである．

しかし，数学科以外で Lebesgue 積分論が体系的に紹介されることは依然稀なようである．実数概念の微妙さの分析が積分論では避けて通れないと一般的に考えられていながら，それに付き合うことを数学科以外の学生に期待すべきではないという姿勢があるかも知れない．その意味で，この内容の講義が九州大学工学部で伝統的に開かれてきたことは稀有な例外に違いない．しかし，正直言って，講義者が赴任したほぼ 20 年前と今日では学生の数学的

---

[1]ルベーグとよむ．Lebesgue, Henri (né au 28 juin, 1875, et décédé au 27 juillet, 1941).

[2]H. Lebesgue: ルベーグ 積分・長さおよび面積.（現代数学の系譜 3・共立出版株式会社 1969. 訳者らによる詳細な解説が付いている．原典 は，数理科学博士の学位のために，1902 年パリ大学理学部に提出された（第一）学位論文 Intégrale, longueur, aire である.）なお，山邊俊明：ルベーグにおける測度・積分論の成立過程について（津田塾大学数学・計算機科学研究所報 **24**(2003)146-149）では，Lebesgue の重層的な考察が跡付けられている．

訓練の質も量も変わってしまった．さらに，Lebesgue 積分論が重要であればこそ，工学者が Lebesgue 積分論に見るべき側面は数学者のものとは異なり，しかも広い．したがって，将来の工学者向けの講義において数学科向けの流儀を踏襲すべきだと講義者は考えていない．

Lebesgue 積分論に関して白状すると，講義者は二十年以上昔に北海道大学の理学部数学科において通年の（かなり悪評の残った）講義をしたことがあるだけである．ただし，講義を終えた後，やや錯綜した感想を与えがちの Lebesgue 積分論の理論の組み立てについて，使用教科書[3]から，実はそれにはそのように書かれていたわけではないものの，意外と簡単だというメッセージを読み取ったように感じたので，その印象を確かめるために後一回は講義機会を持ちたいと思っていた．結局それを果たすことなく九州大学工学部に赴任したが，いろいろな事情で今日までそのままになっていた．今回全く偶然の事情からとは言え，その機会を得た．長年の想いの一部だけでも果たせそうな巡り合わせであり，できたら，その感じを反映させたいとも思っている．

それやこれやで，Lebesgue 積分論の標準的な講義とは一味も二味も違うものを目指すけれども，皆さんのお役に立てば幸せである．

1.2 積分の定義について（Riemann 積分）

区間 $[0,1]$ で定義された関数 $f(t)$ の積分は，$f(t) \geq 0$ であれば，直観的には，

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \text{領域}\,\{\,(t,u)\,;\,0 \leq t \leq 1,\,0 \leq u \leq f(t)\,\}\,\text{の面積} \tag{1}$$

である．皆さんが今まで学んできた積分は基本的に区分求積法によるものであって，

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{\text{「分割」を限りなく細かくする}} \sum_n f(\sigma_n)\,\delta_n \tag{2}$$

と表されるであろう．ここで,「分割」は，分点の集合 $\{t_0, t_1, \cdots, t_N\}$ （$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$） で与えられる．$\delta_n = t_{n+1} - t_n$ は局所変動分であり，標本点 σ_n は $t_n \leq \sigma_n \leq t_{n+1}$ を満たすように任意に採る.『「分割」を限りなく細かくする』ということは，分点を増やして「分割」の大きさを表す量 $\|\text{「分割」}\| = \max_n |t_{n+1} - t_n|$ を 0 に近づけることである．

(2) の左辺，つまり，積分が定義できるということの要点は何か．標本点 σ_n のとり方及び「分割」をどんどん細かくするという操作に関して (2) の右辺の区分求積和の極限値が安定していることである．これは，関数値（すなわち，従属変数）の変動を独立変数の変動に連動させて管理できるとする，連続性の考え方が関数把握の基本に置かれていることを意味している．

---

[3]溝畑茂：ルベーグ積分．岩波書店．1966（岩波全書）．

(2) の左辺，つまり，区分求積和の「分割」の細分化の極限として得られる積分を Riemann 積分という．Riemann 積分が存在するような関数は Riemann 積分可能といわれる．

例 1.1 $k = 1, 2, \cdots$ に対し，分点が $d_{k,n} = \dfrac{n}{2^k}$, $n = 0, 1, \cdots, 2^k$, で与えられる（2 進）「分割」Δ_k を考える．局所変動分は，すべて 2^{-k} である．この「分割」の「大きさ」を $\|\Delta_k\|$ とすれば，$\|\Delta_k\| = 2^{-k}$ である．$k \to \infty$ に伴って「分割」Δ_k が細かくなって行くことは明らかであろう．標本点を $d_{k,n} \le \sigma_{k,n}, \sigma'_{k,n} \le d_{k,n+1}$ とすると，採りかたによる区分求積和の差は，

$$\mathcal{D}_k = \sum_n f(\sigma_{k,n})\,\frac{1}{2^k} - \sum_n f(\sigma'_{k,n})\,\frac{1}{2^k} = \sum_{n=0}^{2^k-1} \frac{1}{2^k}\left(f(\sigma_{k,n}) - f(\sigma'_{k,n})\right)$$

である．$f(t)$ が Lipschitz 条件，すなわち，適当な定数 $L > 0$ のもとで

$$|f(t) - f(s)| \le L\,|t - s|, \quad 0 \le t,\, s \le 1, \tag{3}$$

を満足するとしよう．このときは，$|\sigma_{k,n} - \sigma'_{k,n}| \le 2^{-k}$ だから，

$$|\mathcal{D}_k| \le L \sum_{n=0}^{2^k-1} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{L}{2^k} \ \to\ 0, \quad k \to \infty,$$

となり，標本点の採りかたによる差異は $k \to \infty$ のうちに解消されてしまう．そこで，各 k につき，標本点を $\sigma_{k,n} = \frac{n}{2^k}$ に採った区分求積和を $\mathcal{S}_k$ とおいて，$k \to \infty$ のときの $\mathcal{S}_k$ の挙動をみよう．「分割」と標本点の選択から

$$\mathcal{S}_k - \mathcal{S}_{k+1} = \sum_{n=0}^{2^k-1} \frac{1}{2^{k+1}}\left\{f\left(\frac{2n}{2^{k+1}}\right) - f\left(\frac{2n+1}{2^{k+1}}\right)\right\}$$

であり，

$$|\mathcal{S}_k - \mathcal{S}_{k+1}| \le L \sum_{n=0}^{2^k-1} \frac{1}{2^{2k+2}} = \frac{L}{2^{k+2}}$$

となることがわかる．したがって，

$$\mathcal{S}_k = \sum_{\ell=2}^{k} (\mathcal{S}_\ell - \mathcal{S}_{\ell-1}) + \mathcal{S}_1 \ \to\ \int_0^1 f(t)\,dt$$

が成り立つ[4]．

Lipschitz 条件の要請が満たされていないときはどうなるだろうか．点 c を中心とする長さ $2r > 0$ の区間 $(-r + c, c + r)$ における関数 $f(t)$ の振幅 $\mathrm{osc}_r(c, f)$ を

$$\mathrm{osc}_r(c, f) = \sup_{s, s' \in (-r+c, c+r)} |f(s) - f(s')|$$

[4] 厳密には，2 進「分割」Δ_k と他の「分割」による区分求積和の差異が分割の細分化の過程で消滅することを確かめておかなければならない．詳しくは，末尾の問題を見よ．

とおこう．$r > r' > 0$ ならば，$(-r'+c, c+r') \subset (-r+c, c+r)$ だから $\mathrm{osc}_r(c,f) \geq \mathrm{osc}_{r'}(c,f)$，したがって，$f(t)$ の c における振幅

$$\mathrm{osc}(c,f) = \lim_{r\to 0} \mathrm{osc}_r(c,f)$$

が存在する．$f(t)$ が Lipschitz 条件を満たせば，$\mathrm{osc}_r(f,c) \leq 2rL$ だから，$\mathrm{osc}(c,f) = 0$ である．一般に，$\mathrm{osc}(c,f) = 0$ を満たす点 c は $f(t)$ の連続点である．区間内のすべての点が $f(t)$ の連続点ならば $f(t)$ はこの区間全体で連続である．これに対し，$\mathrm{osc}(c,f) > 0$ である点 c は $f(t)$ の不連続点である．特に，

$$\textbf{不連続性}\,(f) = \{\, c \in [0,1]\,;\, \mathrm{osc}(c,f) > 0 \,\}$$

は区間 $[0,1]$ で定義された $f(t)$ の不連続点の集合である．

さて，Riemann は実質的に[5]次の定理[6]を示した．

定理 1.1 $[0,1]$ で定義された関数 $f(t)$ が Riemann 積分可能であるための必要十分条件は，$f(t)$ が $[0,1]$ において有界であって，かつ，**不連続性**(f) が零集合であることである[7]．

1.3 積分の定義について（Lebesgue 積分）

Lebesgue 積分は (1) の解釈の仕方が (2) と違う．基本的には被積分関数 $f(t)$ の値の変動を積分計算の一義的な根拠にする．

区間 $I = [0,1]$ の関数 $f(t)$ について，実数 u に対し，$f(t) > u$ をみたすような $t \in I$ の全体を

$$I_+(u,f) = \{\, t \in I\,;\, f(t) > u, \,\}$$

とおこう．$t \notin I_+(u,f)$ ならば $f(t) \leq u$ である．

例 1.2 $f(t)$ が連続関数の場合，$I_+(u,f)$ は見やすい．例えば，$f(t) = t^2$ の場合，

$$I_+(u,f) = \begin{cases} \emptyset, & 1 \leq u \\ (\sqrt{u}, 1], & 0 \leq u < 1 \\ I, & u \leq 0 \end{cases}$$

である．しかし，われわれは不連続な関数などもっと複雑なものも対象にする．

---

[5]B. Riemann : Gesammelte mathematische Werke, wissenschaflicher Nachlass und Nachträge (ed. R. Narasimhan). 1990. Springer-Verlag.

[6]H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. 1904. Gauthier-Villars

[7]話の行き掛かりで掲げている定理である．零集合は後に説明する．なお，末尾の問題参照．

また，集合 $I_+(u,f)$ が互いに交わらない区間（例えば (a_j,b_j) の形のもの）の合併

$$I_+(u,f)=\bigcup_j (a_j,b_j)$$

ならば，$I_+(u,f)$ の「長さ」を各成分区間の長さの和 $|I_+(u,f)|=\sum(b_j-a_j)$ とすること，しかも，そのとき，

$$\int_{I_+(u,f)} f(t)\,dt=\sum_j \int_{a_j}^{b_j} f(t)\,dt$$

とすることは（右辺に現れる積分の意味は問わないとして）自然だろう．すると，

$$u\,|I_+(u,f)|=\int_{I_+(u,f)} u\,dt\le\int_{I_+(u,f)} f(t)\,dt$$

$$\int_I f(t)\,dt-\int_{I_+(u,f)} f(t)\,dt\le\ u\,|I_+(u,f)|$$

が成り立つべきものであることも想像できよう．この考えを実数列

$$\cdots<v_{-1}<v_0<v_1<\cdots,\qquad \lim_{n\to\pm\infty} v_n=\pm\infty, \tag{4}$$

の場合に敷衍しよう．まず，集合の包含関係

$$\cdots\subset I_+(v_1,f)\subset I_+(v_0,f)\subset I_+(v_{-1},f)\subset\cdots$$

は明らかであろう．したがって，区間 I 上で $-\infty<f(t)<+\infty$ であれば，

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} I_+(v_n,f)=\emptyset,\qquad \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} I_+(v_n,f)=[0,1]$$

$$I=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} I_+(v_n,f)\setminus I_+(v_{n+1},f)$$

であり，しかも，

$$t\in I_+(v_n,f)\setminus I_+(v_{n+1},f)\quad\Longrightarrow\quad v_n<f(t)\le v_{n+1}$$

である．

問 1.1　$\mathbf{v}$ によって，(4) の v_n を一括して表すとする．

$$\underline{f}_{\mathbf{v}}(t)=v_n,\quad t\in I_+(v_n,f)\setminus I_+(v_{n+1},f)$$

とおくと，各 $t\in I$ に対しては，$\underline{f}_{\mathbf{v}}(t)$ の値が確定する（したがって，$\underline{f}_{\mathbf{v}}(t)$ は I の上の関数となる）ことを確かめよ．

問 1.2　$\mathbf{v}'$ で，(4) 同様の数列 $\cdots < v'_{-1} < v'_0 < v'_1 < \cdots$ を表す．$\underline{f}_{\mathbf{v}'}(t)$ を $\underline{f}_{\mathbf{v}}(t)$ と同様に定義する．集合として，$\mathbf{v} \subset \mathbf{v}'$ が成り立つとき，

$$\underline{f}_{\mathbf{v}}(t) \leq \underline{f}_{\mathbf{v}'}(t) < f(t)$$

が成り立つことを示せ．

問 1.3　$f(t) = t^2 - t + 1/4$ とし，$\mathbf{v}_N = \{2^{-N}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,\}$（ただし，$N = 1, 2, \cdots,$）のときに，問 1.1 の $\underline{f}_{\mathbf{v}_N}(t)$ を計算せよ．$\underline{f}_{\mathbf{v}_N}(t)$ は $N \to \infty$ のとき，どのように振舞うか．

さて，集合 $I_+(v_n, f) \setminus I_+(v_{n+1}, f)$ の「長さ」が求められるならば，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n \left| I_+(v_n, f) \setminus I_+(v_{n+1}, f) \right| \leq \int_I f(t)\,dt \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{n+1} \left| I_+(v_n, f) \setminus I_+(v_{n+1}, f) \right| \tag{5}$$

となる．

注意 1.1　問 1.1 における $\underline{f}_{\mathbf{v}}(t)$ の積分は

$$\int_I \underline{f}_{\mathbf{v}}(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n \left| I_+(v_n, f) \setminus I_+(v_{n+1}, f) \right|$$

とおくべきであり，これは計算できるものと想定している．$\{v_n\}$ を一層細かくすることにより，対応する $\underline{f}(t)$ の積分が $f(t)$ の積分に接近していくことを期待するのである．

そこで，$\{v_n\}$ を，さらに細かく詳しく取り直して行く過程で，(5) 第 1 辺に対応する総和のなす数列は収束すれば，その極限が第 2 辺の積分を定めることが期待される．このときに，関数 $f(t)$ は Lebesgue 積分可能であり，こうして得られるであろう積分が Lebesgue 積分というわけである．

しかし，実際に，このような想定が生きるかどうかが，関数 $f(t)$ に対してなすべき要請と共に，検討と洗練を要する課題なのである．実際,「測度」の概念を展開し，また，関数把握でも「可測性」という新たな理念が必要になる．関数として基本的なものは，連続関数よりも階段関数

$$f(t) = \begin{cases} w_0, & 0 \leq t < \tau_0 \\ w_1, & \tau_0 \leq t < \tau_1 \\ \cdots & \cdots \\ w_N, & \tau_{N-1} \leq t < 1 \end{cases}$$

になる（図 1）．

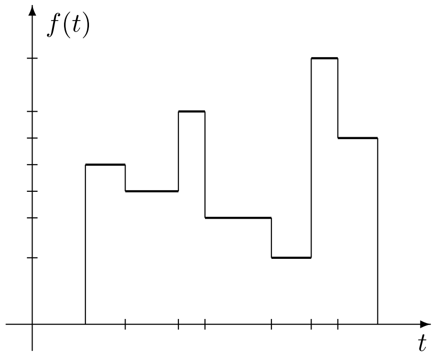

図 1: 階段関数の模式図

ただ，(1) にまで遡って考えれば，積分が合理的に定義できる場合は，Riemann 積分に拠っても，Lebesgue 積分に拠っても，結果の一致があるはずである．Riemann 積分可能であっても Lebesgue 積分ができない関数があり，また，Lebesgue 積分可能であっても Riemann 積分可能でないという関数もある．しかし,（連続関数や階段関数など） Riemann 積分も Lebesgue 積分も可能な関数については，確かに，いずれの積分も同じ結果を与える．そして，実用上我々が遭遇する関数には，このような関数，あるいは，このような関数をうまく利用して処理できるものばかりなのである．

それでは，どうして，やや不慣れな思考習慣を身に着けてまで， Lebesgue 積分に対処する必要があるのだろうか．

1.4 Lebesgue 積分にはどんな効用があるか

Riemann 積分と Lebesgue 積分の大きな違いは（添え数を含む）パラメーターを含んだ積分を扱うときに現れる．例えば，$[0,1]$ 上の関数列 $f_n(t)$ が $n \to \infty$ のとき $f(t)$ に「収束」するとしよう．

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt \tag{6}$$

と結論したいのは当然だろう．しかし，$f_n(t)$ が Riemann 積分可能な関数であっても，極限 $f(t)$ もそうであることの保証には収束の様態に関する強い制限が必要である．また，$f(t)$ が Riemann 積分可能であっても，積分の収束の検証のために（この収束に関する制限下での）煩雑な議論を要することもある．これに対し，$f_n(t)$ が Lebesgue 積分可能な関数列の場合，収束に対する制限は大幅に緩和される．特に，$|f_n(t)| \le 1$ ならば，$f(t)$ は Lebesgue 積分可能な関数であり，(6) が成り立つ．

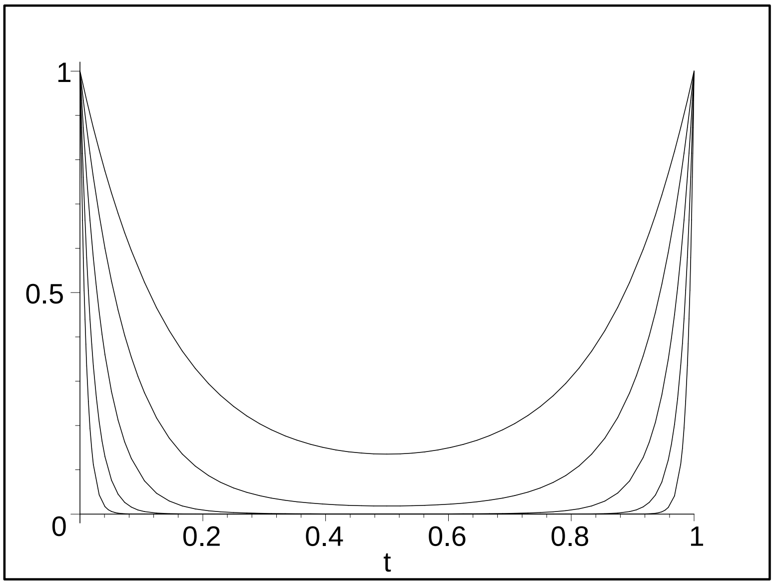

図 2: $f_n(t)$ のグラフ

同様のことは，関数 $F(t,x)$ が連続パラメータ x に関して微分可能なときの

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 F(t,x)\,dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}F(t,x)\,dt$$

の処理においても現れる．

例 1.3　$f_n(t) = \exp(-n\sin\pi t)$, $n = 1, 2, \cdots,$ を考える．$0 \le t \le 1$ において，$0 < f_n(t) \le 1$ である．また，$f_n(0) = f_n(1) = 1$ であり，一方，$0 < t < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ である．したがって，

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & 0 < t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

である（図 2）．Lebesgue 積分として論じているときは，これだけで

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{-n\sin(\pi t)}\,dt = 0 \tag{7}$$

と結論できる（後述の定理 4.1 参照）．一方，Riemann 積分として論ずるには，$f_n(t) \to f(t)$ の収束が区間 $[0,1]$ において「一様」ではないために，敢えて，一旦，

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = \lim_{m\to\infty}\int_{1/m}^{1-1/m} f_n(t)\,dt \quad (n\ :\ \text{固定})$$

に注意し，次に，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1/m}^{1-1/m} f_n(t)\,dt = 0 \quad (m\text{ : 固定})$$

を示す．すると，

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_{1/m}^{1-1/m} f_n(t)\,dt + \left\{\int_0^{1/m} f_n(t)\,dt + \int_{1-1/m}^{1} f_n(t)\,dt\right\}$$

であり,（この場合は，幸い簡単に）右辺第 2 項が絶対値において $\frac{2}{m}$ を超えないことがわかる．したがって，

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt\right| \leq \frac{2}{m}$$

となるが，$m \to \infty$ とすれば，(7) を得る．しかし，今の場合，図 2 からも (7) は明らかであり，Lebesgue 積分の知見を全く欠いている場合でも不自然な議論という感じは否めまい．

さらに，Lebesgue 積分によって初めて主張できることがある．特に，関数列 $\{f_n(t)\}$ について，

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\,dt = 0$$

という条件の分析は重要な例で，この場合，$f(t)$ が適切に構成されて

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,dt = 0$$

が成り立つのである．このことは関数空間の完備性と深く関わっており，関数解析や Fourier 解析を展開する上で本質的である．

1.5 若干の補遺 — Cantor 集合と Cantor 関数

区間 $I = [0,1]$ を

$$I_0 = [0, \frac{1}{3}],\ I_1 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}],\ I_2 = [\frac{2}{3}, 1]$$

に三等分し，I_0 と I_2 を残す操作 $C = (C_0, C_2)$ を考え, $I_0 = C_0\,I,\ I_2 = C_2\,I$ とかこう[8]．I_0, I_2 に同様の操作を加えれば,

$$\mathcal{C}_2 = C_{00}\,I \cup C_{20}\,I \cup C_{02}\,I \cup C_{22}\,I$$

[8]なお，$I_1 = C_1\,I$ とかくことができる．

が得られる．ただし，$C_{ij} = C_i C_j$ である．この操作を繰り返すことにより，互いに交わらない 2^N 個の閉区間の集まりの合併集合

$$\mathcal{C}_N = \bigcup_{i_N, i_{N-1}, \cdots, i_2, i_1 \in \{0,2\}} C_{i_N i_{N-1} \cdots i_2 i_1} I$$

が得られる．閉区間 $C_{i_N i_{N-1} \cdots i_2 i_1} I$ の長さは 3^{-N} であり，したがって，$N \to \infty$ の極限，すなわち，無限に続く $C_{\cdots i_N i_{N-1} \cdots i_1} I$ $(i_1, i_2, \cdots \in \{0,2\})$ はそれぞれ一点になる．構成から明らかなように，この点の座標は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}, \quad i_n \in \{0,2\},$$

で与えられる．これら極限点の集合

$$\mathcal{C} = \lim_{N \to \infty} \mathcal{C}_N = \bigcap_{N=1}^{\infty} \mathcal{C}_N \tag{8}$$

を Cantor 集合という．$\mathcal{C}$ は閉集合[9]である．

問 1.4 $\mathcal{C}_N$ に属する区間の長さの総和は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^N$ である．したがって，$\epsilon > 0$ がどんなに小さくても，$N > \dfrac{|\log \epsilon|}{\log 3 - \log 2}$ ならば，Cantor 集合 $\mathcal{C}$ は，長さの総和が ϵ を超えない，互いに交わらない閉区間の合併集合 $\mathcal{C}_N$ に含まれる．

補題 1.1 区間 $[0,1]$ から Cantor 集合 $\mathcal{C}$ の上への 1 対 1 写像が存在する[10]．

実際，まず，実数 $0 \le x \le 1$ を 2 進展開する：

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}, \quad x_n \in \{0,1\}.$$

ただし，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

だから，x の 2 進展開が，ある番号 m に対し，$x_m = 1$ かつ $x_n = 0$, $n \ge m+1$, を満たすときと，$x_m = 0$ かつ $x_n = 1$, $n \ge m+1$, のときは，同じ x を与える．そこで，2 進展開を一意的に定めるために，$x = 1$ の場合を除いて，係数は，N がどんなに大きくても $x_n = 0$ となる $n > N$ があるものとする．すると，このような係数の 2 進数列 $\{x_n\}$ の全体と実数 $0 \le x \le 1$ とは 1 対 1 に対応する．一方，$0 \le y \le 1$ の 3 進展開は

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}, \quad y_n \in \{0, 1, 2\}.$$

[9]実際，数列 $\{c_n\} \subset \mathcal{C}$ が c_* に収束するとき，$c_* \in \mathcal{C}$ をいえばよい．しかし，すべての N につき，$\{c_n\} \subset \mathcal{C}_N$ であり，このとき，$c_* \in \mathcal{C}_N$ である．

[10]この補題の主張は，Cantor 集合の非可算性，つまり，$\mathcal{C}$ の元を自然数を添え数とする数列として表すことができないことを意味する．

の形[11]である．容易にわかるように，

$$y_1 = 0 \iff 0 \le y \le \frac{1}{3}, \quad y_1 = 2 \iff \frac{2}{3} \le y \le 1$$

である．そこで，写像

$$[0,1] \ni x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \;\mapsto\; x^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n} \in [0,1]$$

を考えてみよう．この写像が $[0,1]$ から Cantor 集合 $\mathcal{C}$ の上への 1 対 1 写像である．

つぎに，区間 $I = [a,b]$, $a < b$, の上の 1 次関数 $f(t) = ct + d$ を考える．

$$g(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}ct - \frac{1}{2}ca + d, & a \le t \le \frac{2a}{3} + \frac{b}{3} \\ \frac{1}{2}c(a+b) + d, & \frac{2a}{3} + \frac{b}{3} \le x \le \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} \\ \frac{3}{2}ct - \frac{1}{2}cb + d, & \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} \le t \le b \end{cases}$$

として，$f(t)$ に区分的に 1 次の関数 $g(t)$ を対応させよう．$g(t)$ をそれぞれ $C_0\,I, C_1\,I, C_2\,I$ に制限して考えたものを $C_0\,f(t)$，$C_1\,f(t)$，$C_2\,f(t)$ とかくと，これらに，繰り返し同様の操作を施すことができる．

問 1.5

$$f(t) - g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}c(t-a), & a \le t \le \frac{2a}{3} + \frac{b}{3} \\ \frac{1}{2}c(a+b-2t), & \frac{2a}{3} + \frac{b}{3} \le t \le \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} \\ \frac{1}{2}c(t-b), & \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} \le t \le b \end{cases}$$

である．したがって，

$$|f(t) - g(t)| \le \frac{1}{6}|c|(b-a), \quad a \le t \le b,$$

である．

問 1.6

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt = (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\,c + d\right).$$

が成り立つ．

問 1.7 なめらかな $\varphi(t)$ に対し，

$$\int_a^b \varphi'(t)\,g(t)\,dt = -\,(ca+d)\,\varphi(a) + (cb+d)\,\varphi(b) \\ - \frac{3}{2}c\int_a^{2a/3+b/3} \varphi(t)dt - \frac{3}{2}c\int_{a/3+2b/3}^b \varphi(t)dt$$

となる．

---

[11] ここでも，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

に注意．したがって，上記は，$q_m = 1, 2$ $q_n = 0$, $n \ge m+1$, のときと級数値は一致する．

特に,

$$f_0(t) = t, \quad t \in I = [0,1],$$

として，この操作より，各区間 $C_{i_N i_{N-1} \cdots i_2 i_1} I$ 上で

$$f_N(t) = C_{i_N i_{N-1} \cdots i_2 i_1} f_0(t), \quad t \in C_{i_N i_{N-1} \cdots i_2 i_1} I \tag{9}$$

とおいて，$f_N(t)$, $t \in I$, を定義できる．

問 1.8　次を確かめよ：

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t, & 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} < t \le \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}, & \frac{2}{3} < t \le 1 \end{cases}.$$

また，なめらかな $\varphi(t)$ に対し,

$$\int_0^1 f_1(t)\,\varphi'(t)\,dt = \varphi(1) - \frac{3}{2}\left(\int_0^{1/3} + \int_{2/3}^1 \varphi(t)\,dt\right)$$

が成り立つ.

問 1.9　$f_2(t)$ を計算せよ．また，なめらかな $\varphi(t)$ に対し,

$$\int_0^1 f_2(t)\,\varphi'(t)\,dt = \varphi(1) - \frac{9}{4}\left(\int_0^{1/9} + \int_{2/9}^{3/9} + \int_{6/9}^{7/9} + \int_{8/9}^1 \varphi(t)dt\right)$$

を確かめよ.

問 1.10　$N = 1, 2, \cdots,$ に対し,

$$|f_N(t) - f_{N+1}(t)| \le \frac{1}{3}\frac{1}{2^{N+1}}, \quad 0 \le t \le 1.$$

が成り立つ[12].

問 1.10 により,

$$f_{\mathcal{C}}(t) = \sum_{N=1}^{\infty} (f_N(t) - f_{N-1}(t)) + f_0(t) = \lim_{N\to\infty} f_N(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{10}$$

が存在する．実際，$0 \le t \le 1$ において

$$|f_{\mathcal{C}}(t) - f_N(t)| \le \sum_{n=N}^{\infty} |f_{n+1}(t) - f_n(t)| \le \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{3}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{3}\frac{1}{2^N}$$

だから，t によらずに，$N \to \infty$ のとき，$f_N(t) \to f_{\mathcal{C}}(t)$ となる（一様収束）.

$f_{\mathcal{C}}(t)$ を Cantor 関数という．悪魔の階段[13]というよび方もある.

[12] ヒント：問 1.6 を上手に使え.
[13] devil's staircase.

補題 1.2　$f_{\mathcal{C}}(t)$ は区間 $[0,1]$ 上の連続関数である．Cantor 集合 $\mathcal{C}$ 上の点を除いて微分可能であり，$t \notin \mathcal{C}$ では，$f'_{\mathcal{C}}(t) = 0$ である．さらに，

$$\int_0^1 f_{\mathcal{C}}(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

である．

問 1.11　補題 1.2 を検証せよ[14]．

注意 1.2　一般に，

$$\int_0^1 f_N(t)\,\varphi'(t)\,dt = \varphi(1) - \frac{3^N}{2^N} \sum_{i_1,\cdots,i_N \in \{0,2\}} \int_{C_{i_N i_{N-1}\cdots i_1} I} \varphi(t)\,dt$$

が成り立つ．ここで，$C_{i_N i_{N-1}\cdots i_1} I = [\gamma_{i_N i_{N-1}\cdots i_1}, \gamma_{i_N i_{N-1}\cdots i_1} + 1/3^N]$ とおくと，誤差 ϵ_N のもとで

$$\begin{aligned} &\frac{3^N}{2^N} \sum_{i_1,\cdots,i_N \in \{0,2\}} \int_{C_{i_N i_{N-1}\cdots i_1} I} \varphi(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{2^N} \sum_{i_1,\cdots,i_N \in \{0,2\}} \varphi(\gamma_{i_N i_{N-1}\cdots i_1}) + \epsilon_N \end{aligned}$$

となる．ただし，

$$|\epsilon_N| \le \frac{1}{3^N} \max_{0 \le t \le 1} |\varphi'(t)|$$

である．一方，

$$\left| \frac{1}{2^N} \sum_{i_1,\cdots,i_N \in \{0,2\}} \varphi(\gamma_{i_N i_{N-1}\cdots i_1}) \right| \le \max_{0 \le t \le 1} |\varphi(t)|$$

である．したがって，なめらかな $\varphi(t)$ のそれぞれに対し，極限値

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{C}}(\varphi) &= \lim_{N\to\infty} \frac{3^N}{2^N} \sum_{i_1,\cdots,i_N \in \{0,2\}} \int_{C_{i_N i_{N-1}\cdots i_1} I} \varphi(t)\,dt \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2^N} \sum_{i_1,\cdots,i_N \in \{0,2\}} \varphi(\gamma_{i_N i_{N-1}\cdots i_1}) \end{aligned}$$

が存在すること，$|\gamma_{\mathcal{C}}(\varphi)| \le \max_{0 \le t \le 1} |\varphi(t)|$ が満たされ，かつ

$$\int_0^1 f_{\mathcal{C}}(t)\,\varphi'(t)\,dt = \varphi(1) - \gamma_{\mathcal{C}}(\varphi) \tag{11}$$

となることがわかる[15]．しかも，$\gamma_{\mathcal{C}}(t) = \frac{1}{2}$，$\gamma_{\mathcal{C}}(1) = 0$ である．

[14] ヒント：問 1.6 の応用である．
[15] (11) の意義については後に再説する．

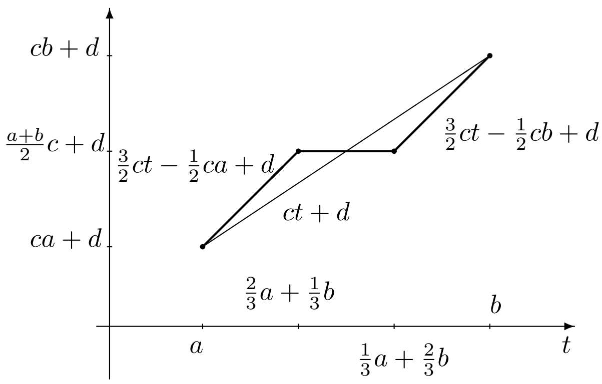

図 3: プロシデュア trisect$([[c,d],[a,b]])$ の模式図

問 1.12 $p_n(t)=t^n$, $n=1,2,\cdots$, とする．

$$\gamma_{\mathcal{C}}(p_n)=1-n\int_0^1 f_{\mathcal{C}}(t)\,p_{n-1}(t)\,dt$$

が成り立つ．

Cantor 関数の構成を数式処理ソフト Maple[16] を用いて追跡してみよう．まず，プロシデュア `trisect`，`line` を用意する（図 3）．

`trisect` は，入力[17] $FL=[[[c,d],[a,b]]$ に対し，区間 $[a,b]$ 上の 1 次関数 $f(t)=ct+d$ から，三等分区間とその上の $f(t)$ の変形の係数を組み合わせたリストの列

$$[[\frac{3}{2}c,-\frac{1}{2}ca+d],[a,\frac{2a}{3}+\frac{b}{3}]],\ [[0,\frac{1}{2}c(a+b)+d],[\frac{2a}{3}+\frac{b}{3},\frac{a}{3}+\frac{2b}{3}]],$$
$$[[\frac{3}{2}c,-\frac{1}{2}cb+d],[\frac{a}{3}+\frac{2b}{3},b]]$$

を出力する．すなわち，`trisect` の出力は，対を成分とする 3 組のリストであり，第 2 成分の対が入力データの第 2 成分に現れる区間の三等分区間に対応する．出力のリストの第 1 成分は，第 2 成分の区間の上での関数の変形である．ただし，下に見る通り，`trisect` では，入力が $a<b$ を満たしていることの検証に加え，$f(t)$ を定義して計算させている．

`line` は，入力 $FL=[[c,d],[a,b]]$ と t から関数

$$h\ :\ t\mapsto\begin{cases}0, & t<a\\ ct+d, & a\le t\le b\\ 0, & t>a\end{cases}$$

を出力する（図 4）．

[16] Maple は Waterloo, Inc. の登録商標である．

[17] 通常の数学的記号法と Maple の記法とは必ずしも一致しない．$[a,b]$ などは，Maple ではリストを表し，一方，地の文ではもっぱら閉区間を表す．読み分けていただきたい．

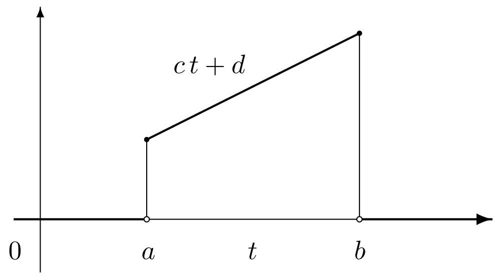

図 4: プロシデュア $\mathrm{line}([[c,d],[a,b]],t)$ の模式図

ここで，`trisect`，`line` のプロシデュアを示す[18]：

$trisect := \mathbf{proc}(FL)$
$\mathbf{local}\, a,\ b,\ c,\ d,\ f,\ t,\ n,\ m,\ F,\ L,\ FF,\ LL;$
$\quad a := FL_{21}\,;$
$\quad b := FL_{22}\,;$
$\quad \mathbf{if}\, b \le a\, \mathbf{then}\, \mathrm{RETURN}(`\mathit{bad\ \ data\ \ in\ \ abscissae}`)\, \mathbf{end\ \ if};$
$\quad \mathbf{for}\, n\, \mathbf{to}\, 4\, \mathbf{do}\, L_n := 1/3 * (4-n) * a + 1/3 * (n-1) * b\, \mathbf{end\ \ do}\,;$
$\quad c := FL_{11}\,;$
$\quad d := FL_{12}\,;$
$\quad f := t \to c * t + d\,;$
$\quad F_1 := (1/2 * f(a) - 1/2 * f(b))/(a - L_2)\,;$
$\quad F_2 := f(a) - F_1 * a\,;$
$\quad F_3 := 0\,;$
$\quad F_4 := 1/2 * f(a) + 1/2 * f(b)\,;$
$\quad F_5 := (1/2 * f(b) - 1/2 * f(a))/(b - L_3)\,;$
$\quad F_6 := f(b) - F_5 * b\,;$
$\quad \mathbf{for}\, m\, \mathbf{to}\, 3\, \mathbf{do}\, FF_m := [F_{2*m-1},\ F_{2*m}]\, \mathbf{end\ \ do}\,;$
$\quad \mathbf{for}\, m\, \mathbf{to}\, 3\, \mathbf{do}\, LL_m := [L_m,\ L_{m+1}]\, \mathbf{end\ \ do}\,;$
$\quad \mathrm{seq}([FF_m,\ LL_m],\ m = 1..3)$
$\mathbf{end\ \ proc}$

[18]実際は，これらをモデュール `cantor` に後述のプロシデュア `fcn`，`deriv` と共に組み込み，Cantor 関数およびその（弱）導関数を生成するために利用する．

$$
\begin{array}{l}
\mathit{line} := \mathbf{proc}(FL,\, t)\\
\mathbf{local}\, a,\, b,\, c,\, d;\\
\quad a := FL_{21}\,;\\
\quad b := FL_{22}\,;\\
\quad c := FL_{11}\,;\\
\quad d := FL_{12}\,;\\
\quad t \to \mathrm{piecewise}(t < a,\, 0,\, a \le t \textbf{ and } t \le b,\, c * t + d,\, b < t,\, 0)\\
\mathbf{end\ proc}
\end{array}
$$

以上を反復過程に組み込んだのがプロシデュア `fcn` である．(9) を計算するためには，反復回数 N と変数 t の入力から，基本的には，`trisect` を $[[1,0],[0,1]]$ から出発して N 回反復し，出力された 3^N 個のリストに `line` を施して，指定の小区間上で 1 次関数，それ以外では 0 になる 3^N 個の関数が得られる．$f_N(t)$ はこれらの総和になる．

問 1.13　$f_N(t)$ が 1 次関数になるような小区間の個数は 2^{N-1} である．

次に `fcn` を掲げる．図 5，図 6，図 7 は，それぞれ $f_3(t)$，$f_4(t)$，$f_7(t)$ のグラフである．また，図 8 は図 7 の左隅を拡大したものである．

$$
\begin{array}{l}
\mathit{fcn} := \mathbf{proc}(N,\, t)\\
\mathbf{local}\, \mathit{output},\, \mathit{num},\, \mathit{fcn},\, m,\, n;\\
\mathbf{option}\, \mathit{remember};\\
\quad \mathit{output}_1 := \mathrm{trisect}([[1,\, 0],\, [0,\, 1]])\,;\\
\quad \mathit{num}_1 := 3\,;\\
\quad \mathbf{for}\, n\, \mathbf{from}\, 2\, \mathbf{to}\, N\, \mathbf{do}\\
\quad\quad \mathit{output}_n := \mathrm{seq}(\mathrm{trisect}({\mathit{output}_{n-1}}_m),\, m = 1..\mathit{num}_{n-1})\,;\\
\quad\quad \mathit{num}_n := \mathrm{nops}([\mathit{output}_n])\\
\quad \mathbf{end\ do};\\
\quad \mathit{fn} := \mathrm{seq}(\mathrm{line}({\mathit{output}_N}_m,\, t),\, m = 1..\mathit{num}_N)\,;\\
\quad t \to \mathrm{sum}({\mathit{fn}}_m(t),\, m = 1..\mathit{num}_N)\\
\mathbf{end\ proc}
\end{array}
$$

なお，ことごとしく数式処理ソフトで処理するのもどうかとは思うが，

$$\int_0^1 f_N(t)\,\phi'(t)\,dt$$

を計算するプロシデュア `deriv` は次の通り[19]．すなわち，$\mathrm{deriv}(N,\phi)$ は $\int_0^1 f_N(t)\,\phi'(t)\,dt$ を部分積分を利用して

$$\mathrm{deriv}(N,\phi) = \phi(1) - \frac{3^N}{2^N}\int_{[0,1]\setminus\mathcal{C}_N} \phi(t)\,dt$$

[19] これもモデュール `cantor` に収めてある．

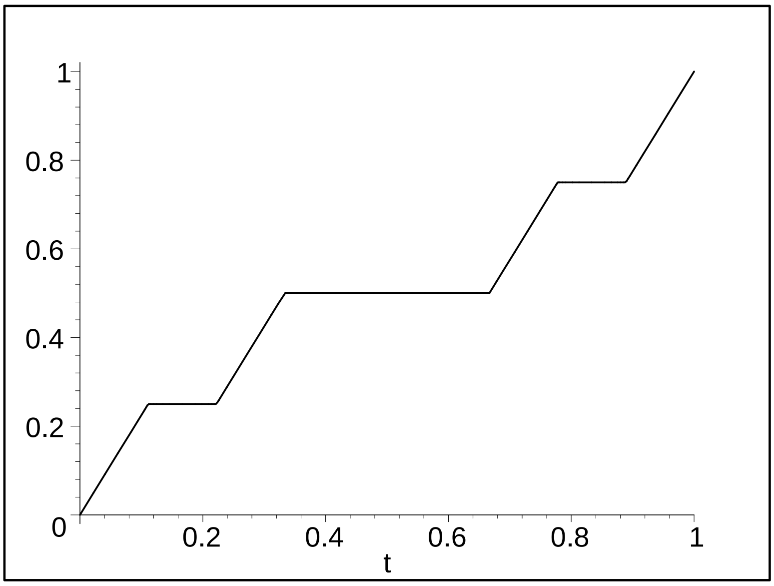

図 5: $f_3(t)$ のグラフ

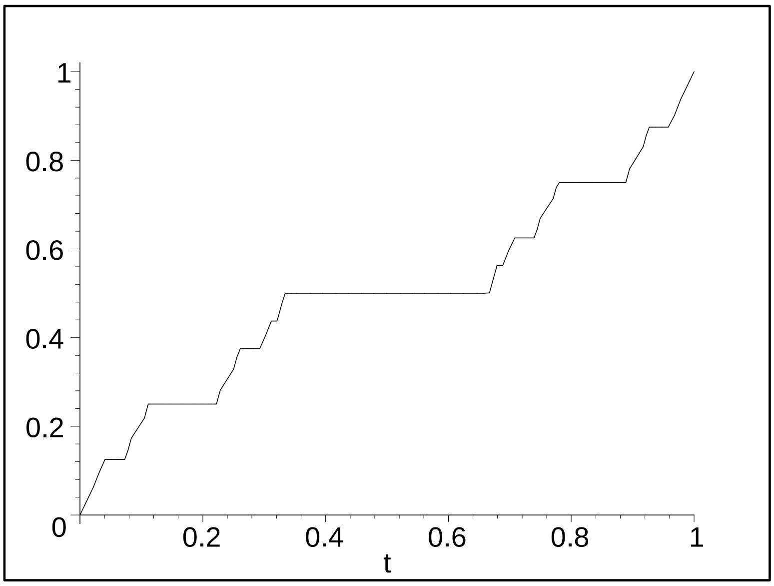

図 6: $f_4(t)$ のグラフ

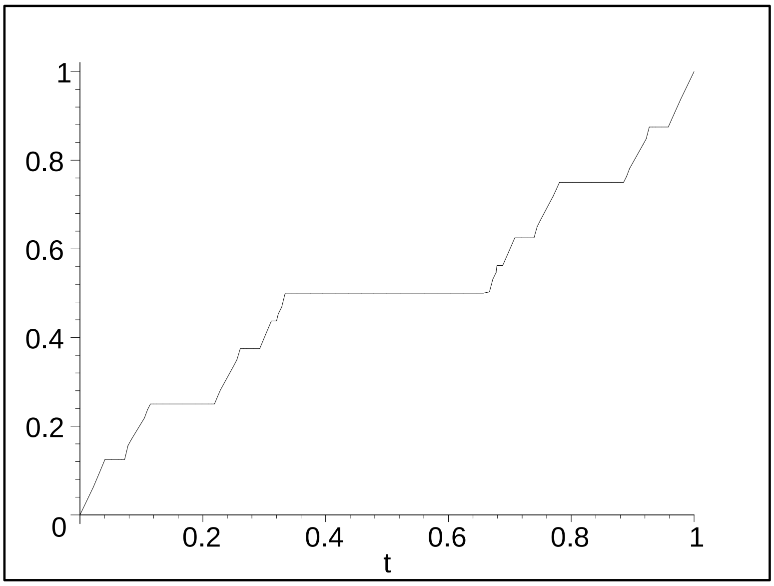

図 7: $f_7(t)$ のグラフ

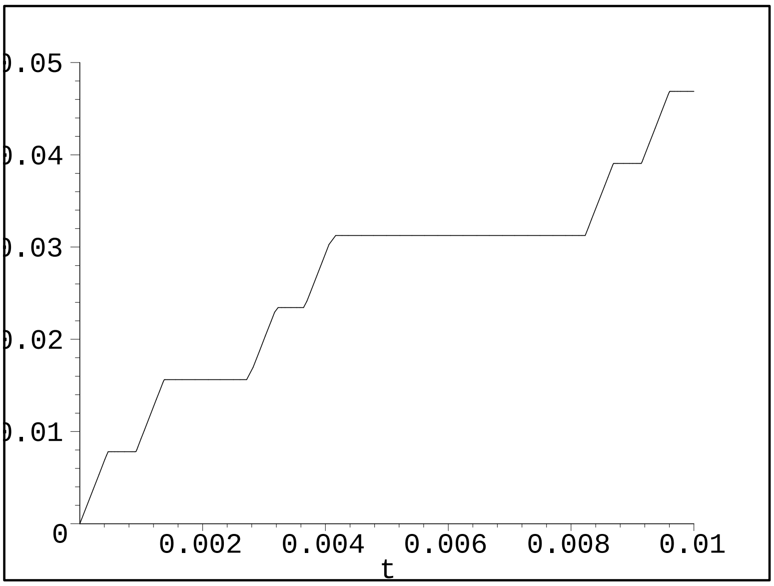

図 8: $f_7(t)$ のグラフ（詳細）

と変形するものである．右辺を直接コード化するわけではない．

$$
\begin{array}{l}
\mathit{deriv} := \mathbf{proc}(N,\, \phi) \\
\mathbf{local}\, \mathit{fN},\, t,\, a,\, b,\, c,\, R,\, n,\, m,\, l,\, M; \\
\quad \mathit{fN} := \mathit{cantor} : -\mathit{fcn}(N,\, t)\,; \\
\quad M := \mathrm{nops}(\mathit{fN}(t))\,; \\
\quad c := [\mathrm{seq}([\mathrm{op}(3,\, \mathrm{op}(n,\, \mathit{fN}(t))),\, \mathrm{op}(4,\, \mathrm{op}(n,\, \mathit{fN}(t)))],\, n = 1..M)]\,; \\
\quad a := [\mathrm{seq}(\mathrm{subs}(t = 0,\, \mathrm{op}(1,\, \mathrm{op}(1,\, c_{n1}))),\, n = 1..M)]\,; \\
\quad b := [\mathrm{seq}(-\mathrm{subs}(t = 0,\, \mathrm{op}(1,\, \mathrm{op}(2,\, c_{n1}))),\, n = 1..M)]\,; \\
\quad \mathbf{for}\, m\, \mathbf{to}\, M\, \mathbf{do} \\
\quad\quad R_m := \mathit{student}_{\mathit{intparts}}(\mathrm{Int}(c_{m2} * \mathrm{diff}(\phi(t),\, t),\, t = a_m..b_m),\, c_{m2}) \\
\quad \mathbf{end\ do}; \\
\quad \mathrm{simplify}(\mathrm{sum}(R_l,\, l = 1..M)) \\
\mathbf{end\ proc}
\end{array}
$$

`deriv` のコードについては若干の説明が要るかも知れない．$\mathrm{op}(n, X)$ は，記号 X を構成する（$\mathrm{nops}(X)$ 個の）オペランドの第 n 番目のものを表す．例えば，$\mathit{fN}(t)$ は，M 項の和 $s_1+s_2+\cdots+s_M$ の形であって，$s_n = \mathrm{op}(n, \mathit{fN}(t))$ となる．ただし，各 s_n は，実は，

$$
s_n = \begin{cases} 0, & t < a_n \\ c_n t + d_n, & -t - a_n \le 0 \text{ and } \ t - b_n \le 0 \\ 0, & b_n < t \end{cases}
$$

の形をしており，オペランドは 6 個，その順番は

$$
t < a_n,\ 0,\ -t - a_n \le 0 \text{ and } t - b_n \le 0,\ c_n t + d_n,\ b_n < t,\ 0
$$

である．したがって，$[\mathrm{op}(3, \mathrm{op}(n, \mathit{fN}(t))), \mathrm{op}(4, \mathrm{op}(n, \mathit{fN}(t)))]$ は

$$
[-t - a_n \le 0 \text{ and } t - b_n \le 0,\ c_n t + d_n]
$$

となる[20]．また，$\mathit{student}_{\mathit{intparts}}$ は，Maple のパッケージ `student` 中の部分積分をさせるコマンドを意味する．

`deriv` を利用したささやかな出力例を挙げる．

$$
\mathrm{deriv}(2,\, \phi) = -\frac{9}{4}\int_0^{1/9} \phi(t)\, dt - \frac{9}{4}\int_{2/9}^{1/3} \phi(t)\, dt - \frac{9}{4}\int_{2/3}^{7/9} \phi(t)\, dt - \frac{9}{4}\int_{8/9}^{1} \phi(t)\, dt + \phi(1)
$$

2　被覆と零集合

2.1　被覆

考察を仕切るものとして，Ω という集合を取り上げよう．Ω のある部分集合 $S \subset \Omega$ を観察したい．(適当な「性質」を備えていると想定された）Ω の

[20]なお，$\mathrm{op}(1, -t - a_n \le 0 \text{ and } t - b_n \le 0)$，$\mathrm{op}(2, -t - a_n \le 0 \text{ and } t - b_n \le 0)$ は，それぞれ，$-t - a_n \le 0$，$t - b_n \le 0$ である．

部分集合の族[21]$\Gamma = \{ D_\mu \,;\, \mu \in M \}$ で

$$S \subset \bigcup_{\mu \in M} D_\mu \quad (\text{ただし，}\quad D_\mu \cap S \neq \emptyset \quad \text{とする}) \tag{12}$$

を S の被覆という．被覆 Γ があれば，その各要素集合 D_μ を検討することにより，S についての（想定済みの「性質」に関する）知見が得られるだろう，というわけである．被覆の選び方には Ω や S に想定すべき構造が反映する．特に，被覆を構成する集合がすべて開集合ならば，この被覆は開被覆といわれ，また，閉集合からなる被覆は閉被覆とよばれる．逆に，被覆を通じて，被覆される集合などに構造を指定することもできる．そのようなとき，被覆は部分集合の族というより，むしろ系[22]と考えるべきである．

例 2.1　§1.5 の Cantor 集合 $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} \subset I,\ I = [0,1]$) と閉区間の族

$$\{C_{i_N i_{N-1} \cdots i_2 i_1} I \,;\, i_1, \cdots, i_N \in \{0,2\}\}$$

を思い起こそう．構成から明らかに，この閉区間の族は Cantor 集合の被覆である[23].

問 2.1　被覆 $\{C_{i_N \cdots i_1} I\}$ によって覆われる $I = [0,1]$ の部分の長さは

$$\sum_{i_1, \cdots, i_N \in \{0,2\}} |C_{i_N i_{N-1} \cdots i_2 i_1} I| = \frac{2^N}{3^N}$$

である．特に，　$N \to \infty$ のとき，

$$\sum_{i_1, \cdots, i_N \in \{0,2\}} |C_{i_N i_{N-1} \cdots i_2 i_1} I|^s \;\to\; \begin{cases} 0, & s \log_2 3 > 1 \\ 1, & s \log_2 3 = 1 \\ \infty, & 0 < s \log_2 3 < 1 \end{cases}$$

である[24].

一般に被覆と言っても，抽象的な設定のままでは漠然としている．いくらかでも分析しておこう．

例 2.2 (Besicovitch の被覆定理の 1 次元カリカチュア)　直線上の有界集合[25]C ($\subset [a,b],\ -\infty < a < b < +\infty$) の被覆として，閉区間

$$I_c = [-\rho_c + c, c + \rho_c],\ c \in C,$$

[21]添え字 μ は D_μ たちがある管理下にあることを想定しているので，単なる「集まり」ではない．敢えて「族 (family)」といい，$\mu \in M$ と指示するゆえんである．

[22]system

[23]なお，閉区間 $C_{0 i_{N-1} \cdots i_1} I$ と $C_{2 i_{N-1} \cdots i_1} I$ とは交わらず，両者の間に，長さ 3^{-N} の開区間が入る．これを利用して，$\mathcal{C}$ の被覆として，互いに交わらない開区間からなるものを作ることもできる．

[24]言うまでもないとは思うが，$\log_2 3 = 1.584962501$，$\log_3 2 = 0.6309297534$ である．

[25]C は centers を示唆するもので，Cantor 集合の話の続きではない．字体の相違に注意．

から成るもの $\mathcal{I} = \{ I_c \}$ を考える．ここで，$\rho_c > 0$ である．$c \in I_c$ だから，$C \subset \bigcup_{c\in C} I_c$ は明らかである．しかし，この状況下では，被覆に属する開区間の長さ（今の場合なら，$|I_c| = 2\rho_c$）の総和などを想定した議論は困難であろう．これほど極端でなくても，被覆を構成する集合が多すぎるから，適当に間引いて，なお，被覆となる集合の族に整理したいということはあるはずである．そこで，

$$R_0 = \sup_{c\in C} \rho_c < +\infty$$

とする[26]．この仮定のもとで，せいぜい可算個の点 $c_0, c_1, \cdots$ を，$\{I_{c_j}\}$ が C の被覆になるように選び出すことができるのである．

実際，R_0 の意味から，$\rho_{c_0} > \frac{3}{4}R_0$ となる $c_0 \in C$ がある．そこで，

$$C_1 = \{ c \in C \,;\, c \notin I_{c_0} \}$$

とおく．$C_1 \neq \emptyset$ ならば，$R_1 = \sup_{c\in C_1} \rho_c$ とおき，$\rho_{c_1} > \frac{3}{4}R_1$ となる $c_1 \in C_1$ がある（もちろん，$R_1 \geq \rho_{c_1}$ である.）．以下，同様の操作を繰り返して，

$$C_j = C \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} I_{c_i}, \quad R_j = \sup_{c\in C_j} \rho_c\,,$$
$$c_j \in C_j, \quad \rho_{c_j} > \frac{3}{4}R_j, \quad j = 2, 3, \cdots,$$

が得られる[27]．もとより，$C_j = \emptyset$ ならば，c_j, R_j は定義できない．このときは $J = j-1$ とおき，一方，すべての $C_j \neq \emptyset$ ならば $J = \infty$ とおくことにすれば，得られたのは $\mathcal{I}$ の部分系 $\mathcal{I}_B = \{ I_{c_j} \,;\, j = 0, \cdots, J\}$ である．部分系 $\mathcal{I}_B$ は C の被覆である：

$$C \subset \bigcup_{j=0}^{J} I_{c_j} \tag{13}$$

が成り立つ．$J < \infty$ のときは明らかであろう．$J = \infty$ のときは丁寧に考えなければ成らない．実際，

$$k > j \quad \text{ならば} \quad \rho_{c_k} \leq \frac{4}{3}\,\rho_{c_j} \tag{14}$$

であり[28]，したがって，閉区間

$$[c_i - \frac{1}{3}\,\rho_{c_i}, c_i + \frac{1}{3}\,\rho_{c_i}] \quad i = 1, \cdots, J \tag{15}$$

[26] sup は上限，すなわち，英語では least upper bound，今の場合は，すべての ρ_c より**大きい実数として想定しうるものの中でもっとも小さい実数**を表す．したがって，$R' < R_0$ ならば $R' < \rho_c$ となる ρ_c があるはずだ，というところが大切である．

[27] 厳密には,「選択公理」を仮定する．脚注 33 参照.

[28] $k > j$ だから $c_k \in C_k \subset C_j$ であり，

$$\rho_{c_j} > \frac{3}{4}\,R_j \geq \frac{3}{4}\,\rho_{c_k}$$

である．

は互いに交わらないこと[29]に注意しよう．特に，

$$\bigcup_{i=1}^{J}[c_i - \frac{1}{3}\rho_{c_i}, c_i + \frac{1}{3}\rho_{c_i}] \subset [a - R_0, b + R_0]$$

だから，

$$\sum_{i=1}^{J} \frac{2}{3}\rho_{c_i} \leq b - a + 2R_0 < +\infty$$

となる．したがって，$J = \infty$ ならば，$\rho_{c_i} \to 0,\ i \to \infty$, である．以上を踏まえて，(13) を $J = \infty$ の場合に示そう．$c \in C$ とする．j が十分大きければ，$\rho_{c_j} < \frac{3}{4}\rho_c$ である．このとき，$c \in \bigcup_{i=0}^{j-1} I_{c_i}$ である．これを否定すると，$c \in C_j$ となるが，このとき，

$$\rho_{c_j} > \frac{3}{4}R_j \geq \frac{3}{4}\rho_c$$

が従うことになって，不合理である．

注意 2.1　$J = \infty$ のときは $\{c_i\}$ のどんな部分列も C の元に収束しない．実際，上の論法では，$J = \infty$ のとき，$\{c_i\}$ またはその部分列が $c_* \in C$ に収束したとすると，$\rho_{c_*} = 0$ となる．しかし，これは $\rho_c > 0, c \in C,$ の指定の仕方に反する．

一般に，(12) において，集合 S の被覆 $\Gamma = \{\, D_\nu\,;\, \nu \in N\}$ の部分族，つまり，$N' \subset N$ に対し，$\Gamma' = \{\, D_\nu\,;\, \nu \in N'\}$ であって，なお，S の被覆

$$S \subset \bigcup_{\nu \in N'} D_\nu$$

であるものを，Γ の部分被覆という．被覆としては，仕組のよくわかるものが望ましい．どんな被覆からであれ，適当な部分被覆が選び出せるとしたら嬉しいに違いない．

例 2.2 は，C の被覆 $\mathcal{I}$ から部分被覆 $\mathcal{I}_B$ を抜き出してみせたものである．部分被覆 $\mathcal{I}_B$ に属する閉区間には番号が付けられているというだけで，もとの $\mathcal{I}$ よりは扱いやすい．ところで，$\mathcal{I}_B$ はさらに分析できる．

---

[29] $i < j$ ならば $c_j \notin I_{c_i}$ であり，$|c_i - c_j| > \rho_{c_i}$ である．x が区間 $[c_i - \frac{1}{3}\rho_{c_i}, c_i + \frac{1}{3}\rho_{c_i}]$ と $[c_j - \frac{1}{3}\rho_{c_j}, c_j + \frac{1}{3}\rho_{c_j}]$ の共通点とすると，

$$|c_i - c_j| \leq |c_i - x| + |x - c_j| \leq \frac{1}{3}(\rho_{c_i} + \rho_{c_j}) \leq \frac{1}{3}(1 + \frac{4}{3})\rho_{c_i} < \rho_{c_i}$$

が成り立つことになって不合理である．

問 2.2 $\theta > 1$ とする．$I_{c_j} \cap I_{c_k} \neq \emptyset$, $1 \leq j < k < J$, であって，$\rho_{c_j} \leq \theta\, \rho_{c_k}$ を満たすような j の個数を評価せよ[30]．

問 2.3 $\theta > 1$ とする．$I_{c_j} \cap I_{c_k} \neq \emptyset$, $1 \leq j < k < J$, であって，$\rho_{c_j} > \theta\, \rho_{c_k}$ を満たすような j の個数を評価せよ[31]．

問 2.4 J は十分大きいとする．

$$I_{c_{14}} \cap I_{c_j} = \emptyset$$

となる $j = 1, \cdots, 12$ が必ずあることを示せ[32].

例 2.3 J は十分大きい（$\leq \infty$）とする．例 2.2 で得られた $\mathcal{I}_B$ は，さらに，分解されて，

$$\mathcal{I}_B = \bigcup_{j=1}^{13} \mathcal{I}_B^{(j)}$$

が成り立つ．ここで，各 $\mathcal{I}_B^{(j)}$ は，互いに交わらない閉区間からなる．実際，写像

$$\delta : \mathcal{I}_B \quad \to \quad \{1, 2, \cdots, 13\}$$

が定義できれば，$\mathcal{I}_B^{(j)} = \{I_{c_k}\,;\, \delta(I_{c_k}) = j\}$ とおけばよい．δ は次のように逐次定めて行く：まず，$\delta(i) = i$, $i = 1, 2, \cdots, 13$, とする．$\delta(14)$ としては，問 2.3 を満たす j を充てる．今，$k \geq 13$ として，$i \leq k$ まで $\delta(i)$ が定義できているとする．$1 \leq j \leq 13$ に対し，

$$I_{c_{k+1}} \cap \bigcup_{\delta(i)=j,\, 1 \leq i \leq k} I_{c_i} \tag{16}$$

---

[30] このような j の個数は k に依存しない数で抑えられる．まず，仮定から，$|c_j - c_k| \leq \rho_{c_j} + \rho_{c_k}$，したがって，(14) により，$\theta' = 1 + \frac{4}{3}\theta$ として，

$$[-\frac{1}{4}\rho_{c_k} + c_j, c_j + \frac{1}{4}\rho_{c_k}] \subset [-\frac{1}{3}\rho_{c_j} + c_j, c_j + \frac{1}{3}\rho_{c_j}] \subset [-\theta'\rho_{c_k} + c_k, c_k + \theta'\rho_{c_k}]$$

となる．求める j の個数を N_k とおくと，(15) により，

$$\frac{1}{2}N_k\rho_{c_k} \leq 2\theta'\rho_{c_k}, \quad すなわち \quad N_k \leq 4\theta' = 4 + \frac{16}{3}\theta$$

である．第 2 式右辺は k に依存しない．

[31] このような j の個数は 2 を超えない（≤ 2）．実際，i, j は，$I_{c_i} \cap I_{c_k} \neq \emptyset$, $I_{c_j} \cap I_{c_k} \neq \emptyset$, $1 \leq i, j < k$ かつ $\rho_{c_i} > \theta\rho_{c_k}$, $\rho_{c_j} > \theta\rho_{c_k}$ を満たすとする．$i, j < k$ だから，$c_k \notin I_{c_i} \cup I_{c_j}$ である．$c_k = 0$ と仮定してよい．一方，$c_i \in I_{c_j}$ とすれば，$i < j$，したがって，$c_j \notin I_{c_i}$ であり，また，$I_{c_i} \cup I_{c_j}$ は閉区間でなければならないから，c_i, c_j は同符号であって，$\rho_{c_k} > \rho_{c_j}$ か $\rho_{c_k} > \rho_{c_i}$ のいずれか一方が成り立たなければならないことになる．しかし，これは c_k の選び方に反する．$c_j \in I_{c_i}$ としても同様である．したがって，$I_{c_i} \cap I_{c_j} = \emptyset$ でなければならない．すなわち，$|c_i - c_j| > \rho_{c_i}$, $\rho_{c_j} > \theta\rho_{c_k}$ である．

[32]

$$\left(4 + \frac{16}{3}\theta\right) + 2 = 12, \quad \theta = \frac{9}{8}$$

である．

を考える．ここで，I_{c_i}, $\delta(i) = j$, は，互いに交わらないよう構成できているとしよう（問 2.4 参照）．このとき，(16) が空集合でなければ $I_{c_{k+1}} \cap I_{c_i} \neq \emptyset$ となる i があることになるから，$1 \leq j \leq 13$ のうちのどれかの j について (16) が空にならないと，問 2.2, 2.3 に矛盾する．そこで，(16) が空集合になる j をとって $\delta(k+1)$ と定義して，数学的帰納法の階梯を進むことができる．

注意 2.2　平面の場合の Besicovitch の被覆定理については次節で言及する．例 2.3 相当のことをは，プログラムに組んで計算機に実行させることができるのである[33].

なお，一般に，集合 S の二つの被覆 $\Gamma = \{D_\nu\}$ と $\Gamma' = \{D'_\mu\}$ について，任意の D_ν に対し，適当な D'_μ が $D'_\mu \subset D_\nu$ が満足されるように見つけられるとき，被覆 Γ' を被覆 Γ の細分ということがある．

例 2.4　$C \subset [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, とする．$C$ の任意の開被覆 $\mathcal{O} = \{O_\lambda\}$ に対し，$\{[-\rho_s + s, s + \rho_s];\, s \in S\}$ の形の S の被覆で，$\mathcal{O}$ の細分になるものがある．実際，$\mathcal{O}$ は S の被覆だから，$S \cap O_\lambda \neq \emptyset$ である．$s \in S \cap O_\lambda$ に対し，O_λ は開集合だから，$(-2\rho_s + s, s + 2\rho_s) \subset O_\lambda$ となる $\rho_s > 0$ がある．もちろん，$[-\rho_s + s, s + \rho_s] \subset O_\lambda$ である．

被覆に関する話題では Heine-Borel の被覆定理が重要である．

命題 2.1　$S \subset [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, は閉集合とする．$S$ の任意の開被覆 $\mathcal{O} = \{O_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ には有限（個からなる）部分被覆がある．

[証明]　まず，任意の無限集合 $M_0 = \{s_n, n = 1, 2, \cdots\} \subset S$ が S の元に収束する部分列を含むことを示す．実際，a, b の中点を a' とすると，$\{s_n\} \cap [a, a']$, $\{s_n\} \cap [a', b]$ のいずれか一方は無限個の元を含む．今，前者が無限集合であるとして，M_1 と置こう．区間 $[a, a']$ を二等分し，M_1 との共通部分を作ると，少なくとも一方は無限集合である．それを M_2 とする．以下，同様の操作を繰り返すと，

$$S \supset M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots$$

という無限集合の系列が得られる．$s'_n \in M_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, とすると，$\{s'_n\} \subset \{s_n\} (= M_0)$ であり，しかも，

$$|s'_n - s'_{n+1}| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

だから，

$$s_* = \sum_{n=0}^{\infty} (s_{n+1} - s_n) + s_0 = \lim_{n \to \infty} s_n$$

[33]例えば，吉川敦：無限を垣間見る．牧野書店．2000. なお，アルゴリズムという意味では，Miller, G. L. 他： Separators for sphere-packings and nearest neighbor graphs, Journal of the ACM, **44**, 1–29 (1997) などに関連した話題がある．

が収束する[34]．しかも，S は閉集合だから，$s_* \in S$ である．さて，開被覆 $\mathcal{O}$ の細分で，$\{[-\rho_s + s, s + \rho_s]; s \in S\}$ の形のもの $\mathcal{I}$ を選ぶ（例 2.4）．例 2.2 により，$\mathcal{I}$ の部分被覆 $\mathcal{I}_B = \{ I_{s_i}, i = 1, \cdots, J\}$ がある．注意 2.1 を参照して，$J < +\infty$ がわかる．そこで，O_{λ_i} を $I_{s_i} \subset O_{\lambda_i}$ を満たすものとして選べば，$\{ O_{\lambda_i}; i = 1, \cdots, J\}$ は $\mathcal{O}$ の有限部分被覆である．

2.2 零集合

S を直線上の集合（$S \subset \mathbb{R}$）とし，$\mathcal{J} = \{J_\nu ; \nu \in N\}$ を有界（閉）区間からなる S の被覆とする（このような被覆を，以下では便宜上，区間型の被覆とよぶことにする）．$\mathcal{J}$ の添え数の集合 N は自然数の集合 $\mathbb{N}$ （の部分集合）としてよい．このような（たかだか）可算個の区間からなる被覆 $\mathcal{J}$ の長さを

$$\|\mathcal{J}\| = \sum_{\nu \in N} |J_\nu| \quad (\text{ただし，} \quad |J_\nu| = b_\nu - a_\nu, \quad J_\nu = [a_\nu, b_\nu])$$

として定義することができる．任意の $\epsilon > 0$ に対し，長さが ϵ より小さいような（上の形の）被覆 $\mathcal{J}_\epsilon$ が必ずある集合 S は零集合といわれる．

例 2.5　集合 S は，元が数列 $\{ s_n ; n = 0, 1, 2, \cdots \}$ として表されるもの（可算集合）ならば，零集合である．実際，$N = 1, 2, \cdots$ に対し，区間 $J_{n,N} = [-2^{-N-n} + s_n, s_n + 2^{-N-n}]$ から S の被覆 $\mathcal{J}_N = \{J_{n,N}\}$ が得られる．$\mathcal{J}_N$ の長さは，

$$\|\mathcal{J}_N\| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-N-n} = 2^{-N-1}$$

だから，$N \to \infty$ のとき，0 に収束する．

零集合の部分集合も零集合である．特に，空集合は零集合である．

問 2.5　有限集合 $S \subset \mathbb{R}$ は零集合である．

例 2.6　$Q_+ = \{ q > 0 ; q\,\text{は有理数} \}$ は零集合である．このためには，例 2.5 により，Q_+ の元を数列 $\{q_n ; n = 0, 1, 2, \cdots, \}$ として表すことができることを確かめればよい．実際，$q \in Q_+$ は自然数の比

$$q = \frac{i+1}{j+1} \quad (i, j = 0, 1, \cdots)$$

とかける．ただし，この q の表現は一意的ではない[35]．今，図 9 のように，正の整数の組に番号を付け，対 (m, n) と有理数 $\frac{m}{n}$ とを同一視すると，有理

[34]厳格には，実数の「完備性」に基づく．

[35]$(i+1)(j'+1) = (i'+1)(j+1)$ なる i', j' に対し，$q = \frac{i'+1}{j'+1}$ でもある．

数を数列として表現できることがわかる．なお，この数列は，同じ有理数が繰り返し無限回現れるけれども，集合としては Q_+ と同じものではある．

数列として表現できない零集合の例は，すでに挙げた Cantor 集合がある．

例 2.7　Cantor 集合 $\mathcal{C}$ は零集合である．実際，問 2.1 は，Cantor 集合が零集合であることを意味している．また，数列として表現できないことは，補題 1.1 の帰結である．ただし，前もって，数列としての表現によって区間 $[0,1]$ の元を尽くすことができないことを確かめておかなければならない．このために，Cantor の対角線論法を利用しよう．例えば，$[0,1]$ の任意の元 x を 10-進展開して考えよう．もし，$[0,1]$ を数列として表現できれば，

$$x_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{mn}}{10^n}, \quad \xi_{mn} \in \{0,1,\cdots,9\}, \quad m = 0,1,2,\cdots,$$

によって，$[0,1]$ の元は尽くされるはずである．ところが，

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_n}{10^n}, \quad \zeta_n \in \{0,1,\cdots,9\} \setminus \{\xi_{nn}\},$$

が $[0,1]$ に属すことは明らかであるのに，z はどの x_m とも第 m-位の数字（行列 (ξ_{mn}) の対角成分）が異なるから一致しない．これは，区間 $[0,1]$ が数列としては表されない，つまり，非可算集合であることを意味している．

零集合と零集合の共通部分はもちろん，合併集合も零集合である．また，可算個の零集合の合併集合も零集合であるが，零集合の非可算の合併集合は必ずしも零集合にはならない．

問 2.6　S_n, $n = 0,1,2,\cdots,$ はいずれも零集合とする．このとき，$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ は零集合になることを示せ[36]．

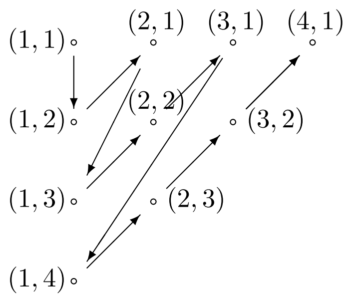

図 9: 正の整数の対の番号付けの説明

[36]任意の $\epsilon > 0$ に対し，S_n の区間型被覆 $\mathcal{J}_{n,\epsilon} = \{J_{nm}\}$ で $\|\mathcal{J}_{n,\epsilon}\| < 2^{-n-1}\epsilon$ となるもの

2.3 Besicovitch の被覆定理再説

例 2.2 で Besicovitch の被覆定理の特別な場合を論じた．ここでは，平面の場合を扱おう．以下の命題 2.2，命題 2.3 を併せたものが，平面の場合の Besicovitch の被覆定理である．

平面内の点 $c = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ を中心とし，半径 $\rho > 0$ の閉円板を

$$B_\rho(c) = \{\,(x, y)\,;\,(x-a)^2 + (y-b)^2 \le \rho^2\,\}$$

と表そう．

命題 2.2　平面内の有界集合 $C \subset \mathbb{R}^2$ を考える．各 $c \in C$ に対し，$\rho_c > 0$ が適当に定められるならば，

$$\mathfrak{B} = \{\,B_{\rho_c}(c)\,;\,c \in C\,\}$$

は集合 C の被覆である．ここで，

$$R_0 = \sup_{c \in C} \rho_c < +\infty$$

とする．このとき，せいぜい可算個の点 $c_k \in C$, $k = 0, 1, 2, \cdots, J$, を

$$\mathfrak{B}' = \{\,B_{\rho_k}(c_k)\,;\,k = 0, 1, \cdots, J\,\}, \quad \text{ただし，} r_k = \rho_{c_k},$$

が C の被覆，すなわち，$\mathfrak{B}'$ が $\mathfrak{B}$ の部分被覆になるように選ぶことができる．この際，

$$B_{r_j/3}(c_j) \cap B_{r_i/3}(c_i) = \emptyset, \quad j \ne i, \tag{17}$$

$$c_i \notin B_{r_j/2}(c_j), \quad i \ne j, \tag{18}$$

および，

$$J = \infty \quad \text{ならば} \quad \lim_{j \to \infty} r_j = 0 \tag{19}$$

を満足させることができる．

命題 2.3　命題 2.2 において，ある自然数 L があって，$\mathfrak{B}'$ を互いに交わらない L 個の部分集合 $\mathfrak{B}'_\ell$, $\ell = 1, \cdots, L$, の合併

$$\mathfrak{B}' = \bigcup_{\ell=1}^{L} \mathfrak{B}'_\ell$$

として表すことができる．しかも，その際，各 $\mathfrak{B}'_\ell$ は互いに交わらない閉円板から成る集合である．

がある．このとき，$\mathcal{J}_\epsilon = \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{J}_{n,\epsilon}$ は S の区間型の被覆であって，$\|\mathcal{J}_\epsilon\| < \epsilon$ を満たす．ここで，$\mathcal{J}_\epsilon$ は，$J_{nm} \in \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{J}_{n,\epsilon}$ に 1 対 1 対応（図 9 との類比に注目せよ）

$$\iota : \mathbb{N}^2 \ni (n, m) \quad \mapsto \quad \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n \in \mathbb{N}$$

を施して，区間列に並べ替えたものとすればよい．

命題 2.2 は実質的に例 2.2 に他ならない．区間 I_c を円板 $B_{\rho_c}(c)$ で置き換えて論ずればよいのである．ゆえに，

$$c_j \notin \bigcup_{k=0}^{j-1} B_{r_k}(c_k)$$

かつ $i > j$ ならば $r_i \leq \frac{3}{4} r_j$ となる．(17) は (13) と全く同じ考え方から従う（脚注 29）．(18) については，$i > j$ ならば構成から明らかである．一方，$i < j$ のときはどうか．このとき，$c_i \in B_{r_j}(c_j)$ との仮定からは $|c_i - c_j| \leq r_j < r_i$，すなわち，$c_j \in B_{r_i}(c_i)$ とが成り立つという矛盾に逢着する．(19) についても例 2.2 と同様に確められる．

命題 2.3 は例 2.3 の類比である[37]．基本的な手順は，問 2.2 から問 2.4 までの内容を円板の場合に書き直すことである．ただし，ここでは詳細には立ち入らない[38]．

以下では，数式処理ソフト Maple を使って Besicovitch の被覆定理を検証してみる．すなわち，集合 C や $\mathfrak{B}$ を一旦生成した後，上掲の命題 2.2，命題 2.3 の $\mathfrak{B}'$ や $\mathfrak{B}'_\ell$ を選び出してみたい．

例 2.8　まず，最初に点集合 C および半径の集合 $\{\rho_c\}$ に相当するものを生成する Maple のモデュール `ingredients` を下に示す．`ingredients` には，中心点の集合をリスト化して与えるプロシデュア `centres` および半径の集合のリスト化を与えるプロシデュア `radii` が含まれる．`centres` は，区間 $(-r, r)$ 内の N 個の数値の n 組[39]をリスト化したものであり，`radii` は区間 $(0.01, r)$ 内の N 個の数値をリスト化したものである．指定の区間内に N 個の数値を求めるためには（一様擬似）乱数を利用したプロシデュア `uniform` を用いた[40]．

```
> ingredients:=module()
> export uniform, centres, radii;

> uniform:=proc(r::constant..constant)
> local intrange, f:
> intrange:=map(x->round(x*10^Digits),evalf(r)):
> f:=rand(intrange):
> (evalf@eval(f))/10^Digits:
> end;
```

[37] $J < \infty$ でも $L < J$ となる．
[38] 詳しくは，上掲（脚注 33）の拙著をご覧いただきたい．
[39] 平面の場合は $n = 2$，すなわち，対である．以下ではこの場合しか扱わない．
[40] M.B.Monagan 他．Maple 8 Advanced Programming Guide. 2002. Waterloo Maple, Inc., p.9.

```
> centres:=proc(n,R,N) # n::dimension
> local c,i,j:
> for i from 1 to n do
> c[i]:=uniform(-R..R):
> end do:
> [seq([seq(c[i](),i=1..n)],j=1..N)]:
> end proc;

> radii:=proc(r,N)
> local r1,j:
> r1:=uniform(0.01..r):
> [seq(r1(),j=1..N)]
> end proc;

> end module:
```

以上の出力例は，後述の計算に含める．

例 2.9　中心点の集合のリスト化 C ，スカラー $r>0$ および半径の集合のリスト化 R をデータとするモデュール covering を下に示す．covering には，まず，中心点の集合を視覚化するための補助として，C の成分に r を組合わせたリストを成分とする新たなリストを作り出すプロシデュア base を含ませる．こうすれば，中心の座標が C の成分である半径 r の円周を（既存のコマンドを利用して）容易に描くことができる．covering は，さらに，円板から成る被覆を得るために，C の成分と R の成分とを組合わせたリストを成分とする新たなリストを生成するプロシデュア covers を含む．

```
> covering:=module()
> export base, covers;

> base:=proc(C,r) # C::  [seq], r::scalar>0
> local i, N:
> N:=nops(C):
> [seq([C[i],r],i=1..N)]
> end proc;
```

```
> covers:=proc(C,R) # C::  [seq], R::list
> local N, k:
> N:=nops(C):
> if nops(R)<>N then RETURN(`bad data in covering:-covers`)
end if:
> [seq([C[k],R[k]],k=1..N)]:
> end proc;

> end module:
```

出力は，いずれも後述のプロシデュア coversplot （注意 2.3）を利用して画像化する．

例 2.10　次に掲げるモデュール besicovitch は，プロシデュア pickone, remains，besico から成る．pickone は，与えられた円板からなる被覆を中心の座標と半径の組を成分とするリスト cc で表現したとき，cc のうちで，半径の最大値を求め，そのような最大値が実現される円板に対応する cc の成分をすべて求めてリスト化し，その最初の成分を出力するプロシデュアである．remains は，cc から pickone によって選び出した（リスト成分に相当する）円板の外に中心があるような円板を cc から選び出して，すべて集めたもの（のリスト化）を与える．

besico は与えられたリスト cc に，上掲の pickone と remains を組み込んだ反復過程を実行するプロシデュアである．cc を改めて $\mathrm{c}_0 = \mathrm{cc}$ と置き，g_1 =pickone(c_0)，c_1 =remains(c_0) を計算する．以下，$m = 1, 2, \cdots$ として，g_m =pickone(c_{m-1})，c_m =remains(c_{m-1}) を繰り返し計算する．最終的には，$\mathrm{c}_M = \emptyset$ となる M まで続ける．besico が出力するのは，リスト $[g_1, g_2, \cdots, g_M]$ である．

```
> besicovitch:=module()
> export pickone, remains, besico;

> pickone:=proc(cc) # cc:=covering:-covers:
> local i,RR,m,j,c1,c2:
> m:=nops(cc):
> RR:=max(seq(cc[i][2],i=1..m)):
> c1:={}:
> for j from 1 to m do
> if cc[j][2]=RR then c1:=c1 union {cc[j]}
> end if:
```

```
> end do:
> c2:=convert(c1,list):
> c2[1]:
> end;

> remains:=proc(cc)
> local i, f, r, c, m:
> f:=pickone(cc)[1]:
> r:=pickone(cc)[2]:
> c:={}:
> m:=nops(cc):
> for i from 1 to m do
> if (cc[i][1][1]-f[1])^2+(cc[i][1][2]-f[2])^2>r^2
> then c:=c union {cc[i]}
> end if
> end do:
> convert(c,list)
> end proc;

> besico:=proc(cc)
> local g, c;
> g:={}:
> c:=cc:
> while nops(c)>0 do
> g:=g union {pickone(c)}:
> c:=remains(c):
> end do:
> convert(g, list):
> end proc;

> end module:
```

besico により，命題 2.2 の相当する過程を数式処理ソフトで追跡できる．出力図（図 10）を下に示す.

まず，擬似乱数を利用して中心点の座標を（$-2.0 \leq x, y \leq 2.0$ の範囲で）1000 個リスト化したもの C0 を出力する．

```
> C0:=ingredients:-centres(2,2.0,1000):
```

ついで，1000 個の半径の数値をリスト化した R0 を出力する．

```
> R0:=ingredients:-radii(0.5,1000):
```

C0 を画像化するために，中心点が C0 の成分で与えられた半径 0.01 の小円周群 CB を作る．

```
> CB:=covering:-base(C0,0.01):
```

C0 に対応する点の集合の被覆として，C0 の成分を中心の座標とし，R0 の成分を半径とする円周の群れ CV を作る．

```
> CV:=covering:-covers(C0,R0):
```

最後に，CV から抜き出した Besicovitch 被覆 BCV を計算する．

```
> BCV:=besicovitch:-besico(CV):
```

CB, CV および BCV を画像化する．このために，プロシデュア `coversplot` を用いる．

注意 2.3　円板の中心点の座標と半径の組を成分とするリスト C から該当する円周の群れを画像化するために用意したプロシデュアが `coversplot` である．`coversplot` は，リスト C の他に，出力する円周の色と太さをそれぞれパラメータ *iro*，*hutosa* で指定している[41]．

```
> coversplot:=proc(C,iro,hutosa)
> local k, N, d:
> N:=nops(C):
> with(plottools):
> for k from 1 to N do
> d[k]:=circle(C[k][1],C[k][2],
> color=iro,thickness=hutosa):
> end do:
> plots[display](seq(d[k],k=1..N)):
> end proc:
```

`circle` はパッケージ `plottools` に含まれる中心点の座標と半径のデータから該当する円周を描くプロシデュアである．

[41] ここでは，*iro* は Maple の簡易色彩表をリスト coloris，すなわち，

```
> coloris:=[aquamarine, black, blue, navy, coral, cyan, brown, gold,
green, gray, khaki, magenta, maroon, orange, pink, plum, red, sienna,
tan, turquoise, violet, wheat, white, yellow]:
```

にし，色彩をリスト成分順位を表す数字で代替している．したがって，例えば，*coral* は `coloris[5]` である．*hutosa* も Maple 組込みの `thickness` の数値を指定するものである．

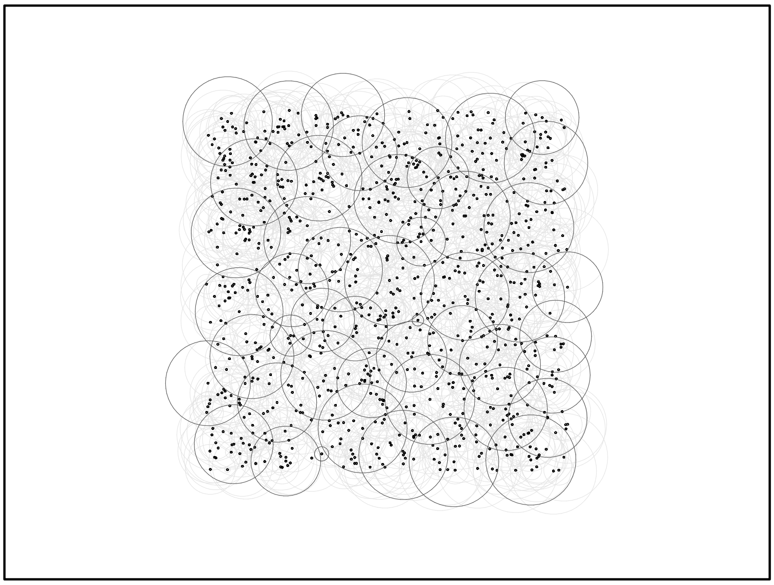

図 10: 命題 2.2 の模式図.

画像としての出力の前に，CB，CV および dbcv の画像データを，それぞれ，dcb，dcv および dbcv として保存する．

```
> dcb:=coversplot(CB,black,2):
> dcv:=coversplot(CV,yellow,1):
> dbcv:=coversplot(BCV,red,1):
```

ちなみに，dcb は黒色，dcv は黄色，さらに，dbcv は赤色で描画してある[42].

以上を重ねて出力したもの[43] が，図 10 である．

次に示すのは，命題 2.3 に相当する手続きである．

例 2.11　モデュール `decomposer` は,（Besicovitch）被覆を細分するためのプロシデュアをまとめたものである．プロシデュア `meets`，`meetsnr`，`meetsmax`，`indeks`，`decomp` を含む．

`meets` は中心の座標と半径から成る組（つまり，$[[a,b],r]$ の形のもの）を成分とするリスト $E=[E_1,\cdots,E_N]$ の各成分 E_i, $i=1,\cdots,n-1$, と中心の座標と半径から成る組 D（暗黙の想定上は $=E_n$）の位置関係を比較し，D の

[42]白黒の印刷では，濃淡で判断できる．小さな黒点状のものが dcb，うすい灰色が dcv，細い円周が dbcv である．

[43]コードは次の通り：

```
> plots[display](dbcv,dcb,dcv,scaling=constrained,axes=none);
```

定める円板と交わるような円板を定める E_i の添え数 i の集合 $\mathrm{meets}(D,n,E)$ を与えるプロシデュアである．

`meetsnr` は，上のリスト E について，集合 $\mathrm{meets}(E_n,n,E)$ の元の個数，つまり，E から決まる円板のうちで，E_n の定める円板と交わり，かつ，番号が n より若いもの個数 $\mathrm{meetsnr}(E,n)=\mathrm{nops}(\mathrm{meets}(E_n,n,E))$ を与えるプロシデュアである．`meetsmax` は，E の定める円板どうしが交わる際の交わり得る個数の最大値

$$\mathrm{meetsmax}(E)=\max\{\,\mathrm{meetsnr}(E,n)\,;\,n=1,\cdots,N\,\}$$

を与えるプロシデュアである．

`indeks` は，例 2.3 に現れる写像 δ に相当するもの $\mathrm{indeks}(E,n)$ を構成するプロシデュアである[44]．$L=\mathrm{meetsmax}(E)+1$ として，

$$\mathrm{indeks}\,:\,E\ni E_n(=(E,n))\ \mapsto\ m\in\{1,\cdots,L\}$$

を定義する．重要なことは，$\mathrm{indeks}(E,k)=\mathrm{indeks}(E,\ell)$ ならば，$k=\ell$ でない限り，E_k と E_ℓ の定める円板が交わらないことである．

最後に，`decomp` は，$\mathrm{indeks}(E_k)=n$ を満たす E の成分 E_k をリストにまとめて， $\mathrm{decomp}(E,n)$ として出力するプロシデュアである．

```
> decomposer:=module()
> export meets, meetsnr, meetsmax, indeks, decomp;

> meets:=proc(D,n,E) # n<=nops(E)
> local j, s:
> s:={}:
> for j from 1 to n-1 do
> if (E[j][1][1]-D[1][1])^2+(E[j][1][2]-D[1][2])^2
> >(E[j][2]+D[2])^2
> then s:=s union {j}
> end if:
> end do:
> {seq(j,j=1..n-1)} minus s:
> end proc;

> meetsnr:=proc(E,n) # n<=nops(E)
> local D, s:
```

[44] $\delta(E_n)=\mathrm{indeks}(E,n)$ と考えられたい．

```
> D:=E[n]:
> s:=meets(D,n,E):
> nops(s):
> end proc;

> meetsmax:=proc(E)
> local i, N:
> N:=nops(E):
> max(seq(meetsnr(E,i),i=1..N)):
> end proc;

> indeks:=proc(E,n)
> local i,j,k,M,MM,N,T,K,L,m:
> K:=nops(E):
> L:=meetsmax(E)+1:
> N:={seq(i,i=1..L)}:
> for i in N do m[i]:=i end do:
> for k from L+1 to K do
> M:=meets(E[k],k,E):
> MM:={seq(m[M[i]],i=1..nops(M))}:
> T:=N minus MM:
> m[k]:=min(seq(T[j],j=1..nops(T))):
> end do:
> m[n]:
> end proc;

> decomp:=proc(E,n)
> local N,i,j,s:
> if n>meetsmax(E)+1 then [] end if:
> N:=nops(E):
> s:={}:
> for i from 1 to N do
> if indeks(E,i)=n
> then s:=s union {E[i]}
> end if:
```

```
> end do:
> convert(s,list):
> end proc;

> end module:
```

以下で出力するのは，Besicovitch 被覆 BCV について，`meetsmax` と `decomp` を適用したものである．まず，$mm = \mathrm{meetsmax}(BCV){+}1$ とし[45]，decomp(BCV, m), $m = 1, \cdots, mm$ を `coversplot` によって，引き続き（色彩を変えて）画像化したデータ・ファイルを $dbd[m]$, $m = 1, \cdots, mm$, とする[46]．$dbd[m]$ すべてを重ねれば，BCV の画像化が再現される[47]（図 11）．

個々に $dbd[m]$ を画像化すると，円周が交わらないことがわかりやすい[48]（図 12〜図 19）．

3 測度

3.1 外測度と測度

集合 $S \subset [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, について，その区間型の（可算）被覆 $\mathcal{J} = \{J_n\}$ の長さ $\|\mathcal{J}\| = \sum_{n=0}^{\infty} |J_n|$ の下限

$$|S|^* = \inf_{\mathcal{J}\text{ は }S\text{ の区間型の被覆}} \|\mathcal{J}\| \tag{20}$$

を考える．言い換えると，$|S|^*$ は，S のどんな区間型の被覆の長さを上回ることはなく，一方，$|S|^*$ よりもわずかでも大きい値に対しては，必ずそれよりも小さい長さの区間型の被覆があるという数値である．

$|S|^*$ を S の外測度という[49]．考察下の場合，$S \subset [a, b]$ であり，$\{[a, b]\}$ も S の被覆であるから，

$$|S|^* \le b - a$$

である．

---

[45]コードとしては，モデュール `decomposer` への言及から始める．すなわち，

```
> mm:=decomposer:-meetsmax(BCV)+1:
```

[46]すなわち，

```
> for m from 1 to mm do dbd[m]:= coversplot(decomposer:-decomp(BCV,m),
coloris[m],3) end do:
```

[47]図 11 に濃淡があるのは色彩の違いの反映である．なお，コードは

```
> plots[display](seq(dbd[m],m=1..mm), scaling=constrained,axes=none):
```

[48]念のために，$dbd[m]$ と dcb とを重ねて画像化した．コードは，例えば，

```
> plots[display](dbd[1],dcb,scaling=constrained,axes=none);
```

[49]外測度を表す記号は $m^*(S)$, $\bar{m}(S)$, $\mu^*(S)$ など，文脈並びに文献によりさまざまである．

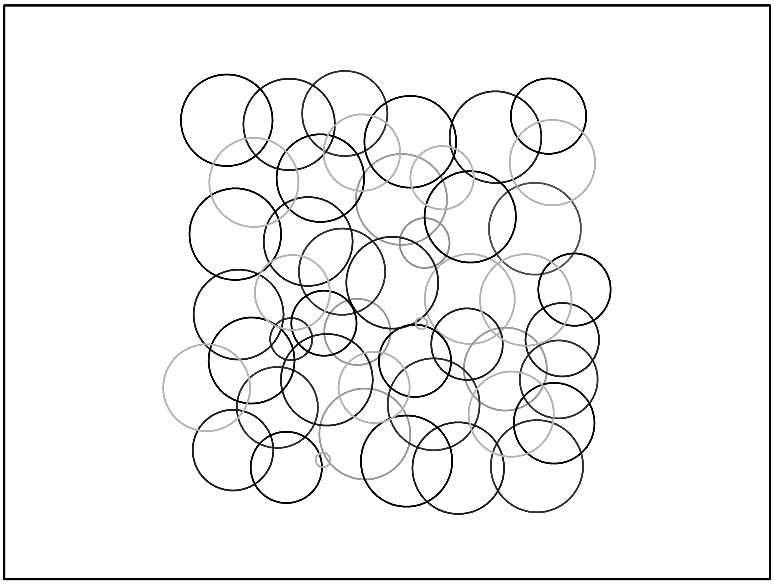

図 11: BCV の画像化

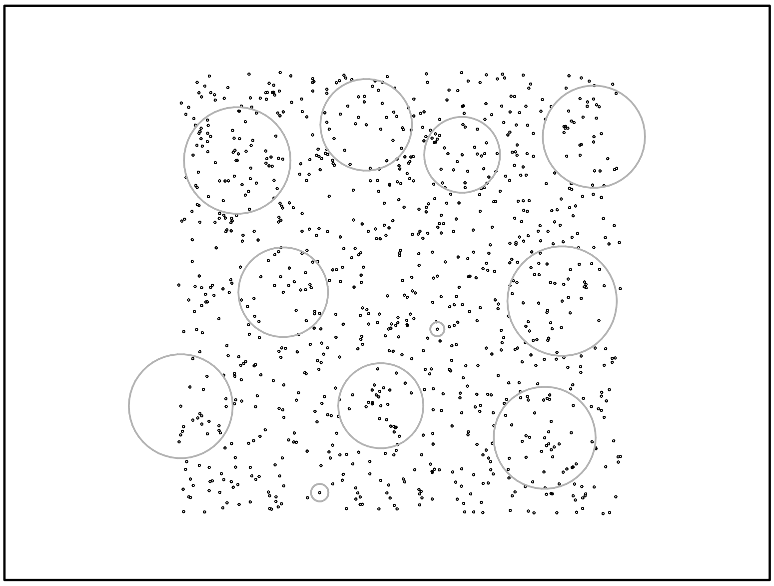

図 12: BCV の分解 (1)

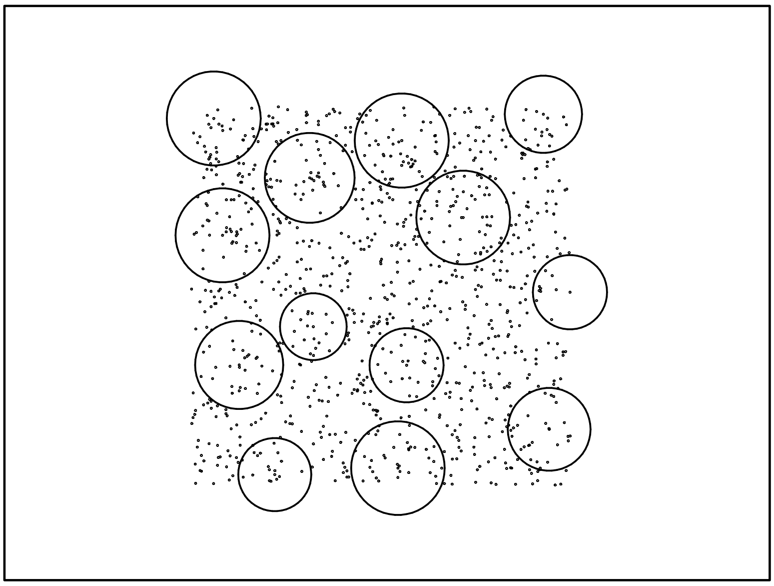

図 13: BCV の分解 (2)

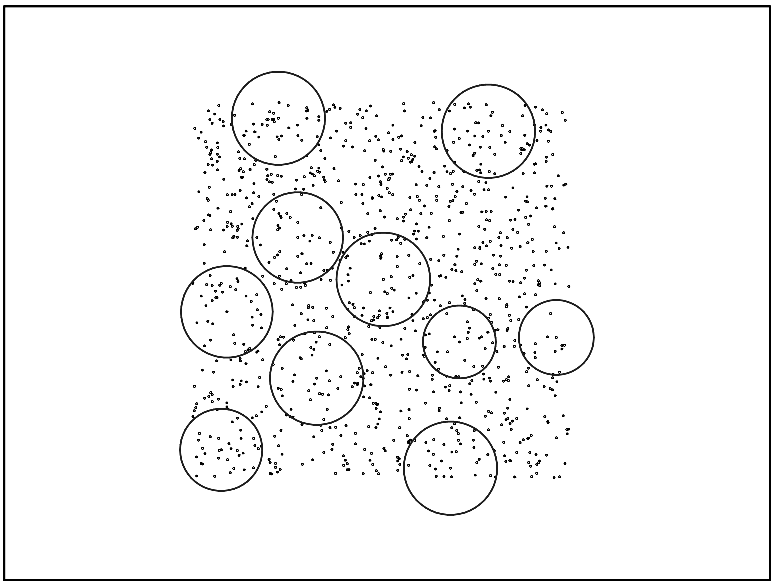

図 14: BCV の分解 (3)

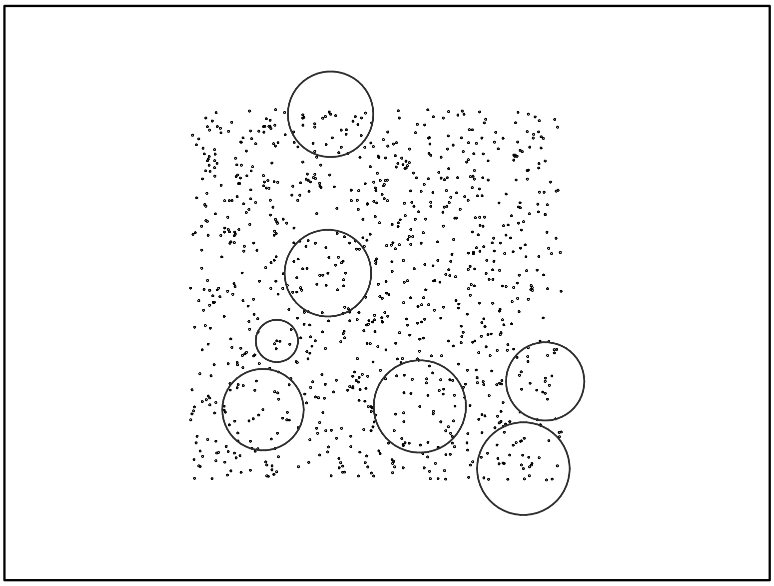

図 15: BCV の分解 (4)

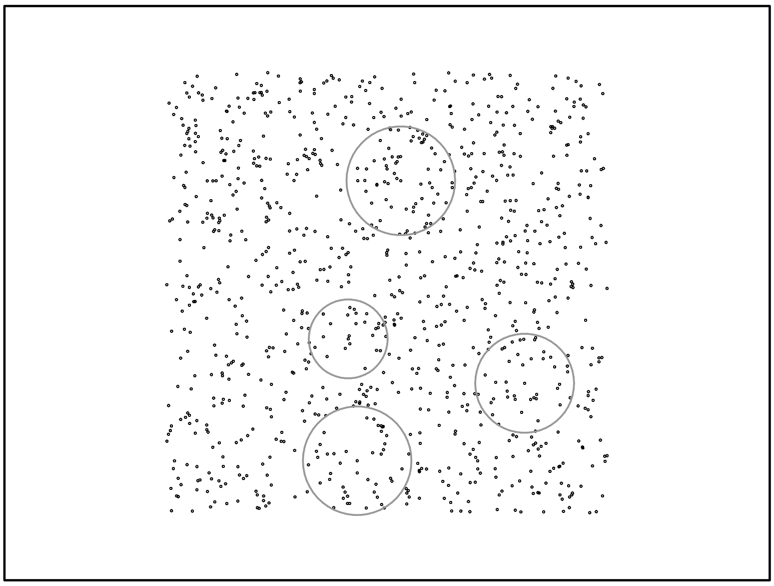

図 16: BCV の分解 (5)

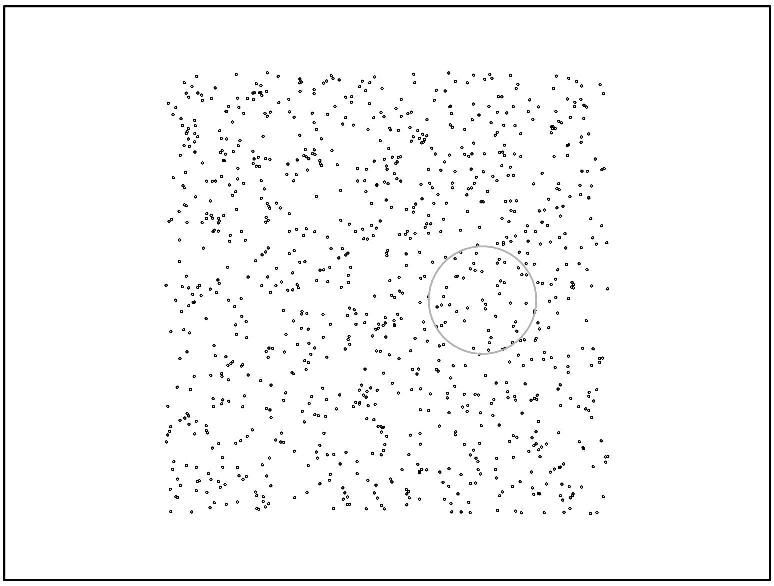

図 17: BCV の分解 (6)

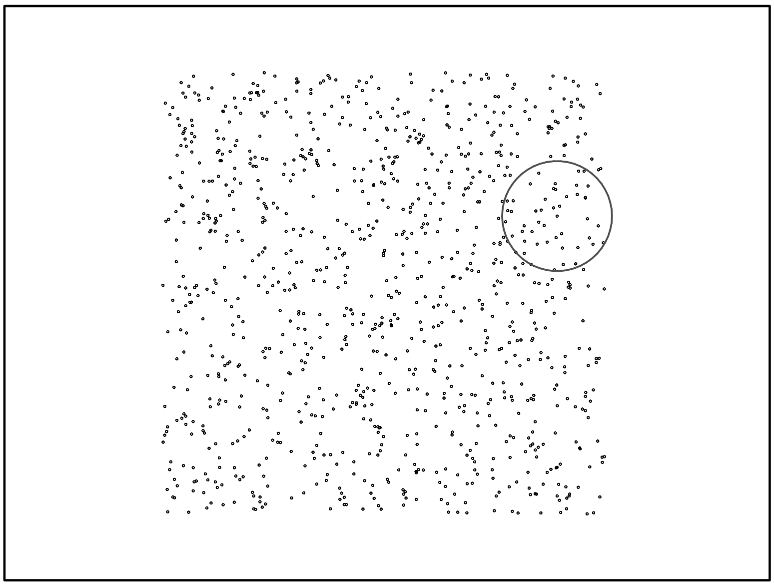

図 18: BCV の分解 (7)

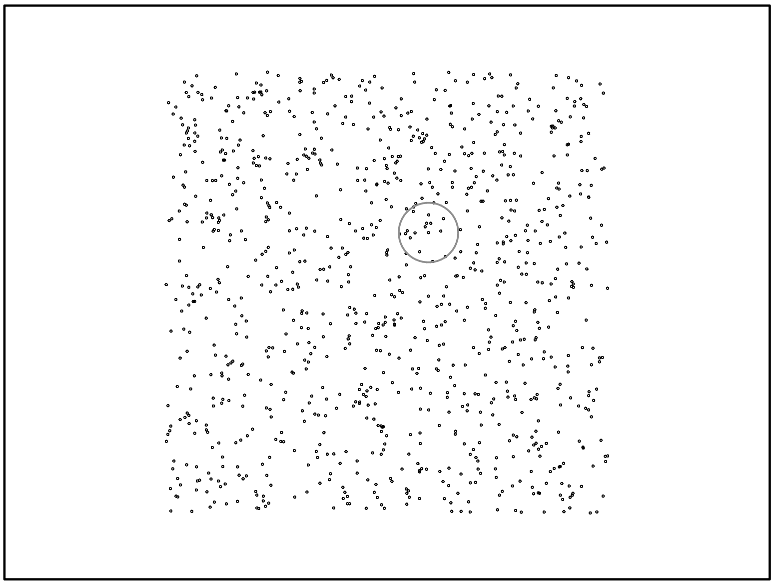

図 19: BCV の分解 (8)

例 3.1　零集合 S は外測度 $|S|^* = 0$ の集合に他ならない．

命題 3.1　$S = [c,d] \subset [a,b]$ とする．$|S|^* = d - c$ である．

実際，区間 $S = [c,d]$ はそれ自身の区間型の被覆だから $|S|^* \leq d - c$ である．他方，$|S|^*$ のそもそもの設定では，任意の $\epsilon > 0$ に対し，S の区間型の被覆 $\mathcal{I} = \{I_n\}$ を $\|\mathcal{I}\| < |S|^* + \epsilon$ を満たすようにとることができるとするだけである．$I_n = [c_n, d_n]$ とすれば，開区間 $J_n = (c_n - 2^{-n-2}\epsilon, d_n + 2^{-n-2}\epsilon)$ として $[c,d]$ の開被覆 $\mathcal{J}$ が得られる．ところが，命題 2.1 により，$\mathcal{J}$ から S の有限部分被覆 $\mathcal{J}'$ が抜き出せる．しかも，$\mathcal{J}'$ に属する各開区間に両端を加えて，S の区間型の被覆が得られる．したがって，

$$d - c \leq \sum_{J_n \in \mathcal{J}'} (d_n - c_n + 2^{-n-1}\epsilon) \leq |S|^* + \epsilon$$

である．

問 3.1　$S = (c,d) \subset [a,b]$ とする．$|S|^* = d - c$ である．

命題 3.2　$S_n \subset [a,b]$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, とする．このとき，

$$S_0 \subset S_1 \quad \text{ならば} \quad |S_0|^* \leq |S_1|^* \tag{21}$$

$$\left| \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n \right|^* \leq \sum_{n=0}^{\infty} |S_n|^* \tag{22}$$

が成り立つ．

実際，(21) については，S_1 の区間型の被覆は常に S_0 の被覆でもあるので，明らかである．一方，(22) については，各 S_n の区間型の被覆 $\mathcal{J}_n = \{J_{nm}\}$ の合併集合 $\mathcal{J} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}_n$ が添え数の整理によって，どの S_n に対しても区間型の被覆 $\mathcal{J} = \{J_k\}$ として解釈できること[50]，したがって，これらの合併集合 $\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ の区間型の被覆になることにまず注意しよう．当然，非負項の総和として

$$\|\mathcal{J}\| = \sum_{k=0}^{\infty} |J_k| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |J_{nm}| = \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{J}_n\|$$

が成り立つ．ただし，一方が発散すれば他方も発散するものとする．(22) を確かめるには，右辺が有限値に収束するとして，任意に大きな N を予め選んでおいてから，各 S_n の区間型の被覆 $\mathcal{J}_n$ を

$$\|\mathcal{J}_n\| = \sum_{m=0}^{\infty} |J_{nm}| < |S_n|^* + 2^{-N-n}$$

を満たすようにとれば，

$$\left|\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n\right|^* \leq \|\mathcal{J}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |S_n|^* + 2^{-N+1}$$

が得られる．$N \to \infty$ として，(22) が従う．

例 3.2 §1.5 で扱った Cantor 集合 $\mathcal{C}$ を考察しよう．$I = [0,1]$ とし，$S_0 = I \setminus (I_0 \cup I_2)$，$S_1 = (I_0 \cup I_2) \setminus \mathcal{C}_2$，$\cdots$，$S_n = \mathcal{C}_{n-1} \setminus \mathcal{C}_n$，$\cdots$ を作る．$S_n \cap S_m = \emptyset$, $m \neq n$, であり，しかも，

$$I \setminus \mathcal{C} = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$$

であり，

$$|I \setminus \mathcal{C}|^* = \sum_{n=0}^{\infty} |S_n|^* = 1$$

が成り立つ．実際，各 S_n は互いに交わらない長さ 3^{-n-1} の開区間 2^n 個の合併集合だから

$$|S_n|^* = \frac{2^n}{3^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

であり，したがって，$\sum_{n=0}^{\infty} |S_n|^* = 1$ である．一方，$|I \setminus \mathcal{C}|^* \leq 1$ は当然であるが，もし，$|I \setminus \mathcal{C}|^* < 1$ だとすると，$I \setminus \mathcal{C}$ の区間型の被覆 $\mathcal{J} = \{J_n\}$ で長さ $\rho = 1 - \|\mathcal{J}\| > 0$ となるものがあることになる．このとき，

$$I \setminus \mathcal{C} \subset J = \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n \subset I$$

[50] 脚注 36 の対応 ι によって，$J_{\iota(n,m)} = J_{nm}$ とすればよい．

であり，したがって，$I \setminus J \subset \mathcal{C}$ とならなければならない．ところで，どの $x \in I \setminus J$ に対しても $(-r+x, r+x) \cap J = \emptyset$ となるような $r > 0$ が選べないとすると，各区間 J_n を $2^{-n-2}\rho$ だけ拡大して得られる $I \setminus \mathcal{C}$ の区間型の被覆は，同時に $[0,1]$ の被覆にもなるはずだから，$1 \leq 1 - \frac{1}{2}\rho < 1$ となって，不合理である．したがって，$(c,d) \subset I \setminus J$, $c \neq d$, をみたす小区間があるはずで，特に，$(c,d) \subset \mathcal{C}$，すなわち，$0 < d - c \leq |\mathcal{C}|^* = 0$ となることになるが，これも不合理である．

さて，有界区間 $[a,b]$ の部分集合 S に対し，$b - a - |[a,b] \setminus S|^*$ を S の内測度といい，$|S|_*$ とかく．$[a,b] = S \cup ([a,b] \setminus S)$ だから，$b - a \leq |S|^* + |[a,b] \setminus S|^*$，したがって，$|S|^* \geq |S|_*$ が常に成り立つ．

補題 3.1　$S \subset [a,b]$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対し，開集合 $O_\epsilon \supset S$ を $|O_\epsilon|^* \leq |S|^* + \epsilon$ を満足するようにとることができる．また，閉集合 $F_\epsilon \subset S$ を $|F_\epsilon|_* \geq |S|_* - \epsilon$ を満たすようにとることができる．

注意 3.1　開集合とは何であったか（念のために復習しておこう）．$O \subset \mathbb{R}$ が（$\mathbb{R}$ の）開集合であるとは，すなわち，$x \in O$ であるための条件が x を含む適当な開区間 I_x が O の部分集合になる，つまり，$(x - \epsilon, x + \epsilon') \subset O$ となるような $\epsilon, \epsilon' > 0$ が（x に応じて）選べるということである．このことを確認しておくことが開集合に関する演算を行なう上で重要である[51]．特に，開区間は開集合である．また，閉集合は，開集合の補集合として定義される．

集合 S は S の外測度と内測度が一致するとき，すなわち，

$$|S|^* + |[a,b] \setminus S|^* = b - a$$

を満足するとき，可測であるといわれる．このとき，さらに，$S \subset [a,b] \cap [a',b']$ ならば，

$$|S|^* + |[a',b'] \setminus S|^* = b' - a'$$

でもある．そこで，S が可測集合のとき，その外測度 $|S|^*$ を S の（Lebesgue）測度といい，単に $|S|$ とかく[52]．集合 S が可測であることは，同時に，その補集合 $[a,b] \setminus S$ が可測であることを意味する．外測度は区間型の被覆の長さという数値がなす無限集合の下限として定義されるものであり，しかも，被覆については区間型という限定しかないのだから，ある集合が可測集合であるかどうかの判定は決して自明ではない．

---

[51] 例えば，

$$\text{全直線 } \mathbb{R} \text{ も 空集合 } \emptyset \text{ も開集合である．}$$

また，

$$O_1,\ O_2 \quad \text{が開集合ならば} \quad O_1 \cap O_2 \quad \text{も開集合であり，}$$
$$O_\alpha,\ \alpha \in A\ \text{（添え数集合），} \quad \text{が開集合の族ならば} \quad \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \quad \text{も開集合である}$$

ことが（上の定義から）確かめられる．

[52] 文献によって，S の測度を $m(S)$, $\mu(S)$ などとかく．

例 3.3 任意の有界区間は可測である．また，Cantor 集合 $\mathcal{C}$ は可測である．

補題 3.2 S_1, $S_2 \subset [a,b]$ は可測であって，しかも，$S_1 \cap S_2 = \emptyset$ とする．このとき，$S_1 \cup S_2$ も可測であって，$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2|$ が成り立つ[53]．

命題 3.3

1. S_1, $S_2 \subset [a,b]$ が可測であって，$S_1 \subset S_2$ ならば，$|S_1| \leq |S_2|$ である．

2. S_1, $S_2 \subset [a,b]$ が可測ならば，$S_1 \cap S_2$，$S_1 \cup S_2$，$S_1 \setminus S_2$ も可測である．

命題 3.4

1. $S_n \subset [a,b]$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ のおのおのが可測ならば，$\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ も可測である．

2. 特に，$S_n \cap S_m = \emptyset$, $m \neq n$, が成り立つときは，

$$|\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |S_n|$$

が成り立つ．

問 3.2 $S_n \subset [a,b]$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, が（集合の包含関係に関して）単調非減少，すなわち，$S_n \subset S_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, を満たしているとする．このとき，$S_0' = S_0$, $S_n' = S_n \setminus S_{n-1}$, $n \geq 1$，とおくと，$S_m' \cap S_n' = \emptyset$, $n \neq m$, であり，かつ，

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n'$$

が成り立つ．

問 3.3 $S_n \subset [a,b]$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, は（集合の包含関係に関して）単調非減少な可測集合の列とし，$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ とする．このとき，

$$|S| = \lim_{n \to \infty} |S_n|$$

である．

3.2 可測関数

区間 $I = [a,b]$ の分割は，既述のように，$\tau_0 = a < \tau_1 < \cdots < \tau_N = b$ を満たすような分点の集合 $\{\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_N\}$，あるいは，数列 τ_0, τ_1, $\cdots$, τ_N で与

[53] $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ のとき，$S_1 \cup S_2$ を特に $S_1 + S_2$ と表すことがある．

えられる[54]．このとき，区間 I における階段関数とは，$w_1, \cdots, w_N$ を定数として，

$$s(t) = w_i,\ \tau_{i-1} \leq t < \tau_i, \quad i = 1, \cdots, N \tag{23}$$

と表される関数である[55]．

注意 3.2　階段関数 (23) を，分割を表す分点列 $\tau = (\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_N)$ と関数値の列 $w = (w_1, \cdots, w_N)$ によって，$s(t) = \mathrm{kaidan}(t, \tau, w)$ と表すことができる．

階段関数は Riemann 積分可能であり，したがって，その積分を Riemann 積分として定義できる：

$$\int_I s(t)\,dt = \sum_{i=1}^{N} w_i\,(\tau_i - \tau_{i-1}). \tag{24}$$

ここで，不連続点 τ_i での関数値が w_i であろうと w_{i+1} であろうと積分の結果は変わらないことに注意しよう．

さて，階段関数によって近似できる関数を規定しよう．$f(t)$ を区間 I で定義された関数とする．これに対し，階段関数の列 $s_n(t) = \mathrm{kaidan}(t, \tau_n, w_n)$, $n = 1, 2, \cdots$, が見出され，各 $f(t)$ が $s_n(t)$ の極限（値）になることを可能な限り寛大な条件下で期待したい．そこで，$s_n(t)$ が収束しないか，収束しても $f(t)$ には収束しないというような例外的な $t \in I$ の集合，すなわち，

$$e = I \setminus \{\, t \in I\,;\, \lim_{n\to\infty} s_n(t) = f(t) \,\}$$

が零集合となるような関数を以後扱うことにする．このような関数を可測関数という．これは，やや積極的な表現では，

$$\lim_{n\to\infty} s_n(t) = f(t), \quad t \in I \setminus e, \quad |e| = 0$$

となる．このことを（いちいち例外集合 e に言及せずに）階段関数列 $s_n(t)$ がほとんどいたるところで $f(t)$ に収束するといい，$s_n(t) \to f(t)$, *a.e.* と一般に表す．

例 3.4　階段関数は可測関数である．

例 3.5　$f(t) = \log(1+t)$ は（区間 $[0, 1]$ 上の）可測関数である．実際，$[0, 1]$ の分割 $\tau = (\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n)$ に対し，値の列を

$$w = \left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{1}{1+x}\,dx, \cdots, \int_{\tau_0}^{\tau_N} \frac{1}{1+x}\,dx \right)$$

---

[54] 溝畑に従えば，しかし，I の閉部分区間の列 $I_i = [\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, \cdots, N$, ということになる．開区間 (τ_{i-1}, τ_i) は I_i の内部といわれ，$\overset{o}{I_i}$ とかかれる．I の閉部分区間の列 $I_1, \cdots, I_N$ で分割を表すときは，$\bigcup_{i=1}^{N} I_i = I$ および $\overset{o}{I_i} \cap \overset{o}{I_j} = \emptyset$, $i \neq j$, を満たすことを要求することになる．溝畑は，このとき，$I = I_1 \dotplus \cdots \dotplus I_N$ とかく．

[55] §1.3 に掲げたものと記号や添え数の付け方が違っている．

として，階段関数 $\mathrm{kaidan}(t, \tau, w)$ を定めれば，この形の階段関数の列はすべての t で $\log(1+t)$ に収束する．したがって，収束しないような t の集合は空である．しかも，収束は $t \in [0,1]$ に関して一様であるが，可測関数であることの検証にはそこまで注意する必要はない．

問 3.4　連続関数は可測関数である．

命題 3.5　Riemann 積分可能な関数は可測関数である．

関数に対する四則演算に関して可測関数という概念は安定である．

命題 3.6　$f_1(t)$, $f_2(t)$ は可測関数とし，α, β を実数とする．1 次結合 $f(t) = \alpha\, f_1(t) + \beta\, f_2(t)$ は可測関数である．また，積 $g(t) = f_1(t)\, f_2(t)$ も可測関数である．さらに，$f_2(t) \neq 0$ ならば，商 $h(t) = f_1(t)/f_2(t)$ も可測関数である．

一般に，集合 $S \subset I$ の特性関数とは

$$c_S(t) = \begin{cases} 1, & t \in S \\ 0, & t \notin S \end{cases}$$

で与えられる関数を指す．S の補集合 $I \setminus S$ の特性関数は

$$c_{I \setminus S}(t) = 1 - c_S(t), \quad t \in I,$$

を満足する．なお，空集合の特性関数は $c_\emptyset(t) \equiv 0$ であり，区間全体 I の特性関数は $c_I(t) \equiv 1$ である．

注意 3.3　区間 $J = [c, d] \subset I$ の特性関数は

$$c_J(t) = \begin{cases} 1, & c \leq t \leq d \\ 0, & t < c \text{ または } t > d \end{cases}$$

である．一方，$\overset{o}{J} = (c, d)$ の特性関数は

$$c_{\overset{o}{J}}(t) = \begin{cases} 1, & c < t < d \\ 0, & t \leq c \text{ または } t \geq d \end{cases}$$

である．

問 3.5　集合 $S_1, S_2 \subset I$ の特性関数を $c_{S_1}(t), c_{S_2}(t)$ とする．包含関係 $S_1 \subset S_2$ と大小関係 $c_{S_1}(t) \leq c_{S_2}(t)$ は同値である．

問 3.6　集合 $S_1, S_2 \subset I$ の特性関数 $c_{S_1}(t), c_{S_2}(t)$ とする．共通部分 $\underline{S} = S_1 \cap S_2$ の特性関数は $c_{\underline{S}}(t) = c_{S_1}(t)\, c_{S_2}(t)$ である．また，合併集合 $\overline{S} = S_1 \cup S_2$ の特性関数は $c_{\overline{S}}(t) = c_{S_1}(t) + c_{S_2}(t) - c_{\underline{S}}(t)$ である．

問 3.7　階段関数 $\mathrm{kaidan}(t, \tau, w)$ を特性関数の 1 次結合の形に表せ．

命題 3.7　$S \subset I$ が可測集合であるための必要十分条件は，その特性関数 $c_S(t)$ が可測関数であることである．

この命題の要点は，集合 S の区間型の被覆を階段関数の収束に書き換えることである．

可測関数は階段関数列の（ほとんどいたるところの）極限として得られる関数として定義された．階段関数は，それ自体，可測関数である．それでは，可測関数列が「収束」するとき，その極限の関数は可測関数になるだろうか．

命題 3.8　$f_n(t), n = 1, 2, \cdots,$ は，区間 I 上の可測関数の列とする．例外集合 $e \subset I$ の外の t に対し，$f_n(t)$ は収束するとし，その極限値を $f(t)$ とする：

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t), \quad t \notin e.$$

このとき，$f(t) = 0, t \in e,$ と定義して，$f(t)$ を I 上に拡張することができる．e が零集合ならば，$f(t)$ は可測関数である．

すなわち，可測関数列がほとんどいたるところで収束するならば，その極限関数は可測関数である．つまり，可測関数という概念は，無視できる例外集合を除いて，極限操作に対して安定なのである．

なお，この命題の証明は §3.5 で行なう．

3.3 可測関数の性質若干

命題 3.9　$g(t)$ を区間 $[a, b]$ 上の可測関数，$F(x)$ を直線上の連続関数とする．合成関数 $h(t) = F(g(t))$ は $[a, b]$ 上の可測関数である．

[証明]　$s_n(t) = \mathrm{kaidan}(t, \tau^n, w^n)$ を（分点列 τ^n，値の列 w^n の階段関数からなる関数列であって，$\lim_{n\to\infty} s_n(t) = g(t)$，$t \notin e,$ が成り立っているとする．ただし，e は零集合である．ところが，$h_n(t) = F(s_n(t))$ は階段関数である（下の問 3.8）．一方，$F(x)$ は連続だから，$t \notin e$ ならば，$\lim_{n\to\infty} h_n(t) = h(t)$ である．　[証明終]

問 3.8　直線上の連続関数 $F(x)$ と階段関数 $s(t) = \mathrm{kaidan}(t, \tau, w)$ の合成関数 $f(t) = F(s(t))$ は階段関数である．ただし，$\tau = (\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_N)$ は区間 $[a, b]$ の分点列，$w = (w_1, \cdots, w_N)$ は値の列である[56]．

問 3.9　$f(t)$ が区間 $[a, b]$ 上の可測関数ならば $|f(t)|$ も可測関数である．

---

[56] $Fw = (F(w_1), \cdots, F(w_N))$ を値の列として，$f(t) = \mathrm{kaidan}(t, \tau, Fw)$ となる．

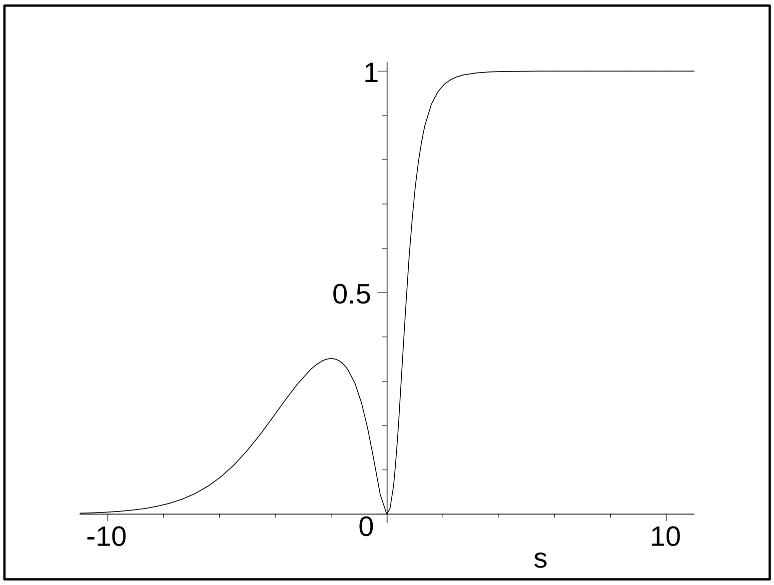

図 20: $\phi(s)$ のグラフ

溝畑にならって，連続関数

$$\phi(s) = \frac{s^2\, e^s}{1 + s^2\, e^s}$$

を考える[57]．

命題 3.10　$f(t)$ は区間 $I = [a, b]$ 上の可測関数とする．任意の実数 α に対し，集合 $S_\alpha = \{t \in I\,;\, f(t) > \alpha\}$ は可測集合である．

$n = 1, 2, \cdots$ に対し，$F_n(t) = \phi(n(f(t) - \alpha))$ とおく．各 $F_n(t)$ は可測関数である．一方，

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \begin{cases} 1, & f(t) > \alpha \\ 0, & f(t) \le \alpha \end{cases}$$

である．この右辺は集合 S_α の特性関数に他ならない．すなわち，S_α は可測集合である．

問 3.10　$f(t)$ は区間 $I = [a, b]$ 上の可測関数とする．任意の β に対し，集合 $\{\, t \in I\,;\, f(t) \le \beta\,\}$ は可測集合である．

問 3.11　$f(t)$ を区間 $I = [a, b]$ 上の可測関数とする．$n = 1, 2, \cdots$，および $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ に対し，集合

$$S_{nk} = \{\, t \in I\,;\, \frac{k-1}{n} < f(t) \le \frac{k}{n}\,\}$$

[57]以下の議論では，$\phi(0) = 0$，$\lim_{s\to-\infty} \phi(s) = 0$，$\lim_{s\to\infty} \phi(s) = 1$ を満たせば十分である．

の特性関数を $c_{nk}(t)$ とおく．各 n に対し，

$$f_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k-1}{n} c_{nk}(t)$$

は可測関数である[58]．

問 3.12　$f_n(t)$ を問 3.11 の関数とする．$n \to \infty$ のときほとんどいたるところで $f_n(t) \to f(t)$ が成り立つ[59]．

命題 3.10 によって，可測関数の概念を階段関数を経由せずに定義することができる．実際，問 3.11，3.12 にはそのような意義があることは少しの内省で了解できるであろう．

ここで我々が行なっているような直線の上の議論では，いくら抽象度が高くても，数学的実体としては「具体的な」ものを対象にしているので，いろいろな側面から扱うことができる．可測関数も，この意味では直線の上では具体的な数学的実体なのである．数学的にさらに（！）抽象的な環境では，直線の場合には同じに見えるはずのものが分離されたり，あるいは意味をなさなくなったりするのである．したがって，直線上の「具体的な」場合をできる限り多くの側面から分析しておくことが重要である．

なお，可測関数には「ほとんどいたるところ」という符牒が付いてまわるように，零集合上で関数がとるかもしれない値は重要ではない．

例 3.6　区間 $[a,b]$ 上の可測関数 $f(x)$ が定数（関数）である，というときは，ある定数 c に対し，集合 $\{ x\,;\, a \le x \le b,\, f(x) \neq c \}$ が零集合であるということである．

問 3.13　区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ が可測関数として定数である，つまり，ほとんどいたるところで，ある定数と一致するならば，$f(x)$ は恒等的に定数である[60]．

3.4　測度的収束

やや論理的には前後するが，区間 $I=[a,b]$ 上の関数列 $\{f_n(t)\}$ と関数 $f(t)$ の関係について，$\epsilon > 0$ を収束の精度を表す量として採る心積もりで，集合

$$S_n(\epsilon) = \{ t \in I\,;\, |f_n(t) - f(t)| \ge \epsilon \}$$

[58] $\alpha \in \mathbb{R}$ にたいし，

$$f_n(t) > \alpha \iff t \in S_{nk},\ k \ge [n\alpha] + 2,$$

である．ただし，$[n\alpha]$ は Gauss の記号，すなわち，$n\alpha$ を超えない最大整数とする．

[59] 例えば，$S_{nk} = S_{pn,pk-p+1} \cup \cdots \cup S_{pn,pk}$, $p = 2,3,\cdots$, に注意せよ．したがって，$f_n(t) \le f_{pn}(t)$ である．

[60] ヒント： 連続な $f(x)$ と定数 c に対し，集合 $\{x\,;\, f(x) \neq c\}$ は，空集合でない限り，零集合にならない．

の外測度 $|S_n(\epsilon)|^*$ を取り上げよう．もとより，$f_n(t)$ も $f(t)$ も可測関数であれば，外測度を測度 $|S_n(\epsilon)|$ で置き換えることができる．特に，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$n \to \infty$ のとき，$|S_n(\epsilon)|^* \to 0$ が成り立つならば，$f_n(t)$ は $f(t)$ に測度収束するという．

例 3.7　$f_n(t) = \exp(-n \sin \pi t)$ および $f(t) \equiv 0$ の場合を考える．$\epsilon > 0$ に対し，

$$|S_n(\epsilon)| = \frac{2}{\pi} \arcsin(\frac{1}{n} \log \frac{1}{\epsilon})$$

であることは容易にわかる．したがって，$f_n(t)$ は $f(t) \equiv 0$ に測度収束している（例 1.3 参照）．

問 3.14　$f(t), g(t)$ は区間 I 上の関数とし，$h(t) = f(t)+g(t)$ とする．$\epsilon > 0$ に対し，$S_f(\epsilon) = \{ t\,;\, |f(t)| \geq \epsilon \}$ とおく．$S_g(\epsilon), S_h(\epsilon)$ も同様に定義する．このとき，

$$|S_h(\epsilon)|^* \leq |S_f(\frac{\epsilon}{2})|^* + |S_g(\frac{\epsilon}{2})|^*$$

が成り立つ[61]．

問 3.15　$f(t), f_n(t)$ を問 3.11，3.12 のものとする．対応する $S_n(\epsilon)$ を求め，$|S_n(\epsilon)|$ の $n \to \infty$ のときの挙動を調べよ．

可測関数列に対しては測度収束を考えるのがもっとも自然である[62]．

命題 3.11　$\{f_n(t)\}$ は区間 $I = [a, b]$ 上の可測関数列とし，$f(t)$ は I 上の可測関数とする．$n \to \infty$ のとき，$f_n(t)$ が $f(t)$ にほとんどいたるところ収束するならば，$f_n(t)$ は $f(t)$ に測度収束する．逆に，$f_n(t)$ が $f(t)$ に測度収束するならば $\{f_n(t)\}$ のある部分列 $\{f_{n'}(t)\}$ があって，$f_{n'}(t)$ がほとんどいたるところ $f(t)$ に収束する．

この命題とつぎの命題の証明は §3.5 で行なう．
また，測度収束はつぎのような意味で「完備」である．

命題 3.12　区間 I 上の可測関数列 $\{f_n(t)\}$ が，任意の $\epsilon > 0$ に対して，集合

$$S_{nm}(\epsilon) = \{ t\,;\, |f_n(t) - f_m(t)| \geq \epsilon \}$$

の測度 $|S_{nm}(\epsilon)|$ について

$$\lim_{m,n \to \infty} |S_{nm}(\epsilon)| = 0$$

を満たすとする．このとき，I 上の可測関数 $f(t)$ が定まって $f_n(t)$ は $f(t)$ に測度収束する．

[61] $S_h(\epsilon) \subset S_f(\frac{\epsilon}{2}) \cup S_g(\frac{\epsilon}{2})$ を示せ．
[62] 問 3.11，3.15 は次の命題の特別な場合になっている．

例 3.8　区間 $I=[-1,1]$ 上の可測関数列

$$f_n(t)=\begin{cases} \sin\frac{1}{t}, & 2^{-n}\le |t|\le 1 \\ 0, & |t|<2^{-n} \end{cases}, \quad n=1,2,3,\cdots$$

は，$n>m\ge 1$ に対し，

$$f_n(t)-f_m(t)=\begin{cases} \sin\frac{1}{t}, & 2^{-n}\le |t|<2^{-m} \\ 0, & \text{その他の } t \end{cases}$$

を満たす．したがって，任意の $\epsilon>0$ に対し

$$|S_{nm}(\epsilon)|<2^{-m+1}-2^{-n+1}\to 0, \quad n,m\to\infty$$

となる．$f_n(t)$ は

$$f(t)=\begin{cases} \sin\frac{1}{t}, & 0<|t|\le 1 \\ 0, & t=0 \end{cases}$$

に測度収束する．

問 3.16　$\{f_n(t)\}$ の測度収束による極限関数はせいぜい 1 個しかないことを示せ[63]．

3.5　命題 3.4 再説

命題 3.8，命題 3.11，命題 3.12 の検証のための基本的なアイデアは実は命題 3.4 であり，次の補題に集約される．

補題 3.3　区間 $I=[a,b]$ に含まれる集合列 $J_n,\ n=1,2,\cdots,$ は

$$J_n=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{nk}, \quad I_{nk}=[a_{nk},b_{nk}], \quad a\le a_{nk}<b_{nk}\le b, \quad n=1,2,\cdots,$$

$$J_1\supset J_2\supset\cdots\supset\cdots$$

をみたし[64]，かつ，これらの共通部分 $e=\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ は零集合であるとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}|J_n|=0$$

が成り立つ．

[63] $f(t)$ に加えて，$g(t)$ も極限関数とする．任意の $\epsilon>0$ に対し，

$$\{t\,;\,|f(t)-g(t)|>2\epsilon\}\subset\{t\,;\,|f(t)-f_n(t)|>\epsilon\}\cup\{t\,;\,|f_n(t)-g(t)|>\epsilon\}$$

となることに注意すれば，左辺は零集合とわかる．

[64] ここで，$a_{nk},\,b_{nk}$ という表現にはさほどの意味はない．J_n のおのおのがせいぜい可算個の区間 I_{nk} の合併集合であることが重要なのである．また，I_{nk} が閉区間でなければならない理由もない．

各 J_n が可測集合であることは明らかであろう．各 J_n が有限個の区間の合併である場合は考えやすい．

$$I = (I \setminus J_1) \cup (J_1 \setminus J_2) \cup \cdots (J_{n-1} \setminus J_n) \cup J_n$$

であり，しかも，右辺の成分として現れる集合はいずれも可測で，どのような二個の組み合わせでも共通部分は空集合である．したがって，任意の n に対し，

$$|I| = |I \setminus J_1| + |J_1 \setminus J_2| + \cdots + |J_{n-1} \setminus J_n| + |J_n|$$

となる．ゆえに，

$$\sum_{k=1}^{\infty} |J_k \setminus J_{k+1}| \leq |I| < +\infty$$

である．一方，

$$J_n = (J_n \setminus J_{n+1}) \cup (J_{n+1} \setminus J_{n+2}) \cup \cdots \cup e$$

であり，右辺に現れる集合の共通部分はどの二個の組み合わせついても空集合である．したがって，

$$|J_n| = \sum_{k=n}^{\infty} |J_k \setminus J_{k+1}| \to 0, \quad n \to \infty,$$

となる．

問 3.17　$J = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ は区間の合併集合とする．

$$J = \bigcup_{k=1}^{\infty} I'_k, \quad I'_k = I_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} I_j,$$

と表される．各 I'_k は有限個の互いに交わらない（閉，開または半開）区間の合併である．しかも，$I'_k \cap I'_\ell = \emptyset, k \neq \ell$，である．

問 3.18　問 3.17 の J は互いに交わらない（閉，開または半開）区間 I''_k で互いに交わらないものの合併集合

$$J = \bigcup_{k=1}^{\infty} I''_k, \quad I''_k \cap I''_\ell = \emptyset, \quad k \neq \ell,$$

として表される[65]．

問 3.19　問 3.17 の J は，任意に指定された（許容）誤差 $\epsilon > 0$ で，有限個の区間の合併集合 $J_\epsilon \subset J$ で近似される[66]：$|J \setminus J_\epsilon| \leq \epsilon$.

[65] 問 3.17 の I'_k は互いに交わらない有限個の区間の合併集合となることに注意せよ．

[66] 問 3.18 より，$\sum_{k=1}^{\infty} |I''_k| = |J| < +\infty$ である．したがって，$\lim_{N\to\infty} \sum_{k\geq N}^{\infty} |I''_k| = 0$ である．特に，N を十分に大きくとれば，$\sum_{k\geq N+1}^{\infty} |I''_k| \leq \epsilon$ となる．$J_\epsilon = \bigcup_{k=1}^{N} I''_k$ とすればよい．

補題 3.3 に戻ろう．問 3.19 の意味することは，任意の $\eta > 0$ に対し，各 J_n を有限個の区間の合併集合 $J_{n,\eta} \subset J_n$ によって，誤差 $2^{-n}\,\eta$ で近似できるということである：

$$J_n = J_{n,\eta} \cup e_{n,\eta}, \quad e_{n,\eta} = J_n \setminus J_{n,\eta}, \quad |e_{n,\eta}| < \frac{\eta}{2^n}.$$

そこで，

$$J'_{1,\eta} = J_{1,\eta},\ J'_{2,\eta} = J_{2,\eta} \cap J'_{1,\eta},\ J'_{3,\eta} = J_{3,\eta} \cap J'_{2,\eta},\\ \cdots,\ J'_{n,\eta} = J_{n,\eta} \cap J'_{n-1,\eta},\ \cdots$$

とおくと，

$$J'_{1,\eta} \supset J'_{2,\eta} \supset \cdots \supset J'_{n,\eta} \supset \cdots$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J'_{n,\eta} \subset e$$

が成り立つ．したがって，すでに述べたことから，$\lim_{n\to\infty} |J'_{n,\eta}| = 0$ である．一方，$J_1 = J'_{1,\eta} \cup e'_{1,\eta},\ e'_{1,\eta} = e_{1,\eta}$ であり，これから

$$J_2 = J'_{2,\eta} \cup e'_{2,\eta}, \quad e'_{2,\eta} = (J_{2,\eta} \setminus J_{1,\eta}) \cup e_{2,\eta} \subset e'_{1,\eta} \cup e_{2,\eta}$$

が従う．実際，$J_{2,\eta} \subset J_2 \subset J_1$ である．一般に，

$$J_n = J'_{n,\eta} \cup e'_{n,\eta}, \quad e'_{n,\eta} \subset e'_{n-1,\eta} \cup e_{n,\eta} \tag{25}$$

と表される．

問 3.20　(25) を確かめよ[67]．

したがって，

$$e'_{n,\eta} \subset \bigcup_{j=1}^{n} e_{j,\eta}, \quad \text{すなわち} \quad |e'_{n,\eta}| < \frac{\eta}{2}$$

である．さて，

$$|J_n| = |J'_{n,\eta} \cup e'_{n,\eta}| \le |J'_{n,\eta}| + |e'_{n,\eta}|$$

だから，$|J'_{n,\eta}| < \frac{1}{2}\eta$ が成り立つ程度に n が十分大きければ $|J_n| < \eta$ となる．$\eta > 0$ は，もともと任意に指定できたのだから，補題 3.3 が確かめられたことになる．

例 3.9　区間 $I = [a, b]$ 上の階段関数列 $\{s_n(t) = \mathrm{kaidan}(t, \tau^n, w^n)\}$ が関数 $f(t)$ にほとんどいたるところ収束しているとする．分点における $s_n(t)$ の値を 0 に置き換えて

$$\underline{s}_n(t) = \begin{cases} s_n(t), & t \ne \tau_k^n \\ 0, & t = \tau_k^n \end{cases}$$

[67] n に関する帰納法による．$e'_{n,\eta} = (J_{n,\eta} \setminus J'_{n-1,\eta}) \cup e_{n,\eta}$ である．

としても，$\underline{s}_n(t)$ はほとんどいたるところ $f(t)$ に収束する．$\epsilon > 0$ を任意に指定し，$n = 1, 2, \cdots$ に対し，

$$J_n = \bigcup_{p,\,q \geq n} \{\, t \in [a,b]\,;\, |\underline{s}_p(t) - \underline{s}_q(t)| \geq \epsilon \,\}$$

とおく．J_n は補題 3.3 の仮定を満たす．確かめなければならないのは

$$e = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$$

が零集合になることである．ところが，$t \in e$ ならば，すべての p, q に対し，$|\underline{s}_p(t) - \underline{s}_q(t)| \geq \epsilon$ だから，特に，$\underline{s}_n(t)$ は $n \to \infty$ のとき $f(t)$ には収束しない．したがって，e は零集合でなければならない．

問 3.21

$$|J_n| = \left| \bigcup_{p,\,q \geq n} \{\, t \in [a,b] \ \ |s_p(t) - s_q(t)| \geq \epsilon \,\} \right|$$

を示せ．

補題 3.4　例 3.9 において，階段関数 $s_n(t)$ は可測関数 $f(t)$ に測度収束する．

実際，定義により $f(t)$ は可測である．$e_0 = \{\, t\,;\, \underline{s}_n(t)$ は $f(t)$ に収束しない $\}$ とすると，e_0 は零集合である．さらに，$t \notin e_0$ かつ $t \notin J_n$ ならば

$$p \geq n \quad \text{ならば} \quad |\underline{s}_n(t) - \underline{s}_p(t)| < \epsilon$$

である．特に，$p \to \infty$ とすると，$|\underline{s}_n(t) - f(t)| \leq \epsilon < 2\epsilon$ となる．ゆえに，

$$\{\, t\,;\, |\underline{s}_n(t) - f(t)| \geq 2\epsilon \,\} \subset J_n \cup e_0$$

が導かれる．

以上から，命題 3.8 および命題 3.11 の前半は容易に従う．

実際，各 $f_n(t)$ にほとんどいたるところで収束する階段関数の列 $s_{nk}(t)$ がある．したがって，補題 3.4 により，$\epsilon_n > 0, \eta_n > 0$ に対し，k を十分に大きくとれば，例えば，特に，κ_n を (ϵ_n, η_n に応じて決まる）適当な自然数（のしきい値）を選んで，$k \geq \kappa_n$ のとき，

$$e_{nk} = \{\, t\,;\, |f_n(t) - s_{nk}(t)| \geq \epsilon_n \} \quad \Longrightarrow \quad |e_{nk}| < \eta_n$$

を満足させることができる．$s_n(t) = s_{n\kappa_n}(t)$ とおこう．η_n を予め $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n < +\infty$ が満足されるものとしておけば，集合

$$\underline{e} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=i}^{\infty} e_{n\kappa_n} \tag{26}$$

は零集合になる．

問 3.22　(26) の集合 $\underline{e}$ が零集合になることを確かめよ[68].

さて，$t \notin \underline{e}$ ならば，十分大きな n に対し，

$$|f_n(t) - s_n(t)| \leq \epsilon_n$$

が成り立つ．ところで，命題 3.8 で，$f_n(t)$ が $f(t)$ に収束しないような t の集合 e は零集合であった．したがって，$\underline{e} \cup e$ も零集合であり，$t \notin \underline{e} \cup e$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} s_n(t) = f(t)$$

が成り立つ．すなわち，$f(t)$ は階段関数列 $s_n(t)$ のほとんどいたるところの極限関数として可測関数であり，命題 3.8 が証明されたことになる．また，特に，補題 3.4 から，$s_n(t)$ は $f(t)$ に測度収束していることもわかる．したがって，$\epsilon > 0, \eta > 0$ に対し，n を大きくして（$n \geq \nu$),

$$|\{\, t\,; |f(t) - s_n(t)| \geq \frac{1}{2}\epsilon \,\}| < \frac{1}{2}\eta$$

を実現できる．さらに，$n \geq \nu$ を $\epsilon_n < \frac{1}{2}\epsilon$, $\eta_n < \frac{1}{2}\eta$ を満たすように選んでおけば，$n \geq \nu$ のとき，

$$|\{\, t \;\; |f(t) - f_n(t)| \geq \epsilon \,\}| < \eta$$

が成り立つ[69]．すなわち，$f_n(t)$ は $f(t)$ に測度収束する．

命題 3.11，命題 3.12 は，Lebesgue 積分論を応用して，関数空間を定義し，それらを Banach 空間や Hilbert 空間として扱う上でも重要である．

命題 3.11 を確かめよう．$f_n(t)$ が $f(t)$ に測度収束することは任意の $\epsilon > 0, \eta > 0$ に対し，番号 $\nu(\epsilon,\eta) \in \mathbb{N}$ が定まって $n \geq \nu(\epsilon,\eta)$ ならば

$$e_n(\epsilon) = \{\, t\,; |f_n(t) - f(t)| \geq \epsilon \,\} \quad \Longrightarrow \quad |e_n(\epsilon)| < \eta$$

が成り立つことであった．$n_k = \nu(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k})$ としよう．$n_1 < n_2 < \cdots$ と仮定してよい．

$$\underline{e} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} \underline{e}_k \quad ただし， \quad \underline{e}_k = e_{n_k}(2^{-n_k}),$$

とおくと，$\underline{e}$ は零集合である．さらに，$t \notin \underline{e}$ ならば $f_{n_k}(t)$ は $f(t)$ に収束する．

[68]任意の i に対し，

$$|\underline{e}| \leq \left| \bigcup_{n=i}^{\infty} e_{n\kappa_n} \right| \leq \sum_{n=i}^{\infty} \eta_n \to 0, \quad i \to \infty,$$

である．

[69]問 3.14 参照.

命題 3.12 も同様の考え方で証明できる．しかし，この場合は，収束先の $f(t)$ の構成から始めなければならない．命題の条件は，$\epsilon > 0, \eta > 0$ に対し，番号 $\mu(\epsilon, \eta) \in \mathbb{N}$ が定まって，$m, n \geq \mu(\epsilon, \eta)$ ならば

$$S_{nm}(\epsilon) = \{\, t\,;\, |f_n(t) - f_m(t)| \geq \epsilon \,\} \quad \Longrightarrow \quad |S_{nm}(\epsilon)| < \eta$$

が成り立つことを意味する．$m_k = \mu(2^{-k}, 2^{-k})$ とし，

$$e_k^* = S_{m_k m_{k+1}}(2^{-k}) = \left\{ t\,;\, |f_{m_k}(t) - f_{m_{k+1}}(t)| \geq \frac{1}{2^k} \right\}$$

とおこう．$|e_k^*| < 2^{-k}$ である．例によって，

$$e^* = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} e_k^*$$

を考えると，e^* は零集合である．したがって，可測関数

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t) \right) + f_{n_1}(t), & t \notin e^* \\ 0, & t \in e^* \end{cases}$$

が定義できる．すなわち，$t \notin e^*$ ならば，ある j に対し，$t \notin \bigcup_{k=j}^{\infty} e_k^*$ なので

$$|\sum_{k=j}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t) \right)| \leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$$

が成り立ち，したがって，$f_{n_k}(t)$ は $f(t)$ にほとんどいたるところで収束する．特に，$f_{n_k}(t)$ は $f(t)$ に測度収束するから，任意の $\epsilon > 0, \eta > 0$ に対し，適当な番号 $\lambda(\epsilon, \eta) \in \mathbb{N}$ が定まって

$$n_k \geq \lambda(\epsilon, \eta) \quad \Longrightarrow \quad |\tilde{e}_{n_k}(\epsilon)| < \eta$$

が成り立つ．ただし，$\tilde{e}_n(\epsilon) = \{\, t\,;\, |f_n(t) - f(t)| \geq \epsilon \,\}$ とした．そこで，

$$\tilde{e}_n(\epsilon) \subset \tilde{e}_{n_k}\left(\frac{1}{2}\epsilon\right) \cup S_{nm}\left(\frac{1}{2}\epsilon\right)$$

に注意して，

$$n, n_k \geq \max\left\{ \mu\left(\frac{1}{2}\epsilon, \frac{1}{2}\epsilon\right), \lambda\left(\frac{1}{2}\epsilon, \frac{1}{2}\eta\right) \right\}$$

にとると，

$$|\tilde{e}_n(\epsilon)| < \eta$$

である．すなわち，$f_n(t)$ はこの $f(t)$ に測度収束する．

4　積分

4.1　ルベーグ積分の定義

Lebesgue によるの積分の定義の概略的な状況は §1.3 で述べた[70]．可測関数の概念によって定義を正確に述べることができる．

$f(t)$ を区間 $I = [a, b]$ 上の可測関数であって，有界，すなわち，適当な $M > 0$ に対し，$|f(t)| \le M,\ t \in I,$ を満たすものとする．われわれの目標は，$f(t)$ の積分

$$\int_I f(t)\,dt$$

の定義である．可測関数 $f(t)$ は階段関数列 $s_n(t) = \mathrm{kaidan}(t, \tau^n, w^n)$ の測度収束の極限あるいはほとんどいたるところでの収束の極限としてあらわされた．ここで，階段関数 $s_n(t)$ を有界，特に，

$$|s_n(t)| \le \sup_{t \in I} |f(t)|$$

と仮定することができる（一様に有界な階段関数列と言おう）．他方，階段関数の積分は Riemann 積分として疑義がなかった．したがって，

$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{n \to \infty} \int_I s_n(t)\,dt \tag{27}$$

の右辺が意味を持つとき，左辺を右辺によって定義し，$f(t)$ の区間 I 上での積分といおう．この定義の正当性は次の補題で保証される．

補題 4.1　$s_n(t)$ は一様に有界な階段関数列であって，(有界な）可測関数 $f(t)$ にほとんどいたるところで収束しているとする．このとき，$\{ \int_I s_n(t)\,dt \}$ は収束列である．

実際，$|s_n(t)| \le M$ としよう．一方，$s_n(t)$ は $f(t)$ に測度収束している（命題 3.11）から，任意の $\epsilon > 0, \eta > 0$ に対し，n が十分に大きければ $(n \ge N(\epsilon, \eta))$，

$$|\,S_n(\epsilon)\,| < \eta, \quad S_n(\epsilon) = \{\,t\,;\, |s_n(t) - f(t)| \ge \epsilon\,\},$$

である．ところが，$n, m \ge N(\epsilon, \eta)$ ならば，

$$I_{n,m}(\epsilon) = \{\,t\,;\, |s_n(t) - s_m(t)| \ge 2\epsilon\,\} \subset S_n(\epsilon) \cup S_m(\epsilon)$$

であり，右辺の測度は 2η を超えない．左辺の集合 $I_{n,m}(\epsilon)$ は，(有限個の）区間の合併として表される．すなわち，区間塊である．したがって，まず，

[70]溝畑のアプローチは見かけ上違うが，もちろん，後述のように，同じことになる．

Riemann 積分としての計算で，$n, m \geq N(\epsilon, \eta)$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_I s_n(t)\,dt - \int_I s_m(t)\,dt\right| \leq \int_I |s_n(t) - s_m(t)|\,dt \\
&= \int_{I_{n,m}(2\epsilon)} |s_n(t) - s_m(t)|\,dt + \int_{I \setminus I_{n,m}(2\epsilon)} |s_n(t) - s_m(t)|\,dt
\end{aligned}$$

となる．第三辺第 1 項は $4M\eta$ を超えない．第 2 項は，被積分関数が 2ϵ を超えないから，$2\epsilon|I|$ で抑えられる．これは $\{\int_I s_n(t)\,dt\}$ が収束することを意味する．

積分の基本的な性質を掲げる．

命題 4.1 $f(t), g(t)$ は区間 I 上の可測関数とする．
(a) $f(t) = g(t)$ がほとんどいたるところで成り立つならば

$$\int_I f(t)\,dt = \int_I g(t)\,dt$$

である．
(b) 線形性：

$$\int_I \{ f(t) + g(t) \}\,dt = \int_I f(t)\,dt + \int_I g(t)\,dt,$$

$$\int_I c\,f(t)\,dt = c\int_I f(t)\,dt,$$

が成り立つ．c は実数である．
(c) 非負性：

$$f(t) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_I f(t)\,dt \geq 0$$

が成立する．
(d)

$$\left|\int_I f(t)\,dt\right| \leq \int_I |f(t)|\,dt$$

が成り立つ．

応用上も理論上も重要なのがつぎの Lebesgue の優収束定理である．

定理 4.1 有界区間 $I = [a, b]$ 上の可測関数列 $f_n(t)$ が有界性

$$|f_n(t)| \leq M \quad (M \text{ は定数})$$

を満たし[71]，かつ，ほとんどいたるところでの収束

$$f_n(t) \;\to\; f(t) \quad a.e.$$

[71]非有界区間の場合でも通用する条件は，M を（より一般の）非負な積分可能な関数 $g(t)$ に置き換えることである．ただし，以下の証明は，その場合には有効ではない．

が満足されているとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(t)\,dt=\int_I f(t)\,dt$$

が成り立つ．

例 1.3 は定理 4.1 の応用例である．

問 4.1　I 上の有界な可測関数列 $f_n(t)$ はほとんどいたるところ $f(t)$ に収束しているとする．このとき，

$$g_m(t)=\inf\{\,f_m(t),\,f_{m+1}(t),\,\cdots\},\quad m=1,2,\cdots,$$

とおくと，$g_1(t)\le g_2(t)\le\cdots\le g_m(t)\le\cdots$ がほとんどいたるところで成り立ち，しかも，$g_m(t)$ はほとんどいたるところで $f(t)$ に収束する．

問 4.2　問 4.1 において，

$$\int_I g_m(t)\,dt\le\inf\left\{\int_I f_m(t)\,dt,\,\int_I f_{m+1}(t)\,dt,\,\cdots\right\},\quad m=1,2,\cdots,$$

である．右辺を j_m とおくと，$\{j_m\}$ は単調増大（非減少）数列である．

問 4.1，問 4.2 は，I 上の非負な可測関数の単調増大（非減少）列 $f_n(t)$ について，積分

$$\int_I f_n(t)\,dt$$

が定義されて，しかも，n に関して有界だったら，$f(t)=\lim_{n\to\infty}f_n(t)$ がほとんどいたるところ収束し，

$$\int_I f(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(t)\,dt$$

が導かれるであろうことを予想させる．あるいは，むしろ，積分の定義を，このかたちで述べることが望ましいのではないか，という示唆を与える．これらは，基本的に間違ってはいないのだが，われわれの議論の運び方に載せるためには，まだ，手間を掛けなければならない．

問 4.3　$f_n(t)$ は I 上の非負な可測関数の列であって，$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)$ は I 上ほとんどいたるところで有界な可測関数（ $h(t)$ とする）に収束するとする．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n(t)\,dt=\int_I\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\,dt$$

が成り立つ．

問 4.4　問 4.3 において，$f_n(t)$ に対する条件を，ほとんどいたるところで $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(t)|\le M<+\infty$ が成り立つと改めても，結論は変わらない．

命題 4.2　$S \subset I$ は可測集合とする．

$$\int_I c_S(t)\,dt = |S|$$

である．

例 4.1　$f(t)$ は I 上の有界かつ非負な可測関数とする．

$$f_n(t) = \sum_{1 \le k \le nM} \frac{k-1}{n}\, c_{nk}(t), \quad c_{nk}(t) = c_{S_{nk}}(t),$$

$$S_{nk} = \{\, t\,;\, \frac{k-1}{n} < f(t) \le \frac{k}{n}\, \},$$

とおくと，$0 \le f_n(t) \le f(t)$ であって，しかも，$f_n(t)$ は $f(t)$ にほとんどいたるところ収束する．したがって，

$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\,dt$$

である．なお，

$$\int_I f_n(t)\,dt = \sum_{1 \le k \le nM} \frac{k-1}{n}\, |S_{nk}|$$

である．§1.3 の議論を想起されたい．

4.2　若干の収束定理

定理 4.1 と関わりの深い話題を追加する．問 4.1，問 4.2 を見直そう．

$f_n(t)$, $n = 1, 2, \cdots$, は区間 $I = [a, b]$ 上の非負かつ有界な可測関数列とする：$0 \le f_n(t) \le M < +\infty$．このとき，

$$g_k(t) = \inf_{n \ge k} f_n(t), \quad k = 1, 2, \cdots$$

は，可測関数の単調非減少な列である．しかも，$0 \le g_k(t) \le M$ である．したがって，極限関数

$$g(t) = \lim_{k\to\infty} g_k(t), \quad t \in I,$$

が存在し，非負，有界，可測である．この $g(t)$ は関数列 $\{f_n(t)\}$ の下極限といわれ，

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(t)$$

とかかれる．特に，定理 4.1 から

$$\int_I g(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} \int_I g_k(t)\,dt$$

である．一方，

$$j_k = \inf_{n \ge k} \int_I f_n(t)\,dt, \quad k = 1, 2, \cdots ,$$

は，非負，有界な単調非減少な数列になる．したがって，極限値 $j = \lim_{k\to\infty} j_k$ が存在する．j は数列 $\{j_k\}$ の下極限といわれ，

$$\liminf_{n\to\infty}\, j_n$$

とかかれる．ところで，

$$\int_I g_k(t)\,dt \le j_k = \inf_{n\ge k} \int_I f_n(t)\,dt$$

だから，両辺において，$k \to \infty$ として，上の記法によって書き直せば，

$$\int_I \liminf_{n\to\infty}\, f_n(t)\,dt \le \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\,dt \tag{28}$$

が成り立っていることがわかる．すなわち，

補題 4.2 $f_n(t)$ は区間 $I = [a, b]$ 上の非負な可測関数列で有界とする．このとき，(28) が成り立つ[72]．

特に，$f_n(t)$ が $n \to \infty$ のとき，ほとんどいたるところで，$f(t)$ に収束していれば，

$$f(t) = \liminf_{n\to\infty}\, f_n(t)$$

がなりたつ．また，$|f_n(t)| \le M$ ならば，$0 \le M \pm f_n(t) \le 2M$ であり，

$$M \pm f(t) = \liminf_{n\to\infty}\, (M \pm f_n(t))$$

である．

したがって，定理 4.1 の知識がないとしても，補題 4.2 を承知していれば，$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ の存在から

$$\int_I (M \pm f(t))\,dt \le \liminf_{n\to\infty} \int_I (M \pm f_n(t))\,dt$$

を導くことができる．左辺は，$M|I| \pm \int_I f(t)\,dt$ であり，右辺は $M|I| + \liminf_{n\to\infty} \int_I (\pm f_n(t))\,dt$ である．すなわち，

$$-\liminf_{n\to\infty} \int_I (-f_n(t))\,dt \le \int_I f(t)\,dt \le \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\,dt$$

が導かれる．ところで,（有界な）実数列 $\{r_n\}$ について，$\underline{r}_k = \inf_{n\ge k} r_n$ は既述のように，単調非減少な数列を定め，その極限が下極限 $\liminf_{n\to\infty} r_n$ であった．一方，$\overline{r}_k = \sup_{n\ge k} r_n$ は単調非増大な数列を定め，その極限は上極限 $\limsup_{n\to\infty} r_n$ とよばれる．

$$\liminf_{n\to\infty}\, (-r_n) = -\limsup_{n\to\infty}\, r_n$$

[72] Fatou の補題といわれる．

となることに注意してほしい．すると，上で導いたことは，

$$\limsup_{n\to\infty}\int_I f_n(t)\,dt \le \int_I f(t)\,dt \le \liminf_{n\to\infty}\int_I f_n(t)\,dt$$

ということになる．

定義から明らかに，

$$\liminf_{n\to\infty} r_n \le \limsup_{n\to\infty} r_n$$

であるが，

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \rho \text{ が存在する} \quad \Longleftrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} r_n = \limsup_{n\to\infty} r_n = \rho$$

が成り立つ（ことは学んだであろう）．したがって，実は，補題 4.2 の知識から定理 4.1 が導かれたのであった．つまり，両者は論理的には同値である．

しかし，論理的に同値であるということは，応用される状況が同じであることは必ずしも意味しない．補題 4.2 は下極限の知見しか要求していないが定理 4.1 は極限関数を必要としている．

4.3 積分の定義・再説

われわれの現在までの積分は，有界な区間で定義された有界可測な関数の場合しか扱えない．これらの制限は，基本的に外して行きたい．すなわち，非有界な区間，例えば，$(0,+\infty)$ や $(-\infty,+\infty)$ の上での積分は，ラプラス変換の計算

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f(t)\,dt$$

など応用上頻出する．また，被積分関数の有界性も予めわかるとは限らない．これらは，極限操作と組み合わせて，今までの定義の拡張として扱われる．

やや錯綜した順序になってしまったが，必ずしも有界ではない非負な階段関数 $s_n(t)$ の単調増大列が関数 $f(t)$ に収束しており，しかも，積分 $\int_I s_n(t)\,dt$ が有界数列をなしているときに，$f(t)$ は積分可能であって，その積分を

$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_I s_n(t)\,dt$$

と定義するのは自然であろう．ここで，$s_n(t)$ を単調列にとることは，例 4.1 との関係とも整合する．実際，例 4.1 を積分の定義として採用することもできて，その場合は，$|f(t)| \le M < +\infty,\ t \in I,$ は本質的な要請ではない．補題 4.1 の主張は，$\int_I s_n(t)\,dt$ が単調非減少な有界列としておけば，成り立つのである．

この定義をほぼ言い換えたつぎの補題もよく利用される．

補題 4.3　$f_n(t)$ は区間 $I=[a,b]$ 上の非負な可測関数の単調非減少列で，積分 $\int_I f_n(t)\,dt$ の列は有界とする．このとき，$f_n(t)$ はほとんどいたるところで収束する．極限関数 $f(t)$ は積分可能で

$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n(t)\,dt$$

が成り立つ[73].

右辺は有界な単調非減少列の極限だから，確かに存在する．一方，左辺については，$f_n(t)\le M<+\infty,\ t\in I,$ が成り立つときには，$f(t)$ が存在し，しかも，定理 4.1 に帰着してしまう．しかし，この補題の要点は，単調性を要求する代わりに，$f_n(t)\le M<+\infty$ となる M がなくても, 極限が存在することである．

$$c=\sup_n\int_I f_n(t)\,dt$$

とおこう．任意の $N=1,2,\cdots$ に対して，

$$e_{N,n}=\{\,t\,;\,f_n(t)>N\,\}$$

とおくと，$f_n(t)$ の単調性から，$e_{N,n}\subset e_{N,n+1}$ である．$f_n(t)$ の非負性から，すべての n に対し

$$c\ge\int_I f_n(t)\,dt\ge\int_{e_{N,n}} f_n(t)\,dt\ge N|e_{N,n}|$$

となる．ゆえに，

$$e_N=\bigcup_{n=1}^{\infty}e_{N,n}$$

とおけば，$|e_N|\le\frac{c}{N}$ となって，

$$e_*=\bigcap_{N=1}^{\infty}e_N$$

は零集合である．$t\notin e_*$ とすると，$t\notin e_N$ となる N があり，したがって，$t\notin e_{N,n}$ あるいは $f_n(t)\le N$ となる．特に，$f(t)=\lim_{n\to\infty}f_n(t)$ が存在して，$f(t)\le N$ である．すなわち，$f_n(t)$ はほとんどいたるところで $f(t)$ に収束する．

問 4.5　補題 4.3 の成立を仮定すれば,（$f_n(t)$ が非負，有界，$|f_n(t)|\le M<+\infty$ として）補題 4.2 を導けることを確かめよ．

さて，われわれの拡張された積分可能性の定義は，非負な関数についてのみ有効であった．しかし，関数はさまざまな符号を取りうる．$f(t)$ に対し，

$$f_\pm(t)=\max\{\pm f(t),0\}\tag{29}$$

[73]Beppo Levi の補題といわれる．

とおこう．$f_{\pm}(t) \geq 0$ であり，しかも，

$$f(t) = f_+(t) - f_-(t) \tag{30}$$

である．特に，

$$|f(t)| = f_+(t) + f_-(t) \tag{31}$$

でもある．

問 4.6　$f(t)$ について

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$$

が成り立つ．

問 4.7　$f(t)$ が可測関数ならば，$f_{\pm}(t)$ も可測関数である．

区間 I の上の可測関数 $f(t)$ が積分可能であることを $f_{\pm}(t)$ がともに積分可能であることとし，

$$\int_I f(t)\,dt = \int_I f_+(t)\,dt - \int_I f_-(t)\,dt \tag{32}$$

と定義する[74]．

問 4.8　$f(t)$ は区間 I 上の可測関数とする．つぎを示せ：

$$f(t) \quad \text{が積分可能である} \quad \Longleftrightarrow \quad |f(t)| \quad \text{が積分可能である}$$

すなわち，

$$f(t) \quad \text{が積分可能である} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_I |f(t)|\,dt < +\infty.$$

問 4.9　関数 $f(t)$ は区間 I 上で積分可能とする．

$$\left|\int_I f(t)\,dt\right| \leq \int_I |f(t)|\,dt \tag{33}$$

の成立を確かめよ．

4.4　直線上の積分

区間 I が直線 $\mathbb{R}$（同じことだが，区間 $(-\infty, +\infty)$ ）の場合を補っておこう，$f(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の可測関数とする．$f(t)$ の符号が一定でないときは，(29) (30) のように，$f(t) = f_+(t) - f_-(t)$ として扱えばよいから，$f(t) \geq 0$ とし

[74]「積分可能」は「可積分」ともいわれる．

てよい．このとき，すでに，積分が定義できている非負関数 $f_n(t)$ の単調増大列で $f(t)$ にほとんどいたるところで収束し，かつ，

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,dt$$

が収束するものがあれば，その極限として

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt$$

を定義するのは自然である．それでは，$f_n(t)$ として，どのようなものがとれるか．標準的なものは，

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & |t| > n \\ f(t), & |t| \leq n \end{cases} \tag{34}$$

である．$f_n(t)$ は n について単調に増大（非減少）であり，また，有界区間における（非有界関数を含めて）積分可能性が定められているので，各 n について， $f_n(t)$ の積分可能性を論ずることができる．$f(t)$ の積分が存在するなら，$f_n(t)$ の積分を下回るはずはないから，各 $f_n(t)$ は当然積分可能である．しかも，$f_n(t)$ の積分は単調に増大して $f(t)$ の積分に収束する．これを逆転して，$f(t)$ の積分の定義とする．すなわち，$f(t) \geq 0$ が積分可能とは，(34) の $f_n(t)$ が積分可能であって，その積分の値のなす数列が有界であることを言い，

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,dt$$

と定める．一般の $f(t)$ については， (29) の $f_{\pm}(t)$ を利用して，$|f(t)| = f_+(t) + f_-(t)$ の積分可能性に議論を帰着させればよい．

直線 $\mathbb{R}$ では，$a \in \mathbb{R}$ に対し，任意の t について

$$t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad t - a \in \mathbb{R}$$

となる．これに応じ，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(t)$ に対し，

$$f_a(t) = f(t-a) \tag{35}$$

を考察することができる．$f_a(t)$ のグラフは $f(t)$ のグラフを右に a だけ平行移動したものであり，この点を配慮して $f_a(t)$ を $f(t)$ の平行移動ということがある．

命題 4.3　$f(t)$ が直線上で積分可能ならば，その任意の平行移動 $f_a(t)$, $a \in \mathbb{R}$, も積分可能であって，

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f_a(t)\,dt$$

が成り立つ．

実際，$f(t)$ が階段関数，特に，$f(t) = \mathrm{kaidan}(t, (\tau_1, \tau_2), (w_1), c)$ の形のときは明らかである．したがって，これらの 1 次結合，すなわち，一般の階段関数のときも正しい．極限移行によって，一般に成立する．

5 高次元の場合

5.1 高次元の測度

我々は，1 次元区間の上での可測集合や可測関数を考えてきた．しかし，構成を反省してみると，1 次元の特性はほとんど使っては来なかった．大体において高次元でもそのまま通用する考え方をしてきたのである．

例えば，平面内の集合 S を扱うことを考えよう．区間型の被覆というときに,「区間」をどう約束するかだけが問題である．もともと，1 次元区間は「長さ」がきちんと計算できるものであった．平面内の集合で，面積が疑義なく計算できるものは,（長）方形

$$Q = \{(x, y); a_1 \leq x \leq a_2,\, b_1 \leq y \leq b_2\} = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$$

である．すなわち，Q の面積は,

$$|Q| = (a_2 - a_1)\,(b_2 - b_1)$$

である．したがって，2 次元区間としては,（長）方形を考えればよい．

3 次元，あるいは，さらに，高次元の場合でも，同様に考えられる．

例 5.1 平面内の（単位）正方形 $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ の面積は $|I^2| = 1$ である．

そこで，平面内の集合 S（$\subset [0, 1] \times [0, 1]$）に対して[75],

$$\mathcal{Q} = \{\, Q_i\,;\, Q_i \text{ は長方形} \,\}$$

かつ

$$S \subset \bigcup_{Q_i \in \mathcal{Q}} Q_i$$

であるとき，$\mathcal{Q}$ を S の区間型の被覆といおう．1 次元の場合と同様に

$$\|\mathcal{Q}\| = \sum_{Q_i \in \mathcal{Q}} |Q_i|$$

として，区間型被覆の「面積」を考えることができる．S の外測度は

$$|S|^* = \inf_{\mathcal{Q} \text{ は } S \text{ の区間型の被覆}} \|\mathcal{Q}\|$$

[75] S を有界として,「標準化」してあるだけである．S がある（長）方形に含まれていることを要求はしているが，実は，$S \subset [-100, 100] \times [10000, 11000]$ でも何でもよい．

である．

平面内の零集合は外測度 0 の集合である．

例 5.2　平面内の 1 次元集合，例えば，$\{(x,x); 0 \leq x \leq 1\}$ は零集合である．

$S \subset I^2 = [0,1] \times [0,1]$ としよう．

$$|S|^* + |I^2 \setminus S|^* = |I^2| = 1$$

のとき，S は平面内の可測集合といい，外測度 $|S|^*$ を $|S|$ とかいて，S の測度という．

1 次元の類比を完成させるためには，高次元の階段関数を定義しなければならない．$c_1, c_2, \cdots, c_N$ を定数列，Q_i, $i = 1, 2, \cdots, N$ を平面内の区間（つまり，長方形）の列とし，$Q_i \cap Q_j$, $i \neq j$, は零集合とする．ここだけの約束ではあるが，区間 $Q = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ にたいし，

$$\dot{Q} = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$$

とする．$Q_i \cap Q_j$ が零集合という条件は，$\dot{Q}_i \cap \dot{Q}_j = \emptyset$ ということである．平面内の階段関数 $s(x, y)$ は，

$$s(x,y) = \begin{cases} c_i, & (x,y) \in \dot{Q}_i \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

で定義される関数である．

積分は，

$$\iint s(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{N} c_i\,|Q_i|$$

によって定義する．この場合は，Riemann 積分で計算される．

以下，積分の諸性質は，1 次元の場合と同様である．ただし，1 次元の場合も，無限区間上での積分は，まだ，きちんと論じてはいない．高次元の場合も，そこまでの類比は，まだ主張していない．

5.2　Fubini の定理

高次元，例えば，平面内の（可測）集合 $S \subset I^2$ を考えることにより，1 次元の場合と本質的に違うことが起きる．例えば，a, b を固定すると，切り口の集合

$$Y_a(S) = \{\, y\,;\,(a,y) \in S\}, \quad X_b(S) = \{\, x\,;\,(x,b) \in S\}$$

が得られる．いずれも，1 次元の集合である．

例えば，S は平面内の（2 次元）零集合としよう．$Y_a(S)$ あるいは $X_b(S)$ は（1 次元）零集合であろうか．

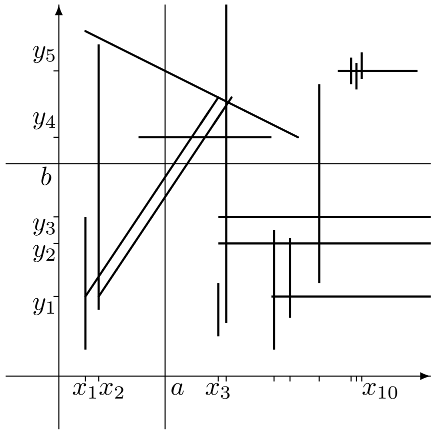

図 21: 平面の零集合の例 S

補題 5.1 S は 2 次元零集合とする．このとき，1 次元零集合 N 上の点を除いて（$a \notin N$），$Y_a(S)$ は 1 次元零集合である．

S が零集合という仮定から，$\epsilon > 0$ に対し，S の区間型の被覆 $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\epsilon) = \{Q_i\}$ で $\|\mathcal{Q}(\epsilon)\| < \epsilon$ となるものがある．$\mathcal{Q}_a(\epsilon) = \{Y_a(Q_i); Q_i \in \mathcal{Q}(\epsilon)\}$ とおく．構成から，$X_a(Q_i)$ は 1 次元区間であり，$\mathcal{Q}_a(\epsilon)$ は $Y_a(S)$ の（1 次元）区間型の被覆であり，これらの合併集合は（1 次元）可測集合である．

$$\xi_n = \left\{ x\,; \left| Y_x \left(\bigcup_{i=1}^{n} Q_i \right) \right| > \sqrt{\epsilon} \right\}$$

とおくと，構成から $|\xi_n| \leq \sqrt{\epsilon}$ である．$n \to \infty$ として，

$$\left| \left\{ x\,; \left| Y_x \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \right) \right| > \sqrt{\epsilon} \right\} \right| \leq \sqrt{\epsilon}$$

である．そこで，S の被覆 $\mathcal{Q}(4^{-n}) = \{Q_{kn}\}$ をとる．

$$P_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{kn}$$

とおく．構成から，

$$\left| \left\{ x\,; |Y_x(P_n)| > \frac{1}{2^n} \right\} \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

である．そこで，

$$R_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} \left\{ x\,; |Y_x(P_n)| > \frac{1}{2^n} \right\}$$

とおき，

$$N = \bigcap_{m=1}^{\infty} R_m$$

とおくと，N は（1 次元）零集合であり，しかも，$a \notin N$ ならば，$a \notin R_m$ となる m があり，したがって，

$$|Y_a(P_n)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \geq m,$$

である．すなわち，$Y_a(S)$ は 1 次元零集合である．

系 5.1　$f(x,y)$ は平面上の可測関数とする．このとき，1 次元零集合 M があって，$b \notin M$ ならば，$x \mapsto f(x,b)$ は可測関数である．

概略を説明しよう．$f(x,y)$ は有界な区間 I^2 で定義されているとする．階段関数列 $\varphi_n(x,y)$ の列が

$$\varphi_n(x,y) \ \to \ f(x,y), \quad (x,y) \notin S$$

を満たすとする．ただし，$S \subset I^2$ は（平面内の）零集合である．階段関数の値については，必要なら補整を行なって，2 次元区間の内部では定数，周では 0 と考えてよい．さて，補題 5.1 より，(1 次元）零集合 M があって，$b \notin M$ ならば $X_b(S) = \{x;\, (x,b) \in S\}$ は零集合になる．したがって，このとき，$\varphi_n(x,b)$ は x の関数とみて，階段関数である．一方，

$$\varphi_n(x,b) \ \to \ f(x,b), \quad x \notin X_b(S),$$

である．したがって，$f(x,b)$ は x の可測関数である．

重積分と累次積分，あるいは，積分順序交換に関してよく使われるのが，つぎの Fubini の定理である．

定理 5.1　$f(x,y)$ は I^2 上で積分可能とする．このとき，1 次元零集合 N があって，$x \notin N$ ならば

$$F(x) = \int f(x,y)\,dy$$

は，有限確定値を持ち，しかも，

$$\iint f(x,y)\,dxdy = \int F(x)\,dx$$

が成り立つ．

概略的な証明を紹介する．$f(x,y)$ は区間 I^2 において有界可測とする．$|f(x,y)| \leq M$ とする．(平面の）階段関数の列 $\varphi_n(x,y)$ が存在して，

$$\varphi_n(x,y) \ \to \ f(x,y), \quad (x,y) \in I^2 \setminus S, \ |S| = 0,$$

である．ここで，$|\varphi_n(x,y)| \le M$ としてよい．すると，

$$\iint_{I^2} \varphi_n(x,y)\,dxdy \ \to\ \iint_{I^2} f(x,y)\,dxdy$$

である．一方，階段関数については

$$\int dx \int \varphi_n(x,y)\,dy = \int F_n(x)\,dx$$

という表現が意味を持つ．S は（平面の）零集合であるから，補題 5.1 により，(1 次元）零集合 N があって，$x \notin N$ ならば，$Y_x(S) = \{y; (x,y) \in S\}$ は（1 次元）零集合である．したがって，$x \notin N$ ならば

$$\varphi_n(x,y) \ \to\ f(x,y), \quad y \notin Y_x(S), \quad |Y_x(S)| = 0,$$

すなわち，ほとんどすべての y に対して，収束する．したがって，$x \notin N$ ならば，

$$F_n(x) = \int \varphi_n(x,y)\,dy \ \to\ \int f(x,y)\,dy = F(x)$$

である．一方，

$$F_n(x) = \int \varphi_n(x,y)\,dy$$

は一様に有界（$\le |I| \cdot M$）であり，したがって，

$$\int F_n(x)\,dx \ \to\ \int F(x)\,dx$$

である．

注意 5.1　$f(x,y)$ が必ずしも有界ではないない可測集合上の必ずしも有界ではないが積分可能な関数の場合にも，証明を若干敷衍することにより，定理 5.1 の成立を示すことができる．ただ，われわれの現在のノートでは，無限領域の上での非有界な積分可能な関数の積分については，十分に述べていないので，ここでは，これ以上踏み込まない．ただし，以下で応用するのは，そのような場合である．

例 5.3　定理 5.1 では可積分性を外すことができないという例を挙げる．

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

とおく．正方形領域 $Q = [0,1] \times [0,1]$ の上で，$f(x,y)$ は可積分ではない．実際，$n = 1, 2, \cdots,$ に対して，

$$f_n(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & n^2(x^2+y^2) \ge 1 \\ 0, & n^2(x^2+y^2) < 1 \end{cases}$$

とおくと，$|f_n(x,y)|$ は単調に増大し，ほとんどいたるところで $|f(x,y)|$ に収束する．しかし，積分は非有界：

$$\iint_Q |f_n(x,y)|\,dxdy \geq \log n$$

である．すなわち，極座標を用いると，

$$\iint_Q |f_n(x,y)|\,dxdy \geq 2\int_{1/n}^{1} rdr \int_0^{\pi/4} d\theta\ \frac{r^2\cos 2\theta}{r^4} = \log n$$

となる．したがって，この $f(x,y)$ に対しては，Fubini の定理の適用は保証されない．事実，

$$\int_0^1 \left\{\int_0^1 f(x,y)\,dy\right\} dx = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 \left\{\int_0^1 f(x,y)\,dx\right\} dy = -\frac{\pi}{4}$$

である．第 2 式は，第 1 式から $f(x,y) = -f(y,x)$ を利用するとわかる．第 1 式は，$x > 0$ として，

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{1}{x}\int_0^{1/x} \left(\frac{z}{1+z^2}\right)' dz = \frac{1}{1+x^2}$$

から従う．

例 5.4　$f(y)$ は直線上の積分可能な関数とする：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy < +\infty$$

$t > 0$ とする．

$$F_t(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{(x-y)^2+t^2}\,f(y)$$

は，平面 $\mathbb{R}^2$ 上で積分可能であって，

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |F_t(x,y)|\,dxdy \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy$$

が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} |F_t(x,y)|\,dxdy &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{t}{(x-y)^2+t^2}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy < +\infty\end{aligned}$$

だから，$F_t(x,y)$ は積分可能である．したがって，

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(x-y)^2+t^2}\,f(y)\,dy \tag{36}$$

はほとんどいたるところで $-\infty < x < +\infty$ の関数として存在する．

問 5.1　(36) の $u(x,t)$ は，実は，すべての x に対して，存在することを示せ．特に，$u(x,t)$ は x に関して連続である[76]

問 5.2　$t>0$ とし，$u(x,t)$ は (36) のものとする．このとき，

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x,t)-f(x)|\,dx=0$$

が成り立つ[77]．

命題 5.1　$f(x)$, $g(x)$ はいずれも $\mathbb{R}$ 上で積分可能とする．すなわち，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<+\infty,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\,dx<+\infty.$$

このとき，ほとんどすべての x にたいして，合成積

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)\,g(y)\,dy \tag{37}$$

が確定し，かつ，$h(x)$ は積分可能であって，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(x)|\,dx\le\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\,dx \tag{38}$$

が成り立つ．$h(x)$ を $f*g\,(x)$ と表すことがある．

実際，命題 4.3 を利用すると

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2}|f(x-y)\cdot g(y)|\,dxdy&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)|dx\ |g(y)|\,dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx\int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|\,dy\end{aligned}$$

---

[76] Lebesgue の優収束定理を使う．$x_n\to a$ とする．

$$|\frac{1}{\pi}\,\frac{t}{(x_n-y)^2+t^2}\,f(y)|\le\frac{1}{\pi t}|f(y)|$$

かつ $|f(y)|$ は積分可能である（これは $\mathbb{R}$ 上で考えているので．有界性だけでは不足.）．また，

$$\lim_{x_n\to a}\frac{1}{\pi}\,\frac{t}{(x_n-y)^2+t^2}\,f(y)=\frac{1}{\pi}\,\frac{t}{(a-y)^2+t^2}\,f(y)$$

である．

[77] ほとんどいたるところで，

$$u(x,t)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\{f(x-ty)-f(x)\}\,dy$$

である．特に，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x,t)-f(x)|\,dx\le\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-ty)-f(x)|\,dx\right)dy$$

である．したがって，命題 4.3 により，

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-ty)-f(x)|\,dx\right)\le\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$$

となることに注意すれば，Lebesgue の優収束定理が利用できる．なお，後述の命題 5.3 とその証明を参照せよ．

だから，$|f(x-y)\cdot g(y)|$ は $\mathbb{R}^2$ 上で積分可能である．したがって，定理 5.1 により，$h(x)$ は，ほとんどいたるところで確定し，積分可能である．(38) は，定理 5.1 の後半から従う．

注意 5.2　例 5.4 は命題 5.1 の特別な場合でもある．

問 5.3　命題 5.1 において，$x \leq 0$ において，ほとんどいたるところ $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ が成り立つならば，$x \leq 0$ において，(37) の合成積 $h(x) = 0$ となることを確かめよ．特に，$f(x)$ が区間 $[0, a]$（$a > 0$）の特性関数のとき，$h(x)$ はどうなるか．

問 5.4　$f(x)$，$g(x)$ は，それぞれ，区間 $[a, b]$，$[c, d]$ の特性関数とする（$a < b$, $c < d$）．$f(x)$, $g(x)$ の合成積 $h(x)$ は，どのような関数になるか．

問 5.5　$f(x)$, $g(x)$ は命題 5.1 のもので，さらに，$x \leq 0$ ならば，$f(x) = 0$, $g(x) = 0$ を満たすものとする．$h(x)$ が $f(x)$, $g(x)$ の合成積（命題 5.1) のとき，

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, h(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, f(x)\, dx \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, g(x)\, dx$$

が成り立つことを示せ．

5.3　積分と微分

まず，いくつかの例をみよう．

例 5.5　$f(t)$ が区間 $[0, 1]$ 上の積分可能な関数とすると，例えば，

$$c_f(x) = \int_0^1 f(t)\, \cos 2\pi xt\, dt \tag{39}$$

は，x が自然数 n ならば Fourier 係数（の一部）だが，積分自体は n が任意の実数でも成り立つので，$c_f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, の形で考えることができる．微分積分学の基礎的な知識から，$\delta \neq 0$ に対し，

$$\left| \frac{\cos 2\pi(x+\delta)t - \cos 2\pi\, xt}{\delta} \right| \leq 2\pi t \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

であり，

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\cos 2\pi(x+\delta)t - \cos 2\pi xt}{\delta} = -2\pi t\, \sin 2\pi xt$$

であることは言うまでもないことではある．しかも，t の関数 $t\, f(t)$, $\sin 2\pi xt$ は区間 $[0, 1]$ で積分可能である．改めて，被積分関数を（x はパラメータとして）

$$f_\delta(t) = f(t)\, \frac{\cos 2\pi(x+\delta)t - \cos 2\pi xt}{\delta}$$

とおくと，上で見たことは，

$$|f_\delta(t)| \le 2\pi|f(t)|, \quad \lim_{\delta\to 0} f_\delta(t) = -2\pi t\, f(t)$$

である．したがって，(ここが大事だが) Lebesgue の優収束定理より，

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^1 f_\delta(t)\,dt = -2\pi\int_0^1 tf(t)\,\sin 2\pi xt\,dt$$

となる．別な表現をすると，(39) の $c_f(x)$ は，各 x において微分可能で，その導関数は積分記号下での x に関する偏微分で求められる：

$$\frac{d}{dx}c_f(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(t)\,cos 2\pi xt\ \Big)\,dt = -2\pi\int_0^1 tf(t)\sin 2\pi xt\,dt$$

ということになる．

全く同様のことは，

$$s_f(x) = \int_0^1 f(t)\,\sin 2\pi xt\,dt, \quad -\infty < x < +\infty,$$

に対しても成り立つ．

問 5.6　$s_f(x)$ の導関数はどうなるか．

問 5.7　x を実数パラメーターとする．積分

$$c(x) = \int_0^1 \cos 2\pi xt\,dt, \quad s(x) = \int_0^1 \sin 2\pi xt\,dt$$

を計算せよ．多項式 $p(t) = \sum_{k=0}^N a_k\,t^k$（$a_k$ は定数）の Fourier 係数を $c(x)$, $s(x)$ を利用して表せ[78]．

類似のことは，無限区間の場合でもおきる．

例 5.6　$\mathrm{e}^{-ax}\,g(x)$ （ただし，$a > 0$ は定数）は半直線 $(0,+\infty)$ 上で積分可能

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,|g(x)|\,dx < +\infty$$

とする．$s \ge a$ ならば，$g(x)$ の Laplace 変換

$$G(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx}\,g(x)\,dx \tag{40}$$

[78] $c(x)$, $s(x)$ の具体化のための計算は $x = 0$ か $x \ne 0$ によって違うはずであることに留意．また，例えば，$\int_0^1 t^2\,\cos nt\,dt = -1/(4\pi^2)\,c''(n)$ である．この積分が自然数 n の偶奇によってどう振舞うかの把握も要点になる．

が定義される．$s > a$ のとき，$\delta \neq 0$ が $s + \delta > a$ を満たすならば

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{-(s+\delta)x} - \mathrm{e}^{-sx}}{\delta} \, g(x) \right| \leq x \, \mathrm{e}^{-ax} \, |g(x)| \leq \frac{1}{e \, a} \, |g(x)|$$

であり，

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-(s+\delta)x} - \mathrm{e}^{-sx}}{\delta} \, g(x) = -x \, \mathrm{e}^{-s\,x} \, g(x)$$

も明らかである．したがって，Lebesgue の優収束定理より，s の関数として，$G(s)$ は $s > a$ で微分可能であり，導関数

$$\frac{d}{ds} G(s) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx} \, x \, g(x) \, dx$$

となる．

例 5.5，例 5.6 の論法を整理しておく．

命題 5.2　y は区間 (a, b) からとったパラメータとする．$h(t, y)$ は t の関数として，区間 I 上で積分可能とし，ほとんどすべての $t \in I$ に対して，$h(t, y)$ が y に関して偏微分可能とする．さらに，区間 I 上の適当な積分可能な関数 $u(t)$ に対し，

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} h(t, y) \right| \leq |u(t)|$$

が成り立つとする．このとき，

$$H(y) = \int_I h(t, y) \, dt$$

は微分可能であって，その導関数は

$$H'(y) = \int_I \frac{\partial}{\partial y} h(t, y) \, dt$$

で与えられる．

I が有界区間ならば，$u(t)$ としては定数をとることもできる．

問 5.8　命題 5.2 の証明を確認せよ．

命題 5.2 において，パラメータは高次元でもよい．
例 5.4 を再検討してみよう．

例 5.7　$u(x, t)$ は (36) のものとする．被積分関数 $F_t(x, y)$ はパラメータ $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ に依存する y の積分可能な関数である．実際，

$$P(t, x - y) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{(x - y)^2 + t^2} \tag{41}$$

とおくと[79]，$F_t(x,y) = P(t,x-y)\,f(y)$ であり，$f(y)$ が積分可能な関数である．

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t,x-y) = \pi\left(-1+\frac{(x-y)^2}{t^2}\right)P(t,x-y)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}P(t,x-y) = -2\pi\frac{x-y}{t}\,P(t,x-y)^2$$

だから，$F_t(x,y)$ の偏導関数について必要な評価を得るのは容易である．$u(x,t)$ は，x, t の関数として，偏微分可能である．

問 5.9　$u(x,t)$ は $\mathcal{C}^\infty$ である．

問 5.10　$u(x,t)$ は t, x の調和関数：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u(x,t) = 0$$

であることを示せ．

$\varphi(x)$ は直線上の $\mathcal{C}^\infty$ 級の関数とする．$\varphi(x)$ が有界な台[80]を持つならば，明らかに，直線上で積分可能である．

典型的な例を挙げよう．

例 5.8　台が有界な直線上の $\mathcal{C}^\infty$ 級関数の例を与える．まず，関数

$$\rho(t) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{t}), & 0 < t \\ 0, & t \le 0 \end{cases} \tag{42}$$

を考える．$\rho(t)$ は，直線の上の非負な $\mathcal{C}^\infty$ 級の関数である[81]．合成関数 $\rho(1-x^2)$ は $|x| \ge 1$ では恒等的に 0，$|x| > 1$ では正値をとる $\mathcal{C}^\infty$ 級の関数となる．特に，

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(1-x^2)\,dx = \int_{-1}^{1} \rho(1-x^2)\,dx > 0$$

である．したがって，

$$\omega(x) = \frac{1}{\mu}\,\rho(1-x^2) \tag{43}$$

は，台 $\{\,x\,;\,-1 \le x \le 1\,\}$ が有界な $\mathcal{C}^\infty$ 級の関数で，非負値をとる偶関数 $\omega(x) \ge 0$，$\omega(-x) = \omega(x)$ である（図 22）．しかも，積分値については

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \omega(x)\,dx = 1 \tag{44}$$

が成り立つ．

---

[79] $P(t,x)$ は直線上の Poisson 核関数である．

[80] 一般に，(直線上の) 関数 $f(x)$ の台とは集合 $\{\,x\,;\,f(x) \ne 0\,\}$ の閉包を意味し，$\mathrm{supp}\,(f)$ と表される．したがって，$\mathrm{supp}\,(f)$ の点 y に対し，$f(y') \ne 0$ となる y' が y のいくらでも近くに見つかる．

[81] $\rho(t)$, $t > 0$, のすべて階数の導関数が $t \downarrow 0$ のときに 0 に収束することを確認すればよい．

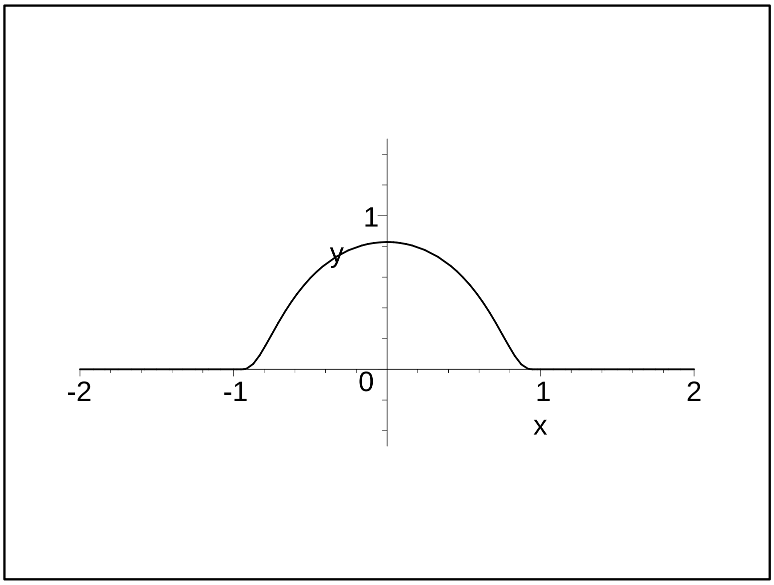

図 22: $\omega(x)$ のグラフ

例 5.9　$f(x)$ を直線の上の積分可能な関数とする．合成積

$$\omega * f\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x-y)\,f(y)\,dy$$

は，任意の x をパラメーターとして，定義できる．しかも，命題 5.1 により，$\omega * f\,(x)$ は直線の上で積分可能である．また，命題 5.2 からわかるように，x の関数として $\mathcal{C}^{\infty}$-級であり，

$$\frac{d^n}{dx^n}\,\omega * f\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n}\,\omega(x-y)\,f(y)\,dy$$

が成り立つ．

問 5.11　$\varphi(x)$ は有界な台を持つ直線上の $\mathcal{C}^{\infty}$ 級の関数とする．$\varphi(x)$ と直線上で積分可能な関数 $f(x)$ との合成積 $\varphi * f\,(x)$ は，直線の上で積分可能，かつ $\mathcal{C}^{\infty}$-級である．

(43) の $\omega(x)$ を若干変形して

$$\omega_k(x) = \frac{1}{k}\,\omega(\frac{x}{k}), \quad k > 0, \tag{45}$$

とおこう．(44) より，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_k(x)\,dx = 1$$

である．$\omega_k(x)$ と直線の上で積分可能な関数 $f(x)$ との合成積 $\omega_k * f\,(x)$ は，例 5.8 と同様にして，積分可能で，かつ，$\mathcal{C}^{\infty}$ 級であることがわかる．

命題 5.3　$f(x)$ は直線上積分可能とする．このとき，

$$\lim_{k\downarrow 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|\omega_k * f\,(x)-f(x)|\,dx=0 \tag{46}$$

が成り立つ．

実際，(44) の応用として

$$\omega_k * f\,(x)-f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_k(x-y)\{f(y)-f(x)\}\,dy$$

となることにまず注意しよう．さらに，右辺の積分を

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(y)\,\{\,f(x-ky)-f(x)\,\}\,dy$$

と書き換えることができる．したがって，定理 5.1 より

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\omega_k * f\,(x)-f(x)|\,dx\le\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-ky)-f(x)|\,dx\right)dy$$

となる．右辺の被積分関数は,（y についての）積分可能関数

$$2\,\omega(y)\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$$

を越えず，一方，各 y について，$k\to 0$ のとき，0 に収束する．ゆえに，Lebesgue の優収束定理により，(46) が導かれる．

注意 5.3　命題 5.3 は，積分可能な関数が $\mathcal{C}^\infty$ 級の関数により，(46) の意味で近似できることを意味する．$f(x)$ と $\omega_k(x)$ との合成積が $f(x)$ には必ずしも保証されていなかったなめらかさを与える，つまり，$f(x)$ を軟化させるので，この意味で，$\omega_k(x)$ による合成積を軟化作用素ということがある．

命題 5.4　関数 $f(x)$ の台が区間 $[a,b]$ に含まれているならば，合成積 $\omega_k * f(x)$ の台は $[a-k,b+k]$ に含まれる．

実際，$\mathrm{supp}\,(f)\subset[a,b]$ だから，

$$\omega_k * f(x)=\int_a^b\omega_k(x-y)\,f(y)\,dy$$

である．したがって，$x-b\le x-y\le x-a,\ a\le y\le b,$ である．ゆえに，$x<a-k$ または $x>b+k$ ならば，右辺の被積分関数は消えてしまい，積分は 0 になる．すなわち，これらの x は $\omega_k * f$ の台には属さない．

6　Lebesgue 積分の応用

6.1　積分可能な関数の空間

区間[82] I で定義された可積分な関数 $f(t)$ の全体のなす集合を $\mathcal{L}^1(I)$ で表そう．

補題 6.1　$f(t),\, g(t) \in \mathcal{L}(I)$ ならば，1 次結合

$$h(t) = a\,f(t) + b\,g(t) \qquad (\ a,\, b\ \text{はスカラー})$$

も $h(t) \in \mathcal{L}^1(I)$ であり，しかも，

$$\int_I h(t)\,dt = a\int_I f(t)\,dt + b\int_I g(t)\,dt$$

である．この h を $h = a\,f + b\,g$ と表す．したがって，上式は

$$\int_I (a\,f + b\,g)(t)\,dt = a\int_I f(t)\,dt + b\int_I g(t)\,dt$$

とも書ける．

実際，積分の定義から $f(t),\, g(t)$ が階段関数の場合を扱えば十分であるが，そのときは明らかである．

$\mathcal{L}^1(I)$ の元 $f(t)$ に対し，$|f(t)|$ の積分を

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)|\,dt \tag{47}$$

とおく．$\|f\|_1$ が存在することが $f \in \mathcal{L}^1(I)$ であるための条件に他ならない．また，

$$\text{ほとんどいたるところで}\quad f(t) = 0\ \text{ならば}\quad \|f\|_1 = 0\ \text{である} \tag{48}$$

ことは明らかであろう．

補題 6.2　$\|f\|_1$ は $\mathcal{L}^1(I)$ の上にセミノルムを定める．すなわち，

$$\|f\|_1 \geq 0 \tag{49}$$

$$\|a\,f\|_1 = |a|\,\|f\|_1 \tag{50}$$

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \tag{51}$$

が成り立つ．

[82] I は有界区間 $[a, b]$，半無限区間 $(a, +\infty)$，あるいは無限区間 $(-\infty, +\infty)$ などを表すとする．

これらは，いずれも階段関数から引き継がれている性質である．

(49) において，$\|f\|_1 = 0$ から $f = 0$ が導ける（という解釈が成立する）とき，$\|\cdot\|_1$ はノルムといわれる．しかし，(48) が示唆するように，$\|f\|_1 = 0$ であっても $f(t) \equiv 0$ とは限らない．

注意 6.1　ノルムを正確に説明する．ベクトル空間 $\mathbb{X}$ で定義された非負実数の値をとる関数 $\nu : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ は，$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$，$a$ はスカラー，として，

$$\nu(\mathbf{x}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{（ゼロ・ベクトル）} \tag{52}$$

$$\nu(a\,\mathbf{x}) = |a|\,\nu(\mathbf{x}) \tag{53}$$

$$\nu(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \nu(\mathbf{x}) + \nu(\mathbf{y}) \tag{54}$$

を満たすとき，ノルムといわれる．ベクトル空間に対して，必ずノルムが定義できるとは限らない．ノルムの定義されたベクトル空間はノルム空間といわれる．$\mathcal{L}^1(I)$ はベクトル空間であるが，$\|\cdot\|_1$ は，このままでは，ノルムの条件のうち (52) を満たしていない．

ノルムは重要なので，$\mathcal{L}^1(I)$ の内容を検討して，$\|\cdot\|_1$ をノルムと解釈できる手立てを以下で考える．この状況を検討するために，$\|f\|_1 = 0$ を満足する $f \in \mathcal{L}^1(I)$ の全体を $\mathcal{N}^1(I)$ とおこう．

補題 6.3　$f \in \mathcal{N}^1(I)$ の必要十分条件は $f(t) = 0$ が適当な零集合を除いて成り立つ，つまり，ほとんどいたるところで $f(t) = 0$ となることである．$f, g \in \mathcal{N}^1(I)$ の 1 次結合 $a\,f + b\,g \in \mathcal{N}^1(I)$ である．

実際，前半は (48) からしたがう．後半は，(50) (51) を利用すればよい．

系 6.1　$f, g \in \mathcal{L}^1(I)$ が $f - g \in \mathcal{N}^1(I)$ を[83]満たすとする．このとき，$\|f\|_1 = \|g\|_1$ である．

実際，$f = (f - g) + g$ とかけるから，(51) から

$$\|f\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g\|_1 = \|g\|_1$$

である．$g = -(f - g) + f$ を利用すれば，$\|g\|_1 \leq \|f\|_1$ が得られる．

さて，われわれは $\mathcal{L}^1(I)$ を「空間」，元 $f, g, \ldots$ を「点」と考えて，2 点 f, g の「距離」$d(f, g)$ を考えたい.「距離」に対し，要請されるべき性質は，$f, g, h \in \mathcal{L}^1(I)$ として，$d(f, g) \geq 0$ であって，さらに，

$$d(f, g) = 0 \Longrightarrow f = g \qquad \text{（反射性）} \tag{55}$$

$$d(f, g) = d(g, f) \qquad \text{（対称性）} \tag{56}$$

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g) \quad \text{（三角性）} \tag{57}$$

[83] -1 に対し，$-g = (-1)\,g$, $f - g = f + (-1)\,g$ である．

である[84]．距離の候補としては，$d(f,g)=\|f-g\|_1$ が考えられる．実際，この場合，（対称性）（三角性）は成り立つ．しかし，（反射性）では $\mathcal{N}^1(I)$ の元によるあいまいさを排除できない．幸い，$\mathcal{N}^1(I)$ の元は「ほとんど 0 であり」，積分をすることを前提に考えれば**無視できる**であろう．そこで，$\mathcal{N}^1(I)$ の元を**無視して** $\mathcal{L}^1(I)$ の元を扱うことを前提にして，特に，

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad f-g \in \mathcal{N}^1(I) \tag{58}$$

と表そう[85]．$f \sim g$ を $f=g$ に代替すれば，$d(f,g)=\|f-g\|_1$ によって，$\mathcal{L}^1(I)$（実は $\mathcal{L}^1(I)/\sim$ ）に「距離」が定義できる．

$\sim$ に関して，関係式

$$f \sim f \tag{59}$$

$$f \sim g \quad \Longrightarrow \quad g \sim f \tag{60}$$

$$f \sim g,\ g \sim h \quad \Longrightarrow \quad f \sim h \tag{61}$$

が成り立つことは明らかであろう．(59) (60) (61) を満たす二項関係を「同値関係」というが，$\sim$ は同値関係である．

問 6.1　等号 $=$ による相等関係は同値関係である．

同値関係 $\sim$ に対して，集合 $\mathcal{C}^1(f)=\{g\,;g\sim f\}$ を f の同値類という．$f\in\mathcal{C}^1(f)$ である．$\mathcal{C}^1(f)$ の元を f の同値類の代表元という．代表元は f でなくてもよいが，われわれの立場では，f との違いを識別することができないのである．

問 6.2　$f\in\mathcal{L}^1(I)$ に対し，

$$\mathcal{C}^1(f)=\{\,f_1\in\mathcal{L}^1(I)\,;\,f_1\sim f\}$$

とおく．$f,\,g\in\mathcal{L}^1(I)$ に対し，$\mathcal{C}^1(f)=\mathcal{C}^1(g)$ か $\mathcal{C}^1(f)\cap\mathcal{C}^1(g)=\emptyset$ のいずれか一方が必ず成り立つ．さらに，

$$\mathcal{C}^1(f)=\mathcal{C}^1(g) \quad \Longleftrightarrow \quad f\sim g$$

である．

問 6.3　$f,\,f_1,\,g,\,g_1\in\mathcal{L}^1(I)$ とする．$f\sim f_1,\,g\sim g_1$ ならば，1 次結合に対し $a\,f+b\,g\sim a\,f_1+b\,g_1$ となることを示せ（ただし，$a,\,b$ はスカラー）．

[84]（反射性）は 2 点間の距離が 0 ならば，実は，2 点は一致しているという要請である．（対称性）は，2 点間の距離が，どちらの点から測っても一致していることの要請である．（三角性）は，3 点が定める平面内で，この三角形の 2 辺の長さの和が第三辺の長さよりも大きいことの要請である．

[85]$\sim$ は “ $=$ $(a.e.)$ ”のことである．

つぎの補題は，上の議論から明らかである．

補題 6.4　$f \in \mathcal{L}^1(I)$ に対し，$\|f\|_1 = 0$ ならば $f \sim 0$ である（ただし，0 は関数としては $\equiv 0$ のものを表すとする）．

この補題の意味は，$\|\cdot\|_1$ がノルムになるということである．すなわち，(49) において，$\|f\|_1 = 0$ となる f が $f \sim 0$ の場合に限定されるが，このような f は 0 と考えるという了解が成り立ったからである．

問 6.4　$f \sim g$ ならば $\|f\|_1 = \|g\|_1$ である[86]．

注意 6.2　同値類全体の集合を

$$\mathcal{L}^1(I)/\sim\, = \{\mathcal{C}^1(f)\,;\, f \in \mathcal{L}^1(I)\} \tag{62}$$

と表す．$\mathcal{C}^1(0) = \mathcal{N}^1(I)$ であり，問 6.3 により，$\mathcal{C}^1(f)$ と $\mathcal{C}^1(g)$ の 1 次結合 $a\mathcal{C}^1(f) + b\mathcal{C}^1(g)$ を $\mathcal{C}^1(af + bg)$ によって定義できることがわかる．すなわち，$\mathcal{L}^1(I)/\sim$ は線形空間になり，$\mathcal{N}^1(I)$ がゼロ・ベクトルに相当する．さらに，$\|\mathcal{C}^1(f)\| = \|f\|_1$ とおくことは，系 6.1 あるいは問 6.4 により，自然である．このとき，$\|\cdot\|_1$ は線形空間 $\mathcal{L}^1(I)/\sim$ の上のノルムになる．この意味で，ノルム $\|\cdot\|_1$ を伴った線形空間，つまり，ノルム空間[87] $\mathcal{L}^1(I)/\sim$ を $\mathbf{L}^1(I)$ と表し，特に，指数 1 の Lebesgue 空間という．

しかし，ノルムという数学概念の整合性のためだけに，$\mathcal{L}^1(I)/\sim$ を意識し，同値類を表面に出して論じたり考察したりすることは，実際問題として，はなはだわずらわしい．また，各同値類を具体的に記述することそれ自体できることではなく，扱うべき問題の焦点がぼやける可能性も高い．そこで，われわれは，ノルム $\|\cdot\|_1$ を扱うときには，同値類の全体 $\mathcal{L}^1(I)/\sim$ として論ずべきことを承知しつつ，$\mathcal{L}^1(I)$ の中で論じ，しかも，その 2 元 $f(t), f_1(t)$ がほとんどいたるところ等しいならば両者は識別できないと考えて，実質は $\mathcal{L}^1(I)/\sim$ におけるものであるという議論をするのである．この後さらに，得られる結果から $\mathcal{L}^1(I)$ の元としての特定が可能か，あるいは，必要かは，扱う問題の条件から決まることである．したがって，以下の議論では，$\mathbf{L}^1(I)$ と書いても $\mathbf{L}^1(I) = \mathcal{L}^1(I)/\sim$ は，特に必要がない限り，表に出さず，$\mathcal{L}^1(I)$ で流用する．すなわち，ここでの記法 $\mathbf{L}^1(I)$ と $\mathcal{L}^1(I)$ は本来違う意味を表すものではあるが，混用することで支障は生じない．

かくて，$\mathcal{L}^1(I)$ は $d(f,g) = \|f - g\|_1$ によって距離が定義できる（と解される）ことがわかった．距離があれば，距離に応じた「収束」が意味を持つ．すなわち，関数列 $f_n \in \mathcal{L}^1(I), n = 1, 2, 3, \cdots$ と $f \in \mathcal{L}^1(I)$ に対し，

$$\|f_n - f\|_1 \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f_n \text{ は } f \text{ に収束する}$$

[86] 系 6.1 の言い換えである．
[87] 注意 6.1 参照．

と定めればよい．$\{f_n\}$ は収束列であり，f はその極限である．したがって，

$$\lim_{n,\,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_1 = 0$$

が成り立つ．一方，$\{f_n\}$ 自体の極限の有無は問わずに，上の関係式が成立するとき，$\{f_n\}$ は（$\mathcal{L}^1(I)$ の）基本列あるいは Cauchy 列といわれる．詳しくいうと，$\{f_n\} \subset \mathcal{L}^1(I)$ は，任意の $\epsilon > 0$ に対し，適当な番号 $N(\epsilon)$ が

$$\|f_n - f_m\|_1 < \epsilon, \quad n,\, m \geq N(\epsilon) \tag{63}$$

が成り立つようにえらべるときに，Cauchy 列といわれる．なお，$N(\epsilon)$ は

$$\epsilon > \epsilon' \implies N(\epsilon) < N(\epsilon') \quad \text{かつ} \quad \lim_{\epsilon\to 0} N(\epsilon) = \infty$$

を満たすようにとれる．

定理 6.1 $\mathcal{L}^1(I)$ の Cauchy 列は収束する．すなわち，Cauchy 列 $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^1(I)$ に対し，

$$\|f_n - f\|_1 \to 0, \quad n \to \infty$$

が成り立つ $f \in \mathcal{L}^1(I)$ が必ずある．

[証明] (63) より，関数列 $\{f_n\}$ は測度収束する．実際，任意の $\delta > 0$ に対して

$$S_{nm}(\delta) = \{\, t \in I\,;\, |f_n(t) - f_m(t)| \geq \delta \,\}$$

とする．確かめるべきことは，

$$\lim_{n,\,m\,\to\,\infty} |S_{nm}(\delta)| = 0$$

である．ところが，

$$\delta\,|S_{nm}(\delta)| \leq \int_I |f_n(t) - f_m(t)|\,dt = \|\,f_n - f_m\|_1$$

だから，これは明らかである．したがって，命題 3.12 より，I の上の可測関数 $f(t)$ があって，$\{f_n\}$ は f に測度収束し，命題 3.11 により，$f_n(t)$ の適当な部分列が $f(t)$ にほとんどいたるところ収束する．

他方，(63) の条件から，$k = 1, 2, \cdots$ に対し，$n_k = N(2^{-k})$ として，$\{f_{n_k}\}$ を考えよう．f_{n_k} も f に測度収束し，したがって，$f_{n_k}(t)$（の適当な部分列）は $f(t)$ にほとんどいたるところで収束する．また，n_k のとり方から

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

である．したがって，

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)| + |f_{n_1}(t)|$$

とおくと，$g(x)$ は I 上積分可能で

$$\int_I g(t)\,dt \leq \int_I |f_{n_1}(t)|\,dt + 1$$

となる．さらに，

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\big) + f_{n_1}(t)$$

が適当な零集合を除いて成り立つから，$|f(t)| \leq g(t)$ および

$$f(t) - f_{n_\ell}(t) = \sum_{k=\ell}^{\infty} \big(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\big)$$

となる．以上から，$f(t)$ は I 上積分可能で，しかも，

$$\|f - f_{n_\ell}\|_1 \leq \sum_{k=\ell}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < 2^{-\ell}$$

が従う．さらに，$n \geq N(2^{-\ell})$ ならば，

$$\|f - f_n\|_1 \leq \|f - f_{n_\ell}\|_1 + \|f_{n_\ell} - f_n\|_1 < 2^{-\ell+1}$$

となる．すなわち，定理 6.1 が証明された．

問 6.5　f_n，f は定理 6.1 の文言中のものとする．$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$ となることを示せ．

問 6.6　$a(x) \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ を反復した合成積（命題 5.1）

$$f_1 = a,\ f_2 = a * f_1,\ \cdots,\ f_{n+1} = a * f_n,\ \cdots$$

を考える．$\|a\|_1 < 1$ ならば，$\{f_n\}$ は $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ の Cauchy 列である．極限となる元は何か．

定理 6.1 は，$\mathcal{L}^1(I)$（正確には $\mathbf{L}^1(I)$）がノルム $\|\cdot\|_1$ に関して完備であることを意味する．完備性は Lebesgue 積分の考えなしでは成り立たない概念であるが，もともとは，実数を全体として把握したときに，その重要な性質として認識されたものである．$\mathbf{L}^1(I)$ には，この意味で，実数のすべての性質が反映していると言えるであろう．

6.2　Banach 空間について

注意 6.1 において，ノルム空間を説明した．$\nu(\cdot)$ をノルムとするノルム空間 $\mathbb{X}$ のベクトルの列 $\{\mathbf{x}_n\}$ は $\lim_{n,m\to\infty} \nu(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m) = 0$ のとき Cauchy 列

といわれる．任意の Cauchy 列 $\{\mathbf{x}_n\}$ に対して極限 $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ がある，すなわち，$\lim_{n\to\infty} \nu(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}) = 0$ が成り立つとき，このノルム空間は完備といわれる．完備なノルム空間は特に Banach 空間といわれ，関数解析の主要な対象になる．定理 6.1 は，$\mathbf{L}^1(I)$ が Banach 空間であるという主張になる．

命題 6.1　区間 I 上の指数 1 の Lebesgue 空間 $\mathbf{L}^1(I)$ は，ノルム

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)|\,dx \quad (f \in \mathbf{L}^1(I))$$

によって[88]，Banach 空間になる．

完備性の効能を示すものとして，Banach の縮小写像の原理を挙げる．

命題 6.2　$\mathbb{X}$ はノルム $\nu(\cdot)$ の Banach 空間とする（注意 6.1 参照）．$\mathbb{X}$ の元を $\mathbb{X}$ にうつす写像 T であって，適当な係数 $c > 0$ のもとで，すべての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$ に対し，

$$\nu(\,T\mathbf{x} - T\mathbf{y}\,) \le c\,\nu(\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,) \tag{64}$$

が満たされるものを考える．$0 < c < 1$ のとき，写像 T は縮小写像と呼ばれ，係数 c は縮小率といわれる．縮小写像 T には一意的に定まる不動点，すなわち，$T\mathbf{u} = \mathbf{u}$ を満たす $\mathbf{u} \in \mathbb{X}$ がただ一つ存在する．

まず，不動点があるとしたら，ただ一つであることを確かめよう．$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{X}$ は縮小写像 T の不動点，つまり，$T\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$，$T\,\mathbf{v} = \mathbf{v}$ を満たす点とする．(64) により，

$$\nu(\,\mathbf{u} - \mathbf{v}\,) \le c\,\nu(\,\mathbf{u} - \mathbf{v}\,), \quad 0 < c < 1,$$

すなわち，$\nu(\,\mathbf{u} - \mathbf{v}\,) = 0$ となるから，$\mathbf{u} = \mathbf{v}$ である．

つぎに，不動点の存在を示す．ここで，完備性が利用される．まず，何でもよいから $\mathbb{X}$ の元をとり，$\mathbf{x}_0$ とする．次に，$\mathbf{x}_1 = T\,\mathbf{x}_0$ とする．以下，続けて，$\mathbf{x}_{n+1} = T\,\mathbf{x}_n,\ n = 1, 2, \cdots$，とおく．こうして得られた $\{\mathbf{x}_n\}$ は Cauchy 列をなす．実際，$n \ge 1$ ならば，$\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n = T\,\mathbf{x}_n - T\,\mathbf{x}_{n-1}$ だから，(64) により，

$$\nu(\,\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\,) \le c\,\nu(\,\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\,)$$

である．したがって，

$$\nu(\,\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\,) \le c^n\,\nu(\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\,)$$

となる．これより，$n > m$ ならば，

$$\nu(\,\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\,) \le \sum_{k=m}^{n-1} c^k\,\nu(\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) < \frac{c^m}{1-c}\,\nu(\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$$

[88]既述のように，いちいち同値類 $\mathcal{C}^1(f)$ を明記するのは煩わしく，ここでも代表元 f でそのまま流用する．f が関数を表すか，それを含む同値類を表すかは文脈で判断できるはずである．

となるから，$\{\mathbf{x}_n\}$ は Cauchy 列である．完備性により，極限 $\mathbf{w} \in \mathbb{X}$ があり，$\lim_{n\to\infty} \nu(\mathbf{x}_n - \mathbf{w}) = 0$ となる．しかも，$T\,\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n+1}$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\nu(\,T\,\mathbf{w} - \mathbf{w}\,) \leq& \nu(\,T\,\mathbf{w} - T\,\mathbf{x}_n\,) + \nu(\,\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{w}\,)\\ &\leq c\,\nu(\,\mathbf{w} - \mathbf{x}_n\,) + \nu(\,\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{w}\,)\end{aligned}$$

だから，$T\,\mathbf{w} = \mathbf{w}$ が成り立つ．すなわち，$\mathbf{w}$ が求めるべき不動点 $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ に他ならない．

例 6.1　$\mathbf{L}^1([0,1])$ において，

$$T\,:\,\mathbf{L}^1([0,1]) \ni f(x) \;\mapsto\; x + \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt \in \mathbf{L}^1([0,1])$$

は縮小写像である．実際，$f,\,g \in \mathbf{L}^1([0,1])$ として，

$$T\,f(x) - T\,g(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \{f(t) - g(t)\}\,dt$$

だから，

$$\begin{aligned}\int_0^1 |T\,f(x) - T\,g(x)|\,dx \leq& \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt\right)dx\\ =& \frac{1}{2}\int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt\end{aligned}$$

が得られ，T は縮小率 $\frac{1}{2}$ の縮小写像である．なお，T の不動点が $u(x) = x + \frac{1}{2}$ であることは，代入してみれば，すぐに確かめられる．

問 6.7　$h(x) \in \mathbf{L}^1([0,1])$ とする．写像

$$T\,:\,\mathbf{L}^1([0,1]) \ni f(x) \;\mapsto\; h(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt \in \mathbf{L}^1([0,1])$$

は縮小写像である．不動点を求めよ．

問 6.8　写像

$$T\,:\,\mathbf{L}^1((0,+\infty)) \ni f(x) \;\mapsto\; \mathrm{e}^{-2x} + \int_0^x \mathrm{e}^{-2x+2y}\,f(y)\,dy \in \mathbf{L}^1((0,+\infty))$$

は縮小写像である．不動点を求めよ．

6.3　二乗積分可能な関数の空間

区間 I で定義された**実数値**[89]の可測関数 $f(t)$ で，その 2 乗絶対値 $|f(t)|^2$ が積分可能なもの[90]の全体のなす集合を $\mathcal{L}^2(I)$ で表そう．したがって，$f(t) \in$

[89]複素数値の場合の扱いが必要になることがある．別に述べる．
[90]二乗積分可能または二乗可積分と略称する．

$\mathcal{L}^2(I)$ ならば,

$$\| f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2\,dt} \tag{65}$$

が有限かつ非負の値をとる.

補題 6.5　$f(t)$, $g(t) \in \mathcal{L}^2(I)$ ならば，両者の積 $f(t)\,g(t)$ は積分可能である．しかも,

$$\left|\int_I f(t)\,g(t)\,dt\right| \le \| f\|_2 \,\| g\|_2 \tag{66}$$

が成り立つ.

実際，任意の $r > 0$ に対して,

$$|f(t)\,g(t)| \le \frac{1}{2r}|f(t)|^2 + \frac{r}{2}\,|g(t)|^2$$

である．右辺は積分可能な関数の 1 次結合だから積分可能，したがって，左辺に現れる非負関数も積分可能である．ゆえに,

$$\int_I |f(t)\,g(t)|\,dt \le \frac{1}{2r}\int_I |f(t)|^2\,dt + \frac{r}{2}\int_I |g(t)|^2\,dt$$

となる．右辺の $r > 0$ に関する最小値をとれば，(65) により，(66) が得られる（問 4.9 参照）.

補題 6.6　$f(t)$, $g(t) \in \mathcal{L}^2(I)$ の 1 次結合も二乗積分可能である.

実際,

$$|a\,f(t) + b\,g(t)|^2 \le |a|^2\,|f(t)|^2 + 2\,|a|\,|b|\,|f(t)|\,|g(t)| + |b|^2\,|g(t)|^2$$

であるが，右辺の各項は，第二項も含め，積分可能である.

補題 6.6 により，$\mathcal{L}^2(I)$ は線形空間になる．さらに，補題 6.5 により，任意の $f(t)$, $g(t) \in \mathcal{L}^2(I)$ に対して

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(t)\,g(t)\,dt \tag{67}$$

が意味を持つ．このとき，つぎは明らかであろう.

補題 6.7　任意の f, g, $h \in \mathcal{L}^2(I)$，a, $b \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\langle f, f\rangle = \|f\|_2^2 \tag{68}$$

$$\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle \tag{69}$$

$$\langle a\,f + b\,g, h\rangle = a\,\langle f, h\rangle + b\,\langle g, h\rangle \tag{70}$$

が成り立つ．$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathcal{L}^2(I)$ における内積というべきものである.

系 6.2

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}, \quad f \in \mathcal{L}^2(I) \tag{71}$$

注意 6.3　スカラーが**実数**であるベクトル空間 $\mathbb{X}$ の任意のベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ に対して，実数値の $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が定義されて，正定値性，すなわち，

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

および，対称性と線形性，すなわち，

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad \sigma(a\,\mathbf{x} + b\,\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a\,\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b\,\sigma(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

（$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{X}$，$a$, $b \in \mathbb{R}$ とする）を満たすとき，$\sigma(\cdot\,, \cdot)$ を $\mathbb{X}$ 上の内積という（$\mathcal{L}^2(I)$ における $\langle\,,\rangle$ は，正定値性を満たさない）．内積がいつも定義されるとは限らない．内積が定義されるベクトル空間を内積空間または前ヒルベルト空間という．スカラーが複素数の場合については別に述べる．

問 6.9　任意の f, $g \in \mathcal{L}^2(I)$ に対して，(66)，すなわち，

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2\,\|g\|_2$$

が，積分をいちいち表に出さなくても，性質 (68)(69)(70) を組合わせて導けることを確かめよ．

$\|\cdot\|_2$ はセミノルムの条件を満たす．

補題 6.8　f, g, $h \in \mathcal{L}^2(I)$，a, $b \in \mathbb{R}$ とする．このとき，すなわち，

$$\|f\|_2 \geq 0 \tag{72}$$

$$\|a\,f\|_2 = |a|\,\|f\|_2 \tag{73}$$

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \tag{74}$$

が成り立つ．

実際，(71) に注意して，(68)(69) から (72)(73) は明らかである．(74) を示そう．まず，(68) 〜 (70) から

$$\|f + g\|_2^2 = \langle f + g, f + g\rangle = \langle f, f\rangle + 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle$$

となる．上の第三辺第二項は (66) により $2\,\|f\|_2\,\|g\|_2$ を超えない．したがって，第三辺は $(\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$ ，言い換えれば，$(\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$ を超えない．すなわち，(74) が得られる．

$\mathcal{L}^1(I)$ の $\|\cdot\|_1$ の場合と同様に，$\|\cdot\|_2$ をノルムと解釈するためには，多少の注意が要る．

$$\mathcal{N}^2(I) = \{\, f \in \mathcal{L}^2(I)\,;\, \|f\|_2 = 0\}$$

とおく．さらに，$f, g \in \mathcal{L}^2(I)$ に対し，

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad f - g \in \mathcal{N}^2(I) \tag{75}$$

とおこう．補題 6.3 の $\mathcal{N}^1(I)$ を $\mathcal{N}^2(I)$ に書き換えても成立することは容易にわかるであろう．したがって，(75) の $\sim$ は (58) のものと同様に同値関係であり，(59)(60)(61) が成り立つ．

問 6.10　$\mathcal{N}^1(I) = \mathcal{N}^2(I)$ であることを確かめよ[91]．

補題 6.9　$f, f_1, g, g_1 \in \mathcal{L}^2(I)$ とする．$f \sim f_1$，$g \sim g_1$ ならば，

$$\langle f, g \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle \tag{76}$$

となる．

実際，

$$f(t)\,g(t) - f_1(t)\,g_1(t) = (f(t) - f_1(t))\,g(t) + f_1(t)\,(g(t) - g_1(t))$$

であり，右辺はほとんどいたるところ 0 になる．

(71) から，つぎが従う．

系 6.3　$f, f_1 \in \mathcal{L}^1(I)$ とする．$f \sim f_1$ ならば，$\|f\|_2 = \|f_1\|_2$ である．

以上の結果，$\mathcal{L}^1(I)/\sim$ と全く同様に，$\mathcal{L}^2(I)$ の同値類

$$\mathcal{C}^2(f) = \{\, f_1 \in \mathcal{L}^2(I)\,;\, f \sim f_1 \,\}$$

全体の集合 $\mathbf{L}^2(I) = \mathcal{L}^2(I)/\sim$ をベクトル空間として考えられる．さらに，今の場合，内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を，このベクトル空間に (76) に拠って定義することができるのである．しかし，われわれは，ここでも $\mathcal{L}^1(I)$ や $\mathbf{L}^1(I)$ について説明した注意 6.2 と同様に「数学的純潔」よりも「数学的便宜性」を重んじて，特に区別の必要がない限り，$\mathbf{L}^2(I)$ と $\mathcal{L}^2(I)$ を流用し，ほとんどいたるところで等しい関数については違いがあっても識別できないという姿勢をとることにする．

さて，$\mathbf{L}^2(I)$ において $\|\cdot\|_2$ はノルムになるから，$\mathbf{L}^1(I)$ の場合と全く同様に，$d_2(f, g) = \|f - g\|_2$ によって，$f, g \in \mathbf{L}^2(I)$ の距離を定めることができる．

定理 6.1 の類比が成り立つ．

---

[91] $\mathcal{N}(I) = \{\, f(t)\,;\, f(t)$ は I 上で可測，かつ $= 0,\ a.e. \}$ とおくと，$\mathcal{N}(I) \subset \mathcal{L}^1(I) \cap \mathcal{L}^2(I)$ であり，また，$\mathcal{N}^1(I) = \mathcal{N}(I) = \mathcal{N}^2(I)$ となる．

定理 6.2　$f_n \in \mathcal{L}^2(I)$ は $\mathcal{L}^2(I)$ の Cauchy 列，すなわち，(63) を，$\| \ \|_1$ を $\| \ \|_2$ に改めて，満足するものとする．このとき，$f \in \mathcal{L}^2(I)$ であって，$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ を満たすものが存在する．

定理 6.2 により，$\mathbf{L}^(I)$ はノルム $\| \ \|_2$ に関して完備であることがわかる．$\mathbf{L}^2(I)$ のノルムは内積から (71) によって定義されたものであり，このことは $\mathbf{L}^2(I)$ が Hilbert 空間であることを意味する．

定理 6.2 は，定理 6.1 と同様に証明されるが，$\| \ \|_1$ と $\| \ \|_2$ の相違に基づく違いもある．証明は後回しにして，応用例をみよう．

例 6.2　実数列 $\{a_k\,; k=1,2,\cdots\}$，$\{b_k\,; k=1,2,\cdots\}$ は

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < +\infty \tag{77}$$

を満たすとする．また，$a_0 \in \mathbf{R}$ とする．このとき，$I=[0,1]$ として，$\mathbf{L}^2(I)$ の元

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos 2k\pi t + b_k \sin 2k\pi t\} \tag{78}$$

が確定する．実際，(78) の右辺は，

$$f_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos 2k\pi t + b_k \sin 2k\pi t\}, \quad n=1,2,\cdots$$

が $n \to \infty$ のときに，$\mathcal{L}^2(I)$ で収束するならば，その極限関数を表すべきものである．したがって，$f_n(t)$ が収束することを確かめればよい．さて，$m > n$ に対し

$$f_m(t) - f_n(t) = \sum_{k=n+1}^{m} \{a_k \cos 2k\pi t + b_k \sin 2k\pi t\}$$

となるから，

$$\begin{aligned}
\langle f_m - f_n, f_m - f_n \rangle = &\sum_{k,\ell=n+1}^{m} a_k\, a_\ell \,\langle \cos 2k\pi t, \cos 2\ell\pi t \rangle \\
&+ 2\sum_{k,\ell=n+1}^{m} a_k\, b_\ell \,\langle \cos 2k\pi t, \sin 2\ell\pi t \rangle \\
&+ \sum_{k,\ell=n+1}^{m} b_k\, b_\ell \,\langle \sin 2k\pi t, \sin 2\ell\pi t \rangle
\end{aligned}$$

が従う．ところが，

$$\langle \cos 2k\pi t, \cos 2\ell\pi t \rangle = \int_0^1 \cos 2k\pi t \, \cos 2\ell\pi t \, dt = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ \dfrac{1}{2}, & k = \ell \end{cases}$$

であり，同様に，

$$\langle \sin 2k\pi t, \sin 2\ell\pi t\rangle = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ \dfrac{1}{2}, & k = \ell \end{cases}$$

$$\langle \cos 2k\pi t, \sin 2\ell\pi t\rangle = 0$$

だから，結局，

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{m}(|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

となる．(77) より，右辺は $n, m \to \infty$ のときに 0 に収束する．つまり，$\{f_n\}$ は Cauchy 列である．したがって，極限関数 $f(t) \in \mathcal{L}^2(I)$ が存在し，

$$\|f_n - f\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

となる．

問 6.11　区間 I，関数 $f_n(t)$, $f(t)$ を例 6.2 のものとする．任意の $g(t) \in \mathcal{L}^2(I)$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n, g\rangle = \langle f, g\rangle$$

であることを示せ[92]．

問 6.12　$\mathbf{1}$ を $I = [0, 1]$ 上で恒等的に値 1 をとる関数とする．

$$\langle f, \mathbf{1}\rangle = a_0$$

を確かめよ[93]．

問 6.13　$n = 1, 2, \cdots$ として

$$\langle f, \cos 2n\pi t\rangle, \quad \langle f, \sin 2n\pi t\rangle$$

を求めよ．

注意 6.4　例 6.2 およびその後の問 6.11〜問 6.13 は，$\mathcal{L}^2(I)$ に属する関数の Fourier 級数展開に関係するものである．しかし，ここでは深入りしない．Fourier 解析の解説書をご覧いただきたい．

定理 6.2 の証明をしよう．まず，$\mathcal{L}^2(I)$ の関数列 $f_n(t)$ が測度収束することは，基本的には，定理 6.1 の場合と全く同様に示せる．したがって，$f_n(t)$ の測度収束極限 $f(t)$ が存在し，しかも，$f_n(t)$ の適当な部分列が $f(t)$ に

[92] ヒント：$|\langle f - f_n, g\rangle| \leq \|f - f_n\|_2\,\|g\|_2$ を使え．
[93] 問 6.11 を利用せよ．

ほとんどいたるところで収束する．示すべきことは，$f(t) \in \mathcal{L}^2(I)$ および $\|f - f_n\|_2 \to 0,\ n \to \infty$, である．

さて，$\{f_n\}$ は $\mathcal{L}^2(I)$ の Cauchy 列だから，番号の列 $n_1 < n_2 < \cdots$, $n_k \to \infty$ を

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_2 < 2^{-k}$$

が成り立つようにとることができる．さらに，ここで，$f_{n_k}(t)$ は $f(t)$ にほとんどいたるところで収束すると仮定しておくことができる．まず，

$$g(t) = |f_{n_1}(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)| \in \mathcal{L}^2(I)$$

を確かめよう．$m = 1, 2, \cdots$, に対し

$$g_m(t) = |f_{n_1}(t)| + \sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|$$

とおけば，各 $t \in I$ において $g_m(t)$ は単調に増大して $g(t) (\leq +\infty)$ に近づく．しかも，$g_m(t) \in \mathcal{L}^2(I)$，言い換えれば，$g_m(t)^2 \in \mathcal{L}^1(I)$ であって，

$$\|g_m\|_2 \leq \|f_{n_1}\|_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_2 < \|f_{n_1}\|_2 + 1$$

である．ゆえに，$g(t) \in \mathcal{L}^2(I)$ である．他方，

$$f_{n_m}(t) = f_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{m-1} \{f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\}$$

だから，$|f_{n_m}(t)| \leq g(t)$ である．したがって，Lebesgue の優収束定理から $f(t) \in \mathcal{L}^2(I)$ となる．また，ほとんどいたるところで，

$$f(t) = f_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \{f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\}$$

であり，したがって，

$$\|f - f_{n_m}\|_2 \leq \sum_{k=m}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_2 < 2^{-m+1}$$

となる．これから，$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$ を導くのは，定理 6.1 の証明の最終段階と同様の議論に拠ればよい．

注意 6.5　命題 5.3 の類比が $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ の場合にも成り立つ．すなわち，$\omega_k(x)$ を (45) のものとすると，まず，任意の $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ に対し，合成積 $\omega_k * f(x)$ が定義され，

$$\omega_k * f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \quad k > 0, \tag{79}$$

が成り立ち，しかも，$\omega_k * f(x)$ は $\mathcal{C}^\infty$ 級である．さらに，

$$\lim_{k\to 0} \|\omega_k * f - f\|_2 = 0 \tag{80}$$

となる．(79) を見るには，まず，

$$|\omega_k * f(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\omega_k(x-y)}\,\sqrt{\omega_k(x-y)}\,|f(y)|\,dy$$

とかけるが，右辺の二乗は，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_k(x-y)\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_k(x-y)\,|f(y)|^2\,dy$$

で上から抑えられる．しかも，この第 1 因子の値は 1 である．第 2 因子は命題 5.1 により，x の関数として積分可能である．したがって，(79) が成り立ち，しかも，

$$\|\omega_k * f\|_2^2 \le \|f\|_2^2$$

である．$\omega_k * f(x)$ のなめらかさに関しても，例 5.9 と同様にして示される．(80) の検証も，命題 5.3 と同様である．

6.4 Hilbert 空間について

注意 6.3 で，内積空間 $\mathbb{X}$ について説明した．ここで，$\mathbb{X}$ はスカラーが実数である線形空間である．内積に基づき，補題 6.8 の証明と同様に，$\mathbb{X}$ にノルム

$$\nu(\mathbf{x}) = \sqrt{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X}, \tag{81}$$

が定められる．

問 6.14 (81) が $\mathbb{X}$ にノルムを定めることを確かめよ．

さらに，$\mathbb{X}$ がノルム $\nu(\cdot)$ に関して完備であるとき，この内積空間は Hilbert 空間といわれる．

Hilbert 空間は Banach 空間でもあるが，内積の存在が本質的である．内積から，ベクトルの直交性の概念が定義できる．すなわち，($\mathbf{0}$ ではない）ベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ は

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

を満たすとき（内積 σ に関して）直交するといわれ，$\mathbf{x} \perp_\sigma \mathbf{y}$ と表される[94]．古典的な Pythagoras の定理の類比は，

$$\mathbf{x} \perp_\sigma \mathbf{y} \quad \Longrightarrow \quad \nu(\mathbf{x})^2 + \nu(\mathbf{y})^2 = \nu(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2$$

[94]内積 σ が了解されているときは $\perp_\sigma$ を単に $\perp$ とかく．

となる．余弦定理の類比は

$$\nu(\mathbf{x} \mp \mathbf{y})^2 = \nu(\mathbf{x})^2 + \nu(\mathbf{y})^2 \mp 2\,\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

である．これから，

$$\nu(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 + \nu(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 = 2\,(\,\nu(\mathbf{x})^2 + \nu(\mathbf{y})^2\,) \tag{82}$$

および

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4}\,(\,\nu(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 - \nu(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2\,) \tag{83}$$

がしたがう．

命題 6.3　ノルム $\nu(\mathbf{x})$ が (82) を満たすとき，(83) で定められる $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は内積であって，(81) を満足する．

問 6.15　(83) の左辺の σ に対し，

$$|\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq (\,\nu(\mathbf{x}) + \nu(\mathbf{y}))\,\nu(\mathbf{x})$$

が成り立つ[95]．特に，スカラー（実数）a, b に対し，

$$|\sigma(\,(a - b)\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |a - b|\,(\,|a - b|\,\nu(\mathbf{x}) + \nu(\mathbf{y})\,)\,\nu(\mathbf{x})$$

が成り立つ．

[命題 6.3 の証明] ノルムの性質から，$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \nu(\mathbf{x})^2$ および $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ は明らかである．また，$\sigma(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = 0$ も容易である．(82)(83) を利用して，

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sigma(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = 2\,\sigma\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{z}}{2}, \mathbf{y}\right), \quad \mathbf{x},\, \mathbf{y},\, \mathbf{z} \in \mathbb{X}, \tag{84}$$

の成立がわかる．特に，$\mathbf{z} = -\mathbf{x}$ とすれば，$\sigma(-\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ であり，$\mathbf{x}$ を $2\mathbf{x}$ で置き換えて $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ とすれば $\sigma(2\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2\,\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が得られる．したがって，(84) は

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sigma(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y})$$

となる．さらに，自然数 m, n に対し，

$$\frac{n}{2^m}\,\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma(\frac{n}{2^m}\,\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

の成立も容易にわかる．任意の実数 a は $\frac{m}{2^n}$ （n, m ：自然数）の形の数で近似される．したがって，問 6.15 によれば，

$$\sigma(\,a\,\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a\,\sigma(\,\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

となる．すなわち，σ が内積であることが確かめられたことになる．

注意 6.6　Hilbert 空間に関する詳しい議論はここでは論じない．関数解析の解説書をご覧いただきたい．

[95] ν がノルムということだけによる．(82) には無関係．

6.5　本質的に有界な関数の空間

最後に，区間 I 上の有界な可測関数 $f(t)$ について見直しておこう．$f(t)$ は，適当な $M>0$ に対し，集合 $\{\, t\in I\,;\, |f(t)|>M\,\}$ が零集合になるとき，本質的に有界といわれる．もちろん，有界な関数は本質的に有界である．区間 I 上の本質的に有界な可測関数全体のなす集合を $\mathcal{L}^\infty(I)$ と表そう．$f\in\mathcal{L}^\infty(I)$ に対し，

$$\|f\|_\infty=\inf\{\, M>0\,;\,\{\, t\in I\,;\,|f(t)|>M\}\text{ は零集合}\,\} \tag{85}$$

とおく．

補題 6.10　$f\in\mathcal{L}^\infty(I)$ に対し，$\|f\|_\infty\ge 0$ である．$\|f\|_\infty=0$ ならば，ほとんどいたるところで $f(t)=0$ である．

実際，前半は (85) から明らかである．$\|f\|_\infty=0$ からは $|f(t)|>0$ となる $t\in I$ の集合が零集合であることが従うから，この零集合を除けば $|f(t)|=0$ である．

系 6.4

$$\mathcal{N}^\infty(I)=\{\, f\in\mathcal{L}^\infty(I)\,;\,\|f\|_\infty=0\}$$

とおくと，$\mathcal{N}^\infty(I)=\mathcal{N}(I)$ である[96]．

補題 6.11　$f(t)\in\mathcal{L}^\infty(I)$ およびスカラー $a\in\mathbb{R}$ に対し， $a\,f(t)\in\mathcal{L}^\infty(I)$ であり，

$$\|a\,f\|_\infty=|a|\,\|f\|_\infty \tag{86}$$

が成り立つ．

実際，$a=0$ なら明らかである．$a\neq 0$ ならば，

$$|a\,f(t)|>M \quad\Longleftrightarrow\quad |f(t)|>\frac{M}{|a|}$$

だから，(86) が成立する．

補題 6.12　$f(t),\,g(t)\in\mathcal{L}^\infty(I)$ とする．両者の和 $(f+g)(t)=f(t)+g(t)$ も本質的に有界であって，

$$\|f+g\|_\infty\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty \tag{87}$$

が成り立つ．

[96] 脚注 91 を見よ．

実際，$L > 0, M > 0$ に対し，$|f(t)| \leq L$ かつ $|g(t)| \leq M$ ならば $|f(t) + g(t)| \leq L + M$ だから，対偶をとると，集合の包含関係

$$\{\, t;\, |f(t) + g(t)| > L + M \,\} \subset \{\, t;\, |f(t)| > L \,\} \cup \{\, t;\, |g(t)| > M \,\}$$

がわかる．ここで，$L > \|f\|_\infty$，$M > \|g\|_\infty$ ならば，右辺は零集合だから，左辺も零集合である．すなわち，(87) が成り立つ．

以上から，$\mathcal{L}^\infty(I)$ の元 f, g の 1 次結合 $a\,f + b\,g$ も $\mathcal{L}^\infty(I)$ の元になり，$\mathcal{L}^\infty(I)$ が線形空間であることがわかる．また，補題 6.10，補題 6.11，補題 6.12 は，$\|\ \|_\infty$ が $\mathcal{L}^\infty(I)$ の上のセミノルムであることを意味する．さらに，$\mathcal{L}^1(I)$，$\mathcal{L}^2(I)$ の場合と同様に，$f, g \in \mathcal{L}^\infty(I)$ に対し，

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad f - g \in \mathcal{N}(I)$$

とおけば，$\sim$ が $\mathcal{L}^\infty(I)$ の同値関係になることがわかる．しかも，その同値類

$$\mathcal{C}^\infty(f) = \{\, f_1 \in \mathcal{L}^\infty(I)\,;\, f_1 \sim f \,\}$$

の全体 $\mathbf{L}^\infty(I) = \mathcal{L}^\infty(I)/\sim$ を考えると，$\mathbf{L}^1(I)$ や $\mathbf{L}^\infty(I)$ と同様に，$\mathbf{L}^\infty(I)$ は線形空間として解釈できることがわかるであろう．すると，$\|\ \|_\infty$ は $\mathbf{L}^\infty(I)$ の上のノルムとして扱うことができる．この場合も，一旦，このような仕組を確認しておけば，特に必要がない限り，$\mathbf{L}^\infty(I)$ と $\mathcal{L}^\infty(I)$ とを混用し，後者の場合，ほとんどいたるところ等しい元は識別できないとしておくのが便利である．同様に，この了解のもとで，$\mathcal{L}^\infty(I)$ に距離 $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$ を定義できる．

$\mathbf{L}^\infty(I)$ はノルム $\|\ \|_\infty$ に関して完備である．すなわち，$\mathbf{L}^\infty(I)$ は Banach 空間になる．

定理 6.3　$f_n(t) \in \mathcal{L}^\infty(I)$ （$n = 1, 2, \cdots$）は Cauchy 列をなすとする．このとき，$f(t) \in \mathcal{L}^\infty(I)$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ が成り立つ．

実際，$f_n(t)$ が $\mathcal{L}^\infty(I)$ の Cauchy 列であることから，命題 3.12 の仮定を満足することが容易にわかる．したがって，測度収束の極限関数 $f(t)$ が存在する．この $f(t)$ が求めるものであり，必要な収束の条件を満足することを示すことができる．

問 6.16　$n \to \infty$ のとき，$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ となることを確かめよ．

$\mathcal{L}^1(I)$，$\mathcal{L}^2(I)$，$\mathcal{L}^\infty(I)$ は，異なる空間である．これらの関係に深入りするのは，本稿の水準にそぐわないが，簡単な関係は示すことができる．

命題 6.4　包含関係

$$\mathcal{L}^1(I) \cap \mathcal{L}^\infty(I) \subset \mathcal{L}^2(I)$$

が成り立つ．

実際，$f(t) \in \mathcal{L}^1(I) \cap \mathcal{L}^\infty(I)$ として，$M > 0$ を $\{t \, |f(t)| > M\}$ が零集合であるときに，不等式

$$\int_I |f(t)|^2 \, dt \le M \int_I |f(t)| \, dt \tag{88}$$

が成立すること，すなわち，$\|f\|_2^2 \le \|f\|_1 \, \|f\|_\infty$ を示せばよい．

問 6.17　$f \in \mathcal{L}^1(I) \cap \mathcal{L}^\infty(I)$ に対し，同値類の包含関係

$$\mathcal{C}^1(I) \cap \mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^2(I)$$

が成り立つことを確かめよ．

命題 6.5　I が有界区間（例えば，$[0,1]$）ならば，包含関係

$$\mathcal{L}^\infty(I) \subset \mathcal{L}^2(I) \subset \mathcal{L}^1(I)$$

が成り立つ．

実際，このとき $1 \in \mathcal{L}^1(I) \cap \mathcal{L}^\infty(I)$ である．したがって，$f \in \mathcal{L}^2(I)$ ならば,

$$\int_I |f(t)| \, dt = \langle |f|, 1 \rangle \le \sqrt{\|f\|_2} \, \sqrt{\|1\|_2}$$

すなわち,

$$\|f\|_1 \le \sqrt{|I|} \, \sqrt{\|f\|_2}, \quad f \in \mathcal{L}^2(I) \tag{89}$$

が成り立つ．つぎに，$f \in \mathcal{L}^\infty(I)$ ならば，$M > 0$ を $\{t; |f(t)| > M\}$ が零集合になる任意のものとして,

$$\int_I |f(t)|^2 \, dt \le M^2 \int_I 1 \, dt = M^2 \, |I|$$

すなわち,

$$\|f\|_2 \le \sqrt{|I|} \, \|f\|_\infty, \quad f \in \mathcal{L}^\infty(I) \tag{90}$$

が成り立つ．

問 6.18　I は有界区間とする．$f \in \mathcal{L}^\infty(I)$ に対し，同値類の包含関係

$$\mathcal{C}^\infty(f) \subset \mathcal{C}^2(I) \subset \mathcal{C}^1(I)$$

の成立を確認せよ．

7　補遺

7.1　Lebesgue 測度のより詳しい性質若干

7.2　Borel 測度について

7.3　抽象測度

索 引