教材研究

# こんな確率がわかったらおもしろい

太　田　　敏　之*

要約

本研究の目的は，数学嫌いの生徒が増えているなか，生徒に世の中に数学がどのように使われているのかを授業を通じて伝えることで，数学に少しでも興味を持ってもらうことである．今回は数ある単元のなかから確率をとりあげた．最近流行しだした宝くじの一種であるナンバーズは，順列組合せから確率を扱うのにとてもよい教材である．相手のＥＳＰカードを予想する実験は，よりゲーム的要素が強く興味をひくものである．また席順という身近な話題から確率を感じさせることもよいことである．今回はこの３つの教材とその授業法について研究した．

## 1．研究のねらい

確率は身近なところに存在しているようであるが，生徒にとって，やはり「確率を勉強して何の役に立つの？」という疑問が大きいようである．実際教科書にのっているさいころやトランプの確率は，わかったところで何の役に立つのかをあまり実感できないので，この疑問への解答に困るところである．そこで，生徒に確率を学ぶ意義を感じさせるために,「こんな確率がわかったら便利だ」という教材の具体例と授業法を研究した．

## ２．研究の内容

### （1）ナンバーズの買い方

最近普通の宝くじよりも手軽に買えるナンバーズという宝くじがはやっている．これは，４ケタ（３ケタ版もある）の好きな数を書いて投票し，当たったら配当総額を当たった票数で割ったものが配当金になるというしくみのくじである．買い方には大きくわけて，数字の順番も当てなくてはならないストレートと，４つの数字の組合せだけを当てるボックスとがある．これが「順列と組合せ」の単元でうまく扱えるのである．

ところで当選番号は，４つとも違う数字からなる数の時もあれば，４つのうち２つの数字が同じであるような数であったり，場合によっては４つとも全部同じ数字である数になることだってあるわけである．ストレートで買うのならばその番号をぴたりと当てるわけだから問題はないが，ボックスで買うとなると買う数の種類によって当たる確率が違ってくるのである．

**①　ボックスの配当金額**

当選番号が４つとも違う数字の数の時と４つのうち２つの数字が同じ数の時でストレートの配当金額が偶然にも同じ（配当は当たった票数によって変動するが）だったとすると，ボックスの配当金額は同じ数字を含んでいる方が高くなる．これは同じ数字が含まれるとボックスで当たる確率がさがるからである．このことについてそれぞれの当たる確率を計算して考察してみることにする．

㋐）ストレートで買った時当たる確率

４ケタの数なので，確率は 1/10000 である．

㋑）ボックスで買った時当たる確率

ある数をボックスで買った時，その数が当たる確率と配当は，買った４ケタの数の種類によって違ってくるのである．その種類は次の５つが考え

*埼玉県立浦和西高等学校

られる．

a) ４つとも数字が違う数を買った場合

例えば 1234 をボックスで買うと，当選番号が 1234, 1243, . . , 4321 と ４！＝24 通りのどの数であっても当たりになるので，当たる確率は 24/10000 よって配当はストレートの 1/24 になる．

b) ４つのうち２つの数字が同じ数を買った場合

例えば 1233 をボックスで買うと，当選番号が 1233, 1323, . . , 3321 と ${}_4C_1 \times {}_3C_1 = 12$ 通りのどの数であっても当たりとなるので，当たる確率は 12/10000 よって配当はストレートの 1/12 になる．

c) 同じ数字が２つずつの数を買った場合

例えば 1122 をボックスで買うと，当選番号が 1122, 1212, . . , 2211 と ${}_4C_2 = 6$ 通りのどの数でも当たりなので，当たる確率は 6/10000 よって配当はストレートの 1/6 になる．

d) ４つのうち３つの数字が同じ数を買った場合

例えば 1222 をボックスで買うと，当選番号が 1222, 2122, 2212, 2221 の４通りのどの数でも当たりなので、当たる確率は 4/10000 よって配当はストレートの 1/4 になる．

e) ４つとも数字が同じ数を買った場合

例えば 1111 をボックスで買うと，当選番号は 1111 の１通りしかないので当たる確率は 1/10000 よって配当はストレートと同じ．

ｳ)ボックスの買い方の考察

a)のような種類の数は，ストレートで買うと当たる確率が 1/10000 だったのに対して，ボックスで買うと当たる確率が 24/10000 とストレートの 24 倍になるのであるが，そのかわりに配当金は 1/24 になってしまう．それに対して b)のような種類の数であれば，ストレートで買うと当たる確率 1/10000 に対して，ボックスで買うと当たる確率は 12/10000 とストレートの 12 倍にしかならないが，配当金は 1/12 にしかならないですむ．

このことからボックスで買う時，当たる確率は低くても高い配当を狙いたければ，b)～e)のように同じ数字を含めて買えばよく，逆に配当は低くても当たる確率をあげたければ，a)のように同じ数字を含めずに買えばよいことがわかる．

**② 各数字のパターンが当選番号になる確率**

次に，当選番号が a)～e)のどのパターンになるかという確率を考えてみる．

a) ４つとも数字が違う数になる確率

$({}_{10}C_4 \times 24)/10000 = 5040/10000 (\fallingdotseq 1/2)$

b) うち２つの数字が同じ数になる確率

$\{({}_{10}C_3 \times 3) \times 12\}/10000 = 4320/10000$

c) 同じ数字が２つずつの数になる確率

$({}_{10}C_2 \times 6)/10000 = 270/10000$

d) ３つ数字が同じ数になる確率

$\{({}_{10}C_2 \times 2) \times 4\}/10000 = 360/10000$

e) ４つとも数字が同じ数になる確率 10/10000

以上のことから当選番号の出方を考察してみると，a)の場合つまり同じ数字を含まない数が当選番号になる確率が約半分なので，b)～e)の場合つまり同じ数字を含む数が当選番号になる確率が残り約半分である．しかしなんとなく一般には，同じ数字を含まない数を買いたがる傾向があるように思われる．でも実際は確率が約 1/2 ということから，買う人が少なそうな分同じ数字を含めた方が配当がよくなることも考えられ，ボックスで買う時，買う４ケタの数に同じ数字を含めるか含めないかの選択を考えるようにするとさらにおもしろい．また当選番号に同じ数字があるかないかで注目してみるのもおもしろい．

**③ 考察**

実際に世の中にある話題を，順列組合せと確率を使って考えていくことで，興味を持たせることができると思う．ただしナンバーズを知らない生徒はボックスの意味がわかるのに時間がかかると思うので，丁寧に説明する必要があるだろう．授業の最初に３ケタのナンバーズゲームをしてルーに慣れさせるのもよいと思う．

**(2)　ＥＳＰカードを使った授業**

独立な反復試行の単元で，生徒に興味をひかせるために，超能力の透視実験に使われるＥＳＰカードを使って実験を行う．２人くらいで組になって，○，＋，∭ ，□，☆の５種類のマークが書かれた５枚１組のＥＳＰカードを作り，その中から１枚のカードを選んで，それが５つのマークのうちどれかを当てる実験をする．そしてこれを 10 回繰り返して，結果を理論値と比較する．

ＥＳＰカードを使う授業のよい点は，授業の最初にカードを見せることで，生徒の注意をひきつ

けることができる点と，独立な反復試行を，ここまで何度も使われているさいころではなく，新し教具を使うことで，生徒の興味を引くことができるという点である．さらに相手のカードを当てるというゲーム的要素が，今までさいころをふるなどという単純作業的だった確率の実験を一味変えるものとなり，生徒の関心をひけると思う．

（理論値）　10回中ｎ回当たる確率

| n | | 確率 |
|---|---|---|
| 10回 | $(1/5)^{10}$ | ＝1/9765625≒0.00001％ |
| ９回 | ${}_{10}C_1(1/5)^9(4/5)^1$ | ＝8/1953125 ≒0.0004％ |
| ８回 | ${}_{10}C_2(1/5)^8(4/5)^2$ | ＝144/1953125≒0.007％ |

以下，式は省略して確率だけ列記する．

| | | | |
|---|---|---|---|
| ７回 | $1536/5^9$ ≒0.08％ | ６回 | $10752/5^9$≒0.55％ |
| ５回 | $258048/5^{10}$≒ 2.6％ | ４回 | $172032/5^9$≒ 8.8％ |
| ３回 | $393216/5^9$ ≒20.1％ | ２回 | $589824/5^9$≒30.2％ |
| １回 | $524288/5^9$ ≒26.8％ | ０回 | $1048576/5^{10}$≒10.7％ |

### (3)　席順の話

#### ①　カラオケＢＯＸで座る席

(問)「仲のよい６人グループでよくみんなでカラオケに行くとする．ＡくんはひそかにＸさんのことが好きなので，カラオケに行った時はいつもＸさんのとなりにすわりたいのだが，いつもとなりにすわっていたのではみんなにＸさんが好きなことが気づかれてしまう．何回に１回の割合ですわればみんなに気づかれないだろうか？なお，カラオケＢＯＸの席は，横長の長いすとする．」

(解)６つの席から，ＡくんとＸさんがすわる席を２つ選ぶと、その選び方は${}_6C_2$＝１５通り．そのうちとなりあわせなのは５通りなので，ＡくんとＸさんがとなりあう確率は１／３となる．

よって，何の意識をしなくても３回に１回くらいは偶然となりにすわるわけだから，逆に意識していても３回に１回の割合でとなりにすわるようにしていけば，みんなに気づかれないですむというわけである。

この話の後，全部の人数をｍ人としたときの一般式，$(m-1)/{}_mC_2=2/m$を考えさせるとよい．さらに，キャンプファイアーで円を作った時に好きな人と手がつなげる確率などへと発展させていくことができる．この場合の一般式は，確率は増えて，$m/{}_mC_2=2/(m-1)$となる．

#### ②　席がえ

(問)「教室での席がえで好きな子のとなりにならないかなと願うこともあると思う．席がえで好きな子のとなりにすわれる確率を求めてみよう．」

段階的に，a)３×３人，４×４人，実際の教室に近い７×６人，一般的なｍ×ｎ人の場合（横×縦）と考えさせていく．B)となりになる場合だけでなく，縦に並んでもよい場合，さらに斜めの位置でもよい場合と拡張していく．

考え方は①の場合と同じである．並び方の組みあわせを数えさせてもよいが，法則性を見つけさせて，そこから以下の一般式まで到達できればなおよいであろう．

横）$\{(m-1)n\}/{}_{mn}C_2=2(m-1)/m(mn-1)$

縦）$\{(n-1)m\}/{}_{mn}C_2=2(n-1)/n(mn-1)$

斜）$\{2(m-1)(n-1)\}/{}_{mn}C_2$

$=4(m-1)(n-1)/mn(mn-1)$

横または縦）$2\{2mn-(m+n)\}/mn(mn-1)$

横，縦，斜）$2\{4mn-3(m+n)+2\}/mn(mn-1)$

ちなみに実際の教室に近い７×６人では，横に並ぶ確率は 12/287(≒4.2%)，横または縦に並ぶ確率は 71/861(≒8.2%)，横，縦または斜めに並ぶ確率は 131/861(≒15.2%)となる．

## 3.　まとめ

確率の単元において，世の中にある確率やわかったらおもしろい確率について，教材研究してきたが，普段のさいころやトランプ等にかたよりがちな授業から目先をかえることによって，生徒の興味を引くことができ，少しは確率が役に立つことを感じ取らせることができると思う．また今後も，確率に限らずすべての単元において，身の回りにあるいろいろな数学についての授業を考え，研究実践していくつもりである．

## 4.　参考文献


[1] 阿部裕之，「興味を持たせる確率授業の実践」，埼玉県高等学校数学教育課程研究会誌，1996年，pp.1-9～1-15

[2] 藤村紀夫，「ＥＳＰカードの実験の授業」，数学教室，№540・1996年11月号，1996年，pp.29～32