第２部会（数学Ⅱ）南部地区

# こんな微分・積分がおもしろい

埼玉県立浦和西高等学校　太田　敏之

## １． はじめに（要旨）

生徒に、数学が世の中にどのように役に立っているかを少しでも伝えること、それが生徒の興味を引くことになる。一昨年の三角比、昨年の確率に続いて、今回は微分・積分についての興味を引くような授業実践を研究した。

## ２． 最大容積の箱を作る

生徒を６～７人の６つの班に分け、何の情報も与えず、３０㎝×３０㎝の厚紙を配って、この厚紙を使って容積が最大になるような箱を作らせる。おそらく生徒は一般的な展開図を書くだろうから、その展開図から作られた箱の容積の最大値を求めるのに、微分を使うようにもっていくことが目的となる。一般的な展開図では、容積の最大が１０００ｃｍ$^2$だが、厚紙の使い方の工夫によってはさらに大きな容積の箱を作ることができる。

（１）用意するもの；画用紙（３０㎝×３０㎝)、はさみ、セロテープ

（２）手順；まずは「この厚紙を使って容積が最大になるような直方体を作れ」と問題を出す。
最初、生徒にはこのように考えろなどの情報は与えなかった。
（資料にあるプリントは最後のまとめの時に配った。）
状況に応じて、さいころの展開図の話くらいの情報は与えてみた。

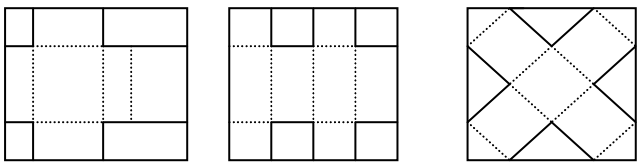
（３）原理；予想される展開図の形（下図参照）

①普通の展開図（最大容積　１０×２０×５　＝　１０００ｃｍ$^2$）

②段ボール型　（最大容積　約8.66×23.66×6.34＝約１２９９ｃｍ$^2$）

③お菓子の箱型（最大容積　$10\sqrt{2}\times10\sqrt{2}\times5\sqrt{2}$＝$1000\sqrt{2}$
＝約１４１４ｃｍ$^2$）

図



①　②　③

（４）結果

実施クラス　浦和西高等学校２年７組、８組（ともに４０人）

a)２－７　Ａ班　①普通の展開図　７．５×７．５×１５＝８４３．７５ｃｍ$^2$
Ｂ～Ｅ班　①普通の展開図の最大　１０００ｃｍ$^2$
Ｆ班　③お菓子の箱型　$7.5\sqrt{2}\times7.5\sqrt{2}\times7.5\sqrt{2}$＝$843.75\sqrt{2}$
＝約１１９３．２４ｃｍ$^2$

b)２－８　Ｇ、Ｈ班　①普通の展開図の最大　１０００ｃｍ$^2$
Ｉ～Ｋ班　作成できず
Ｌ班　③お菓子の箱型の最大　約１４１４ｃｍ$^2$

（５）考察

２－７では、Ａ班が一番早く完成、ひとつの面が正方形になると最大になるのではという発想で微分は使わなかったようだ。Ｂ～Ｅ班は、展開図を考え、微分を使って最大値を求めていた。Ｆ班は展開図の発想はよかったが、立方体が最大なのではという発想から最大のものは作れなかった。が、普通の展開図の１０００ｃｍ$^2$よりは大きい箱ができたため、それを絶賛する形で、プリントでの解説に入ることができた。

２－８では、３つの班が作成できずとちょっとうまくいかなかったが、２つの班が普通の展開図の最大を作成、そしてなんとＬ班はお菓子の箱型の最大のものを完成させ、生徒の発想のすごさに驚かされた。

両クラスとも、似た発想はでていたが、段ボール型の箱を作成することはできなかった。よって、紙が長方形の場合お菓子の箱型は作れないので、普通の展開図より、この段ボール型の展開図で作る方がよいね、と段ボール会社の工夫の話をしたところなかなか生徒の反応がよかった。

（6）　生徒の感想

2－7●いつもと違う授業で楽しかったです。同じ一枚の紙でも、考え方計算の仕方で箱の大きさが変わっていくことにとても関心をもちました。これだけみんなが知っていれば、紙の無駄使いも少し減るのではないかと思いました。（S）
●段ボール箱は、容積を大きくするためにこんなに計算されて作られているのにおどろいた。（H）
●ななめを使って箱をつくる方法はとても感動した。むだがなくおもしろい形だけど使いづらそう。段ボール型は、なんとなく側面の耐久性がいまいちなさそう。でもすばらしい！！（A）
●微分の使い方がわかってよかった。ある班が１０００以上を作った時はびっくりした。こういう作り方もあるのかと思った。（C）
●実験みたいで楽しかった。（A）
●やはり表面積が大きいほど体積は大きいのだろうか？（S）
●お菓子の箱型で、切る部分をもっと減らせば体積が大きくなりそうだと思ったが、逆に小さくなってしまうことがわかった（S）
●もしこういう箱を作ることが将来あったら手を上げて発表したい。（K）
●段ボールとかケーキの箱とかのように、日常の中の物にもいろいろな工夫があるのを知っておもしろいと思った。（H）
●今回の授業は楽しかった。計算問題ばかりではなくこういう授業をすることで、微分が何の役に立つのかとか、どういう場所で役に立つのかとかがよく分かってやる気にもなった。（A）
●導関数にまったく関係ないように見えた箱の作り方にも、応用すれば容積の大きい箱が作れるのがすごいと思った。（T）

2－8●習ったばかりの式をいかして、こういうことに役立つんだなとわかった。確かにお菓子会社や段ボール会社は紙を節約したいのでよい思いつきだ。（H）
●普段何気なく使っている段ボールも、実はすごく研究した結果なんだなと、感心しました。同じ厚紙から容積の違う箱ができて、物は考えようだなと思いました。Ｌ班はすごい！！（T）
●数学を学んでいると、こんなの社会にでてから役に立たないなどとよく言う人がいるが、実際数学は社会を効率的に運営するのに重要な役割を担っているのであると実感した。（O）
●ただの箱でもいろいろ考えて容積が大きくなるように作られているのがはじめてわかった。同じ紙からでも違う大きさの箱が作られるのはびっくりしたでも、見ためだけではどれくらい違うのかよくわからないと思った。（H）
●頭を使う授業だった。僕はこれこそ本当の勉強だと思う。これからも聞いているだけの授業よりもこういう授業がしたい。（W）
●もっと考える時間がほしい。やわらかく考えるって難しい。（S）
●勘がさえてよかった。いらない面積を最小にしたのがよかったと思う。（F）
●おもしろい。こういうのはもっとやってほしい。（Ｉ）
●実際に作ってみて、計算するよりは楽しかったのでよかったです。（S）
●平成教育委員会の気分を味わえた。（A）
●発想と計算の両方の力を養える良い授業だったと思う。（S）

（7）　まとめ

以上生徒の感想から、なかなかうまくいった授業だったと思う。
反省点は、生徒に考えさせる時間がもっととれればということと、班でまとまらせる雰囲気作りが難しかったことである。また切り取る部分の面積が小さいほど体積が大きくなるという勘違いが多かったので、そのあたりももっと説明すればよかったと思う。

## ３． 球の表面積の微分

球の体積　$V=\frac{4}{3}\pi r^3$の微分$V'=4\pi r^2$は球の表面積である。

では、球の表面積　$S=4\pi r^2$の微分$S'=8\pi r$はいったい何を表すのだろうか？
円の面積　$S=\pi r^2$の微分$S'=2\pi r$が円周の長さとなるわけだから、この$8\pi r$も球のどこかの長さなのだろうか？

①原理

まず最初に、球の表面積を円と同じように平面で考えることができるのならば、その平面の周の長さが$8\pi r$なのではないかと考えてみた。そのためには、まず球の表面積を平面として考えるために、球の表面積を積分を使って求める方法について考えてみた。

### （１）　輪を重ねあわせる方法

半径$\sqrt{r^2-x^2}$の円を$-r$から$r$まで重ねあわせたら表面積になるという考え方である。
つまり輪の集まりが表面積という考え方だ。$8\pi r$はこの輪のどこかの部分に関係があるのではないかとまず　考えられる。

まず半径に沿って積分してみると、

$$S=2\int_0^r 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\,dx=4\pi\times\frac{\pi}{4}r^2=\pi^2 r^2$$

と結果が違ってしまう。これは球の極の部分に誤差が生じるからである。

誤差をなくすには、半径ではなく球の表面に沿って積分する必要がある。

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$y=\sqrt{r^2-x^2}$ より

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}r} 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\,dl=4\pi\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

$$=4\pi\int_0^r r\,dx=4\pi r^2$$

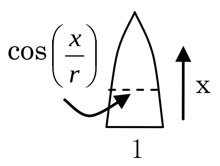
となり、求めることができる。しかしこの観点からは、表面積を平面にした時の周の長さや表面積の増加分を求めることができなかったので、次に観点を変えて考えてみることにした。

### （２）　極座標で積分していく方法

右図のように、球のＹ軸面の回転を$\theta$、Ｘ軸面での回転を$\phi$として、極座標で表す。
Ｘ軸面の$\phi$の位置での半径は、$r\cos\phi$である。よって、その位置でのＸ軸面方向の微小変化は$r\,d\phi$，Ｙ軸面方向の微小変化は$r\cos\phi\,d\theta$なので、表面積は次の式で求められる。

$$S=2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\phi\,d\phi\,d\theta=2r^2\int_0^{2\pi}d\theta=4\pi r^2$$

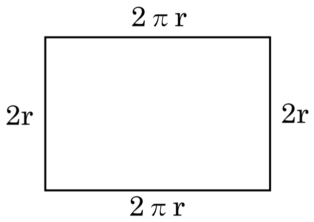
ここで、表面積を平面に開いてみると、右図のように、
極の方にすきまができた図形の集まりと見ることができる。
（図は上半球部分だけ）




ところで、この図形の１つのＹ(横)の長さは、赤道上の長さ１に対して、$\cos(x/r)$の長さで変化している。
つまり赤道上の長さ１に対するこの図形の面積は、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}r} \cos\frac{x}{r}\,dx = \left[ r\sin\frac{x}{r} \right]_0^{\frac{\pi}{2}r} = r$$

となる。よって表面積は、たてが２ｒ、横が２πｒの長方形に近似することができる。
この長方形の面積は、確かに$4\pi r^2$になっている。

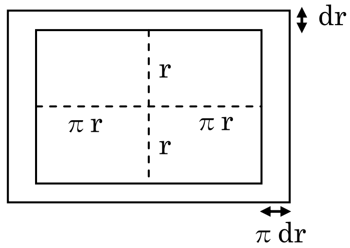



というわけで、右図のように球の表面積を平面にすることができた。しかし、この平面の周の長さは、

　２πｒ×２＋２ｒ×２＝４πｒ＋４ｒ

となり、８πｒにはならない。

これが合わない理由について、考えやすい正多面体で考えてみたところ、瞬間の増加率の考え方で、ｒ→ｒ＋ｄｒとして面積の増加分を考えてみるとうまく合うことがわかった。
（正多面体についての考察は後の参考資料に載せてある。）




よってｒ→ｒ＋ｄｒとすると、右図のように
πｒ→π（ｒ＋ｄｒ）となるから、

（２πｒ×ｄｒ）×２＋（２ｒ×πｄｒ）×２
＝８πｒｄｒ

となり、８πｒが何を意味するかが解明できたわけである。

②考察

半径（正多面体の場合は中心から各面までの距離）で表面積を表した式を微分した式は、表面積を平面に開いた時の各面の周に関係があるが、その平面の中心から各辺までの距離が違う場合、微小増加分にも増加の倍率を考えなくてはならないので、その式は単純に周の長さにはならず、微小増加の倍率を考えた各辺にできる微小面積の総和になると考えられる。

③授業への展開

この内容は、数学Ⅲの内容を含んでいるので、数学Ⅱの授業で全部話すことはできない。実際の授業では今回は、体積の微分が表面積になる話はしたが、球の表面積を微分した８πｒについては話ができなかった。詳しく話をするのなら、数学Ⅲの内容を終えた時にこのテーマをとりあげるとよいが、球の表面積が２πｒ×２ｒの長方形に近似できることの証明をしないならば、数学Ⅱでも扱える内容になるのではないかと思う。

＜協力　吉川弘和先生（浦和西高校）＞

## ４．　まとめ

以上、微分・積分の単元で興味を持たせるような授業について考えてみた。これからも、各単元で興味を持たせるような授業について研究していきたいと思う。


＜参考文献＞　微分のひみつ　黒田　俊郎　三省堂

＜参考資料＞

球の表面積とその微分についての研究において、まず最初に、正多面体の表面積とその微分について考えた。それについてここに資料として載せておく。

①立方体（正六面体）

中心から各面までの距離をｘとする。立方体の一辺の長さは２ｘとなるので、

立方体の体積　　　　　　　　　　　立方体の表面積

$V=8x^3 \rightarrow V'=24x^2$　　　$S=(2x)^2\times 6=24x^2$

となり、体積の微分と、表面積は一致する。

次に表面積の微分を考えてみる。

立方体の表面積

$S=24x^2 \rightarrow S'=48x$

これについて、次の２つの考え方がある。

（１）　これは、立方体の各辺の長さの総和（$2x\times 4\times 6=48x$）である。

（２）　これは、各面までの距離ｘでの瞬間の増加率に相当するわけだから、

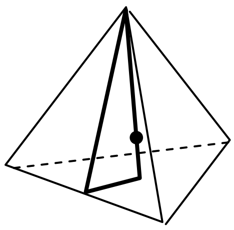
$x\rightarrow x+dx$とすると，　$(2x\times dx)\times 4$辺$\times 6$面$=48x\,dx$の分だけ面積が増えることと一致する。

②正四面体

中心から各面までの距離をｘとする。

正四面体の一辺の長さをａとして右図の太線の直角三角形を考えると、

斜辺は$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$、底辺は$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$より、



高さは三平方の定理より$\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$となる。

よって、中心から面までの距離は、$\dfrac{\sqrt{6}}{3}a\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$

よって、一辺の長さをｘで表すと、$a=\dfrac{12}{\sqrt{6}}x=2\sqrt{6}x$となる。

体積は、$V=a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}a\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3=\dfrac{\sqrt{2}}{12}(2\sqrt{6}x)^3=8\sqrt{3}x^3$

これを微分すると、$V'=24\sqrt{3}x^3$

表面積は、$S=a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\times\dfrac{1}{2}\times 4=\sqrt{3}a^2=\sqrt{3}(2\sqrt{6}x)^2=24\sqrt{3}x^2$より一致する。

ここでも表面積の微分を考えてみる。

$S'=48\sqrt{3}x$

これについても、先程の２つの考え方をしてみる。

（１）　各辺の総和は、$2\sqrt{6}x\times 3\times 4=24\sqrt{6}x$で今度は合わない。

（２）　これも、各面までの距離ｘでの瞬間の増加率に相当するわけだから、

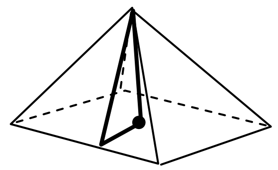
$x\rightarrow x+dx$とすると、$\sqrt{2}x\rightarrow\sqrt{2}(x+dx)$となり、

$$（2\sqrt{6}\,x\times\sqrt{2}\,dx）\times 3辺\times 4個=48\sqrt{3}\,x\,dx$$

の分だけ面積が増える。これは、一致する。
よって、（1）の考え方は間違っていて、（2）の考え方は正しいように思われる。

③正八面体
中心から各面までの距離をｘとする。
右図は正八面体の上半分とする。
正八面体の一辺の長さをａとして右図の太線
の直角三角形を考えると、

斜辺は$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$、底辺は$\dfrac{a}{2}$より三平方の定理から高さは$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$



ｘは相似比を使って、

$$x:\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{a}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ より、 } a=\sqrt{6}\,x$$

$$体積は、V=\frac{1}{3}\times a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a\times 2=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3=\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{6}\,x)^3=4\sqrt{3}\,x^3$$

これを微分すると、$V'=12\sqrt{3}\,x^2$

$$表面積は、S=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times 8=2\sqrt{3}\,a^2=2\sqrt{3}(\sqrt{6}\,x)^2=12\sqrt{3}\,x^2$$

よりこれも一致する。
　ここでも表面積の微分を考えてみる。

$S'=24\sqrt{3}\,x$

$x\to x+dx$とすると、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\to\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+dx)$となり、

$$（\sqrt{6}\,x\times\frac{\sqrt{2}}{2}dx）\times 3辺\times 8個=24\sqrt{3}\,x\,dx$$

の分だけ面積が増えるということでこれも一致する。