「言語活動を取り入れた授業」研究授業指導案

2016.1.21

さいたま市立浦和南高等学校　太田 敏之

１．授業実施日；１月２１日（木）５時間目（５５分授業）２年８組２１名（数学Ⅲ選択者）

２．単元　数学Ⅲ　３章　関数と極限　１節　関数　「逆関数と合成関数」

３．授業方法

数学Ⅲの「逆関数」の概念の理解において、「合成関数」を既習事項とし、「ｆ（ｘ）に対して、ｇ（ｆ（ｘ））＝ｆ（ｇ（ｘ））＝ｘとなるようなｇ（ｘ）をｆ（ｘ）の逆関数といい、このｇ（ｘ）をf^{-1}（ｘ）で表す。」と説明して、言語活動を取り入れて概念の理解を深める授業を行う。

言語活動においては、２人組のペア（３人組）を作り、パートナーと机をくっつけて相談活動や説明活動をすることを柱とする。（この説明活動の形態は、今回の研究授業の時だけではなく、普段の授業からやっている授業形態である。）

指導案の中の生徒の活動において、（相）はペアでの相談活動である。また、（説）はペアでの説明活動であり、「ろ→ま」はペアの廊下側の生徒から窓側の生徒に説明をし、「ま→ろ」はその逆という意味である。

この授業方法のねらいとして以下の４点をあげる。

・パートナーと相談することで、自分では気づかない新たな考え方や視点を知ることができる。
・わからない生徒はパートナーから説明を受けることで理解することができ、学び合う雰囲気が作れる。
・問題の解法を言葉にして相手に説明することで理解を深める。
・受け身の授業から、自ら学び自ら考える授業へと転換することができる。

４．指導計画

⑴　分数関数とそのグラフ・・・・・・・２時間
⑵　無理関数とそのグラフ・・・・・・・２時間
⑶　逆関数と合成関数・・・・・・・・・２時間（本時２／２）

５．本時の学習活動

⑴　ねらい

前時までの授業で、無理関数のグラフをかけることと、合成関数の概念について理解し、２つの関数を合成できるようになっている。また、合成関数の操作について言葉で説明する練習も行っている。

逆関数の定義として、「ｘとｙを入れかえて得られる関数ｙ＝ｇ（ｘ）をｙ＝ｆ（ｘ）の逆関数という」とあるが、これだけでは機械的な操作に頼ってしまい、逆関数の本質的な意味を理解できないのではないかと考えた。そこで、合成関数ｇ（ｆ（ｘ））とｆ（ｇ（ｘ））がともにｘになるような関数を例として、逆関数をはじめに「ｆ（ｘ）に対して、ｇ（ｆ（ｘ））＝ｆ（ｇ（ｘ））＝ｘとなるようなｇ（ｘ）をｆ（ｘ）の逆関数といい、このｇ（ｘ）をf^{-1}（ｘ）で表す。」と説明し、関数の操作を言葉で説明することから逆関数が操作の逆演算であるということについての理解を深めていくことを考える。

(3) 学習過程

時間	学習内容	生徒の活動
５分	１．展開１ (問) 次のｆ（ｘ）とｇ（ｘ）について、合成関数ｇ（ｆ（ｘ））と ｆ（ｇ（ｘ））をそれぞれ求めよ。 (1) $f(x)=2x+3$, $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$ (2) $f(x)=\frac{1}{3}x-4$, $g(x)=3(x+4)$ (1) $g(f(x))=g(2x+3)=\frac{1}{2}(2x+3-3)=\frac{1}{2}\times 2x=x$ $f(g(x))=f(\frac{1}{2}(x-3))=2\times\frac{1}{2}(x-3)+3=x-3+3=x$ (2) $g(f(x))=g(\frac{1}{3}x-4)=3\left(\frac{1}{3}x-4+4\right)=3\times\frac{1}{3}x=x$ $f(g(x))=f(3(x+4))=\frac{1}{3}\times 3(x+4)-4=x+4-4=x$	※（例１）は、前の時間に問題として与え、やってくるように指示している。 (相) ２つの答えをペアで確認する。 ｆ（ｘ）とｇ（ｘ）の関係について考えよ（指名して答えさせる） 答　→同じになる。両方ｘになる。 関係→合成する順番を逆にしても同じになる。 (1)だけ解答を説明。 ＜発問＞ 「ｇ（ｆ（ｘ））とｆ（ｇ（ｘ））はいつも同じになるのだっけ？」 →同じにならない。
10 分	２．展開２ (問) (3) $f(x)=3x+6$, $g(x)=\frac{1}{3}x-6$ $g(f(x))=g(3x+6)=\frac{1}{3}(3x+6)-6=x+2-6=x-4$ $f(g(x))=f(\frac{1}{3}x-6)=3\left(\frac{1}{3}x-6\right)+6=x-18+6=x-12$ 「ｆ（ｘ）に対して、ｇ（ｆ（ｘ））＝ｆ（ｇ（ｘ））＝ｘとなるようなｇ（ｘ）をｆ（ｘ）の逆関数といい、このｇ（ｘ）を$f^{-1}(x)$で表す。」　　$f^{-1}(f(x))=f(f^{-1}(x))=x$ $f(x)=3x+6$ の逆関数は何か？ $f(x)=3x+6$ に対してどのような$g(x)$だと、合成関数が x になると思うか推測してみよう。 $g(x)=\frac{1}{3}(x-6)$のとき、 $g(f(x))=g(3x+6)=\frac{1}{3}(3x+6-6)=\frac{1}{3}\times 3x=x$ $f(g(x))=f(\frac{1}{3}(x-6))=3\times\frac{1}{3}(x-6)+6=x-6+6=x$ よって、$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x-6)$	＜発問＞ ｇ（ｆ（ｘ））を計算した直後に、 「ｆ（ｇ（ｘ））もｘ－４になる？」 →ならない。 いつもｘになるわけではない。 (相)（例１）と（例２）を見比べて考えよ。 →答えがでるかどうか？
10 分	３．展開３ ＜言葉で説明してみよう＞ 次のｆ（ｘ）と$f^{-1}(x)$を言葉で説明してみよう。 問(3)　$f(x)=3x+6$ →　3倍して6を足す。 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x-6)$ →　6を引いて3で割る。 $f(x)$の逆関数ではない$g(x)=\frac{1}{3}x-6$ →　3で割って6を引く。	(説) ｆ（ｘ）は、ろ→ま ｇ（ｘ）は、ま→ろ (相)　ｆ（ｘ）と$f^{-1}(x)$の言葉の説明の関係を、逆関数でないｇ（ｘ）と比べて、何か気づいたことはないか？（指名して答えさせる） →演算も逆で順番も逆

15 分	４．展開４ (問)次のｆ(ｘ)の逆関数を求めよ。 ① $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ $f(x)\to$ xから2を引いて3乗根をとる。 $g(x)\to$ xを3乗して2を足す。 よって、$f^{-1}(x)=x^3+2$ ② $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ $(x\geqq 0)$ $f(x)\to$ xを2乗して2で割る。 $g(x)\to$ xに2をかけて2乗根(平方根)をとる。 よって、$f^{-1}(x)=\sqrt{2x}$ $f^{-1}(f(x))=f(f^{-1}(x))=x$ となるか確かめよ。 ① $f^{-1}(f(x))=f^{-1}(\sqrt[3]{x-2})=\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3+2=x-2+2=x$ $f(f^{-1}(x))=f(x^3+2)=\sqrt[3]{x^3+2-2}=\sqrt[3]{x^3}=x$ ② $f^{-1}(f(x))=f^{-1}(\frac{1}{2}x^2)=\sqrt{2\times\frac{1}{2}x^2}=\sqrt{x^2}=x$ $f(f^{-1}(x))=f(\sqrt{2x})=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2x}\right)^2=\frac{1}{2}\times 2x=x$	それぞれ少し考えさせてから、 相談して解決する。 （指名して答えさせる） ① だけ解答する。
10 分	５．展開５ ②の$y=f(x)$と$y=f^{-1}(x)$のグラフをかく。 ｘ→ｙの操作の逆なので、ｙ→ｘとなるから、 ２つのグラフは直線ｙ＝ｘに関して対称であり、 ２つの式の関係は、ｘとｙを入れかわっている。 関数$y=f(x)$のグラフと$y=f^{-1}(x)$のグラフは、 直線$y=x$に関して対称である。 $y=f^{-1}(x)$ は、$y=f(x)$の x と y を入れかえると 求めることができる。 (例)$y=\frac{1}{2}x^2$ $(x\geqq 0)$ の逆関数を求めよ。 $y=\frac{1}{2}x^2$ $(x\geqq 0)$ をxについて解くと、 $x^2=2y$ より、$x\geqq 0$なので、 $x=\sqrt{2y}$ xとyを入れかえると、$y=\frac{1}{2}x^2$の逆関数は、$y=\sqrt{2x}$	黒板にグラフをかいた後 (相) ２つのグラフの関係は？ →直線ｙ＝ｘに関して対称
5 分	６．演習 （問９）～（問１１）を演習する。	時間がなければ宿題とする。