# 重心についての発展的な教材

埼玉県立大宮武蔵野高校・太 田　敏 之
（神奈川県立横浜国際高校）

## １．はじめに

ゆとり教育による学力低下が叫ばれている。学習指導要領が改訂されることが発表され、算数･数学の授業時数の増加が見込まれているが、それが単に知識を詰め込むだけの詰め込み教育になってしまっては、１９７０年の現代化以降の歴史を繰り返すことにもなりかねない。学力低下を防ぐには、単に内容を増やすだけではなく、生徒が自ら考える活動を充実させる必要があり、そのためには、生徒の操作的活動や、生徒が興味をもつような発展的学習が必要であると考える。

そこで本論では、教材開発のひとつとして、操作的活動も取り入れた、重心についての生徒が興味をもち学習意欲を高める発展的な教材とその授業展開例を提案する。

## ２．四角形の重心

ここでは、重心についての発展的な教材として「四角形の重心の授業」を３つ提案する。

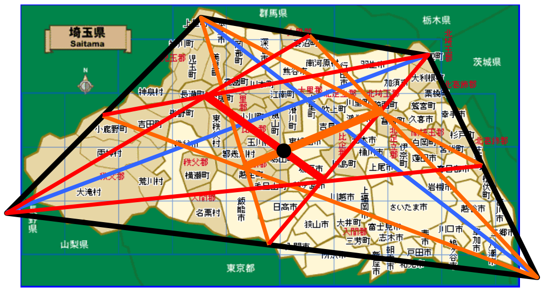
① 四角形のコマを作る授業

厚紙を配り、生徒は自分の好きな形の四角形を切り取り、その厚紙でコマを作ることを目標とする。そこで、まず一般的な円形のコマを紹介し、次に三角形のコマを作るにはどこにコマの芯をつければよいかを考え、「重心」に芯をつければよいことに気づくように展開する。そして、四角形のコマを作るには、四角形の重心を求める必要があることに気づき、四角形の重心はどこかについて考える展開とする。

② 埼玉県の重心を考える授業

生徒に埼玉県の地図を配り、埼玉県の重心をどのように求めたらよいかを考える。そして、埼玉県を三角形には近似しづらいので、四角形に近似することで重心を求めるという発想から、四角形の重心をどのように求めればよいかという授業へと発展していくこととする。

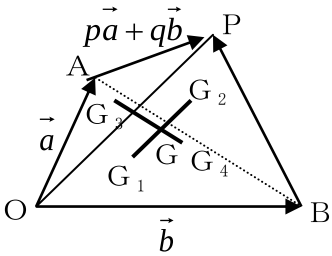
実際に埼玉県の形を四角形に近似して、埼玉県の重心を求めてみると、下図のようになる。




これによると埼玉県の重心は鳩山町付近になる。

③ 四角形の重心をベクトルで考察する授業

四角形の重心を下図のように表し、ベクトルで考察すると、次のようなことがわかる。




１）$G_1G_2 \,/\!/\, OP$、 $G_1G_2 = \dfrac{1}{3}OP$ である。

２）⊿ＯＡＢの面積を $S_1$、⊿ＰＡＢの面積を $S_2$ とおくと、$S_1 : S_2 = 1 : (p+q)$ であることから、$GG_1 : GG_2 = (p+q) : 1$ となる。

生徒はベクトルで考察し、ベクトルを使って上記の性質を見つられることを理解し、四角形の重心を一組の分割三角形の２つの重心と、面積比で求められることを発見する展開とする。

## ３．まとめ

本論では、「四角形の重心」を題材にした、生徒が興味をもち学習意欲を高める発展的な教材やその授業展開例を提案した。当日の研究発表では、学習指導案や実際に授業実践した部分の生徒の反応等も紹介したいと思う。

2008.8.19

# 重心についての発展的な教材（当日補足原稿）

埼玉県立大宮武蔵野高校・太田　敏之
（神奈川県立横浜国際高校）

## １．四角形の重心の作図について

まず、図１のように四角形ＡＢＣＤを⊿ＡＢＣと⊿ＡＣＤに分け、それぞれの三角形の重心$G_1$，$G_2$を作図すると、四角形の重心Ｇは線分$G_1G_2$上に存在する。

次に、図２のように四角形ＡＢＣＤを⊿ＡＢＤと⊿ＢＣＤに分け、それぞれの三角形の重心$G_3$，$G_4$を作図すると、四角形の重心Ｇは線分$G_3G_4$上に存在する。

よって、図３のように、四角形の重心Ｇは、線分$G_1G_2$と線分$G_3G_4$の交点となる。

図１

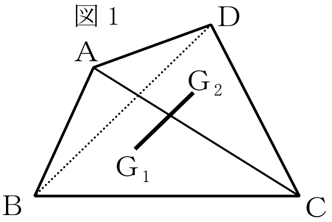



図２

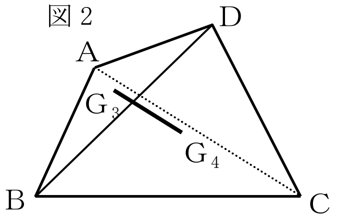
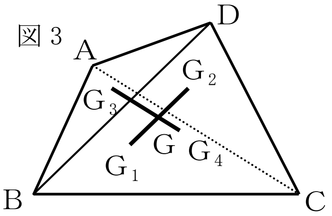
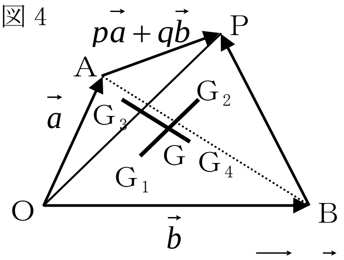



図３




## ２．四角形の重心の位置ベクトル

図４




基準とするベクトルとして、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とすると、$\overrightarrow{AP}=p\vec{a}+q\vec{b}\quad(p>-1,q>0)$とおけるので、

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}(2+p)\vec{a}+\frac{1}{3}(1+q)\vec{b},$$

$$\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}(2+p)\vec{a}+\frac{1}{3}q\vec{b},\quad \overrightarrow{OG_4}=\frac{1}{3}(1+p)\vec{a}+\frac{1}{3}(1+q)\vec{b}$$

となる。

四角形の重心Ｇは線分$G_1G_2$と線分$G_3G_4$の交点になるので、$GG_1:GG_2=s:1-s$
$GG_3:GG_4=t:1-t$　とおくと、

$$\overrightarrow{OG}=(1-s)\overrightarrow{OG_1}+s\overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}(1+s+sp)\vec{a}+\frac{1}{3}(1+sq)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OG}=(1-t)\overrightarrow{OG_3}+t\overrightarrow{OG_4}=\frac{1}{3}(2-t+p)\vec{a}+\frac{1}{3}(t+q)\vec{b}$$

と表せる。よって、$\begin{cases}1+s+sp=2-t+q\\ 1+sq=t+q\end{cases}$からｔを消去すると、$2+s(p+q+1)=2+p+q$より、$s=\dfrac{p+q}{p+q+1}$となる。

ゆえに、$GG_1:GG_2=s:1-s$

$$=\frac{p+q}{p+q+1}:\frac{(p+q+1)-(p+q)}{p+q+1}$$

$=(p+q):1$となる。よって、

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\{1+\frac{p+q}{p+q+1}(1+p)\}\vec{a}+\frac{1}{3}(1+\frac{p+q}{p+q+1}q)\vec{b}$$

と表すことができる。

また、$\overrightarrow{OP}=(p+1)\vec{a}+q\vec{b}$、$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$より、

$$\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(p+1)\vec{a}+\frac{1}{3}q\vec{b},$$

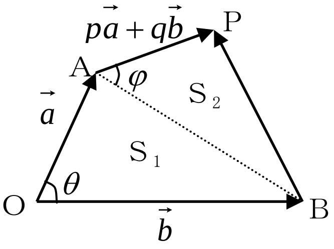
$$\overrightarrow{G_3G_4}=\overrightarrow{OG_4}-\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}$$　なので、

$G_1G_2 /\!/ OP$、$G_1G_2=\dfrac{1}{3}OP$、$G_3G_4 /\!/ AB$、$G_3G_4=\dfrac{1}{3}AB$

の性質があることがわかる。

## ３．分割三角形の面積比

図５




⊿ＯＡＢの面積をＳ$_1$、⊿ＰＡＢの面積をＳ$_2$とおいて、面積比Ｓ$_1$：Ｓ$_2$を求める。

∠ＡＯＢ＝$\theta$、∠ＢＡＰ＝$\varphi$とおくと、

$$S_1=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta,\quad S_2=\frac{1}{2}|p\vec{a}+q\vec{b}||-\vec{a}+\vec{b}|\sin\varphi$$

ここで、$\cos\varphi=\dfrac{(p\vec{a}+q\vec{b})\cdot(-\vec{a}+\vec{b})}{|p\vec{a}+q\vec{b}||-\vec{a}+\vec{b}|}$ より、$\cos\varphi=\dfrac{B}{A}$ と

おくと、$A^2=\left\{|p\vec{a}+q\vec{b}||-\vec{a}+\vec{b}|\right\}^2=|p\vec{a}+q\vec{b}|^2|-\vec{a}+\vec{b}|^2$

$$=\left\{\left(p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2|\vec{b}|^2\right)\left(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)\right\}^2$$

$$=p^2|\vec{a}|^4-4pq(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+q^2|\vec{b}|^4-2p(p-q)|\vec{a}|^2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$+2q(p-q)|\vec{b}|^2\vec{a}\cdot\vec{b}+(p^2+q^2)|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

$$B^2=\left\{(p\vec{a}+q\vec{b})\cdot(-\vec{a}+\vec{b})\right\}^2$$

$$=\left\{-p|\vec{a}|^2+(p-q)\vec{a}\cdot\vec{b}+q|\vec{b}|^2\right\}^2$$

$$=p^2|\vec{a}|^4+(p-q)^2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+q^2|\vec{b}|^4-2p(p-q)|\vec{a}|^2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$+2q(p-q)|\vec{b}|^2\vec{a}\cdot\vec{b}-2pq|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$ から、

$$\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi=1-\frac{B^2}{A^2}=\frac{1}{A^2}(A^2-B^2)$$

$$=\frac{1}{A^2}\left\{(p+q)^2|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(p+q)^2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\right\}$$

$$=\frac{(p+q)^2}{A^2}\left\{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta\right\}$$

$$=\frac{(p+q)^2|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}{A^2}\sin^2\theta$$

よって、$\sin\varphi=\dfrac{(p+q)|\vec{a}||\vec{b}|}{A}\sin\theta$ より、

$$S_2=\frac{1}{2}A\sin\varphi=\frac{1}{2}(p+q)|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=(p+q)S_1$$

ゆえに、$S_1:S_2=1:(p+q)$となる。

また、２．より、

ＧＧ$_1$：ＧＧ$_2$＝$s$ ：$1-s$＝$(p+q)$ ：1 であるため、

ＧＧ$_1$：ＧＧ$_2$＝$S_2:S_1$となるように、重心Ｇの位置を決めればよいことがわかる。

## ＜参考・引用文献＞


[1]中村文則(2000)，「四角形のへそ」，「北海道算数数学教育会高等学校部会研究部数学のいずみ」，
http://www.nikonet.or.jp/spring/heso/heso.htm

[2]太田敏之(2004)，「生徒が数学に興味をもち学習意欲を高めるための指導法の研究」，「平成 15 年度長期研修報告書」.

[3]太田敏之(2008)，「重心･外心についての発展的な教材」，「平成 20 年度埼玉県高等学校数学研究会教育課程研究会全体発表会発表資料」.