重心・外心についての発展的な教材

埼玉県立大宮武蔵野高等学校　太田　敏之

＜要旨＞

「三角形や四角形の重心」と「三角形の外心」を題材にした、「数学Ａ平面図形」や「数学Ｂベクトル」で扱える、生徒が興味をもち学習意欲を高める発展的な教材とその授業展開例を提案する。

１．はじめに

数学Ａで平面図形を必修で指導するようになってから数年がたつが、その内容は、生徒にとって苦手な証明が続いたり、単調に長さや角度を求める問題が多かったりなど、生徒の学習意欲が低下する場面が多いように感じている。

そこで本論では、重心と外心についての生徒が興味をもち学習意欲を高める発展的な教材とその授業展開例を提案する。

２．四角形の重心

ここでは、三角形の重心の発展として、四角形の重心を考察する授業について提案する。

2.1 四角形の重心の作図

まず、図 1 のように四角形ＡＢＣＤを⊿ＡＢＣと⊿ＡＣＤに分け、それぞれの三角形の重心G_1，G_2を作図すると、四角形の重心Ｇは線分G_1G_2上に存在する。

次に、図 2 のように四角形ＡＢＣＤを⊿ＡＢＤと⊿ＢＣＤに分け、それぞれの三角形の重心G_3，G_4を作図すると、四角形の重心Ｇは線分G_3G_4上に存在する。

よって、図 3 のように、四角形の重心Ｇは、線分G_1G_2と線分G_3G_4との交点となる。

図 1

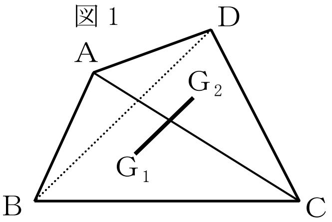


図 2

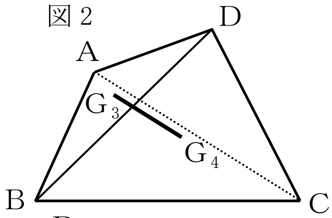
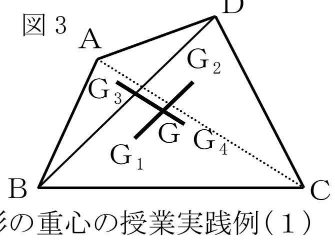


図 3



2.2 四角形の重心の授業実践例(１)

ここでは、四角形のコマを作る授業について提案する。厚紙を配り、生徒は自分の好きな形（長方形以外）の四角形を切り取り、その厚紙でコマを作ることを目標とする。そこでまずは、一般的な円形のコマを紹介し、次に三角形のコマを作るにはどこにコマの芯（竹箸を利用）をつければよいかを考えさせ、「重心」に芯をつければよいことに気づかせる。そして、四角形のコマを作るには、四角形の重心を求める必要があることに気づかせ、四角形の重心はどこかについて考えさせる展開とする。

以下の①から④は、実際の実践授業で、生徒に「四角形の重心はどこか？」という発問をしたときの、生徒の答えの変化である。

① 2 本の対角線の交点
② 対辺の中点を結んだ 2 本の線分の交点
③ 2 つの三角形に分け、その重心を結んだ線分の中点
④ 2 通りに分割した 2 つの三角形の重心を結んだ 2 本の線分の交点

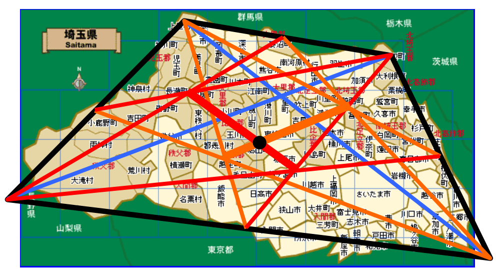
実際にプリントに歪んだ四角形を書いて配布し、生徒が作図して考察すると、まず①では明らかにつりあわないことを感じとることができる。②が違うことを説明（5.4 で証明する。）するのは難しいが、四角形を 2 つの三角形に分割し、三角形の重心を利用して考えるというヒントを与えると、生徒から③の発想がでてくる。しかし、これでも分割した三角形の面積が違う場合はつりあわないことが感じとれる。そこで、三角形の分割の方法が 2 種類あることから、生徒は最終的に④の答えに到達することができる。

2.3　四角形の重心の授業実践例(2)

ここでは、四角形の重心からさらに発展して、 埼玉県の重心を考える授業を提案する。

埼玉県の形を四角形に近似して、埼玉県の重心を求めてみると、図 4 のようになる。

図 4



これによると埼玉県の重心は鳩山町になる。なお、国土地理院で計算して発表している埼玉県の重心は、

北緯 35° 59′ 59″，東経 139° 20′ 40″、埼玉県比企郡鳩山町奥田である。

実際の授業では、三角形の重心を学習したあと、生徒はまず埼玉県の重心の位置はどこかを予想し、次に埼玉県の重心をどのように求めたらよいかを考える。そして、埼玉県を三角形には近似しづらいので、四角形に近似することで重心を求めるという発想から、2.2 での「四角形の重心をどのように求めるか」という授業へと発展していくとよい。

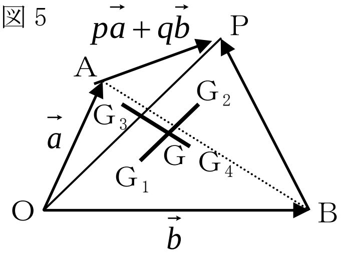
３．四角形の重心のベクトル的考察

ここでは、数学Ｂのベクトルの単元において、三角形の重心の発展として、四角形の重心を考察するための教材を提案する。

3.1 四角形の重心の位置ベクトル

まず、四角形の重心を 2.2 のように考察し、次にその性質について、ベクトルを使って以下のように考察する。

図 5



基準とするベクトルとして、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると、$\overrightarrow{AP}=p\vec{a}+q\vec{b}\quad(p>-1,q>0)$ とおけるので、

$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}(2+p)\vec{a}+\frac{1}{3}(1+q)\vec{b}$，

$\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}(2+p)\vec{a}+\frac{1}{3}q\vec{b}$，$\overrightarrow{OG_4}=\frac{1}{3}(1+p)\vec{a}+\frac{1}{3}(1+q)\vec{b}$

となる。四角形の重心Ｇは線分G_1G_2 と線分G_3G_4 の交点になるので、$GG_1:GG_2=s:1-s$ ，

$GG_3:GG_4=t:1-t$ とおくと、

$$\overrightarrow{OG}=(1-s)\overrightarrow{OG_1}+s\overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}(1+s+sp)\vec{a}+\frac{1}{3}(1+sq)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OG}=(1-t)\overrightarrow{OG_3}+t\overrightarrow{OG_4}=\frac{1}{3}(2-t+p)\vec{a}+\frac{1}{3}(t+q)\vec{b}$$

と表せる。よって、$\begin{cases}1+s+sp=2-t+q\\1+sq=t+q\end{cases}$ から t を消去すると、$2+s(p+q+1)=2+p+q$ より、$s=\frac{p+q}{p+q+1}$ となる。

ゆえに、$GG_1:GG_2=s:1-s=\frac{p+q}{p+q+1}:\frac{(p+q+1)-(p+q)}{p+q+1}$

$=(p+q):1$ となる。よって、

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\{1+\frac{p+q}{p+q+1}(1+p)\}\vec{a}+\frac{1}{3}(1+\frac{p+q}{p+q+1}q)\vec{b}$$

と表すことができる。

また、$\overrightarrow{OP}=(p+1)\vec{a}+q\vec{b}$、$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ より、

$\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(p+1)\vec{a}+\frac{1}{3}q\vec{b}$、

$\overrightarrow{G_3G_4}=\overrightarrow{OG_4}-\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}$ なので、

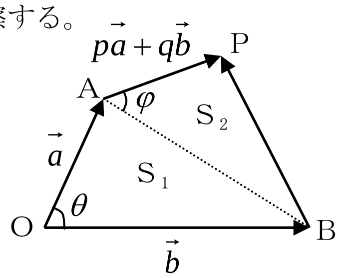
$G_1G_2 \,/\!/\, OP$、$G_1G_2=\frac{1}{3}OP$、$G_3G_4 \,/\!/\, AB$、$G_3G_4=\frac{1}{3}AB$

の性質があることがわかる。

3.2 分割三角形の面積比

次に、$GG_1:GG_2$と分割三角形の面積比との関連について考察する。

図 6



⊿ＯＡＢの面積をS_1、⊿ＰＡＢの面積をS_2とおいて、面積比$S_1:S_2$を求める。

∠ＡＯＢ＝θ、∠ＢＡＰ＝φとおくと、

$S_1=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，$S_2=\frac{1}{2}|p\vec{a}+q\vec{b}||-\vec{a}+\vec{b}|\sin\varphi$

ここで、$\cos\varphi=\frac{(p\vec{a}+q\vec{b})\cdot(-\vec{a}+\vec{b})}{|p\vec{a}+q\vec{b}||-\vec{a}+\vec{b}|}$ より、$\cos\varphi=\frac{B}{A}$ とおくと、$A^2=\left\{|p\vec{a}+q\vec{b}||-\vec{a}+\vec{b}|\right\}^2=|p\vec{a}+q\vec{b}|^2|-\vec{a}+\vec{b}|^2$

$$=\left\{\left(p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2|\vec{b}|^2\right)\left(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)\right\}^2$$

$$=p^2|\vec{a}|^4-4pq(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+q^2|\vec{b}|^4-2p(p-q)|\vec{a}|^2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$+2q(p-q)|\vec{b}|^2\vec{a}\cdot\vec{b}+(p^2+q^2)|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

$$B^2=\left\{(p\vec{a}+q\vec{b})\cdot(-\vec{a}+\vec{b})\right\}^2$$

$$=\left\{-p|\vec{a}|^2+(p-q)\vec{a}\cdot\vec{b}+q|\vec{b}|^2\right\}^2$$

$$=p^2|\vec{a}|^4+(p-q)^2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+q^2|\vec{b}|^4-2p(p-q)|\vec{a}|^2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$+2q(p-q)|\vec{b}|^2\vec{a}\cdot\vec{b}-2pq|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ から、

$$\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi = 1-\frac{B^2}{A^2} = \frac{1}{A^2}(A^2-B^2)$$

$$= \frac{1}{A^2}\left\{(p+q)^2\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - (p+q)^2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\right\}$$

$$= \frac{(p+q)^2}{A^2}\left\{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\theta\right\}$$

$$= \frac{(p+q)^2\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2}{A^2}\sin^2\theta$$

よって、$\sin\varphi = \dfrac{(p+q)\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}{A}\sin\theta$ より、

$$S_2 = \frac{1}{2}A\sin\varphi = \frac{1}{2}(p+q)\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta = (p+q)S_1$$

ゆえに、$S_1 : S_2 = 1 : (p+q)$ となる。

よって、これを利用して、$GG_1 : GG_2 = (p+q):1$ となる点Gを決めればよい。よって、三角形の分割を２通りしなくても、⊿ＯＡＢと⊿ＰＡＢの重心の位置を求め、⊿ＯＡＢと⊿ＰＡＢの面積比を求めれば、四角形の重心の位置を求めることができる。

４．三角形の外心

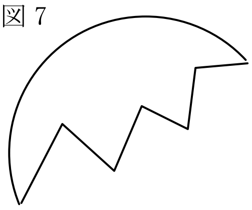
ここでは、三角形の外心の応用として、生徒が興味をもつような話題の教材を提案する。

4.1 欠けたお皿の中心

図７のような､欠けてしまった円形のお皿がある。このお皿は古い時代のもので大変貴重なお皿である。この欠けたお皿をこの度復元することになった。

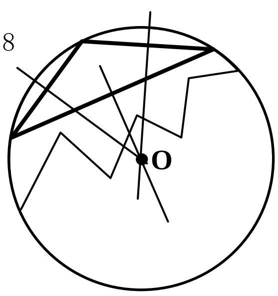
復元するためには、正確にこの円の中心を求めて、欠けてしまった部分の円弧を書く必要がある。どうすればこの円の中心を正確に求められるだろうか？

図７



この問題は、生徒が円弧に内接する三角形を自由に書き、図８のようにその三角形の外心を求めることから、完全な外接円を復元することができるという教材である。

図８



また、さらに外心が三角形の外部にある場合の話や、道路の曲がり具合を表す単位Ｒ（100R＝半径 100ｍの円が描く曲線のこと。）の話題に広げることもできる。

4.2 集合場所はどこがいい？

友達３人が自転車に乗っていて、現在、大宮武蔵野高校、日進駅、大宮駅前ソニックシティの３つの地点にいる。３人で一ヵ所に集まることになった。３人のどの地点からも等距離の地点に集まるとするとき、どこで集まればよいだろうか？

図９

この問題は、外心の作図の練習だけではなく、三角形の３つの頂点からの距離が等しい点が外心であることを印象づける教材である。

５．３種類の重心

ここでは、三角形の重心をさらに発展させた教材として３種類の重心について考察する。違いについて考える授業もおもしろいと思う。

5.1 幾何的重心

図 11 のように、閉曲線で囲まれた図形が密度の一様な薄い素材（重さが面積に比例）でできた板をぶら下げたときの重心を、ここでは幾何的重心と呼ぶこととする。普通、数学ではこの点のことを「重心」と呼んでいる。幾何的重心Ｇは、ベクトルで表すと、図 12 において、$\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b}$ となる。

図 11

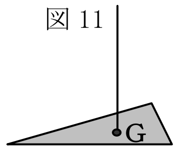
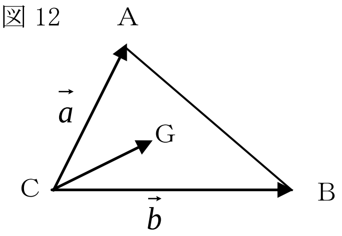


図 12



5.2　物理的重心

図 13 のように、３つの頂点に同じ重さのおもりがあり、それを結んでいるひもや内側の板の重さは無視できるほどの重さである物体をぶら下げたときの重心を、ここでは物理的重心と呼ぶこととする。

点Ａ、Ｂ、Ｃに重さｍのおもりがあるとき、図 14 の直線ＡＣ上で点Ａと点Ｃのつりあいを考えると、ＡＣの中点Ｍに 2ｍの重さのおもりがあるのと同じになる。直線ＭＢ上で点Ｍと点Ｂのつりあいを考えると、(重心からの距離)×(重さ)＝(一定)の関係が成り立つことから、物理的重心Ｐの位置は、ＢＭを

2：1に内分する点になる。

図 13

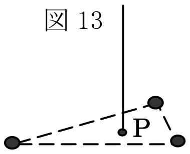
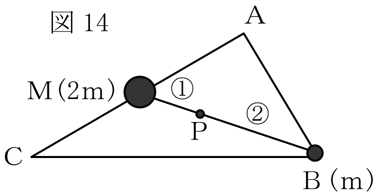


図 14



よって、三角形の物理的重心と幾何的重心は一致することがわかる。

5.3　フレーム重心

図15のように、辺に重さがある図形、例えば金属フレームで作られる図形の重心で、3つのフレームにだけ重さがあり、内側の板の重さは無視できるほどの重さである物体をぶら下げたときの重心を、ここではフレーム重心と呼ぶこととする。

辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢのフレームの重さを、それぞれ辺の長さに比例させて、a，b，c とする。直線ＢＣ上で点Ｂと点Ｃのつりあいを考えると、図16のように、ＢＣの中点Ｌに a の重さのおもりがあるのと同じになる。同様に、ＣＡの中点Ｍにｂ，ＡＢの中点Ｎにｃの重さのおもりがあるのと同じになる。

図 15

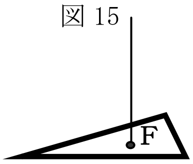
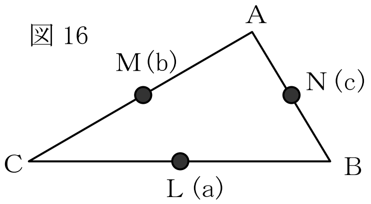
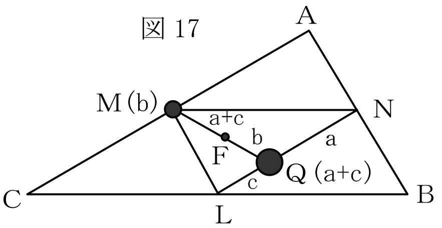


図 16



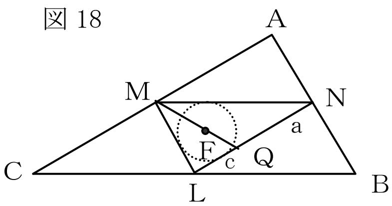
よって、図17のように三角形ＬＭＮを考えて、物理的重心を求めると、ＮＬをａ：ｃに内分する点Ｑにa＋c のおもりがあると考えられるので、フレーム重心Ｆは、ＱＭをｂ：a＋c に内分する点になる。

図 17



また、ＢＣ＝a，ＡＢ＝c より、点Ｌ,Ｍ,Ｎはともに ＢＣ,ＣＡ,ＡＢの中点だから、ＭＮ＝$\frac{a}{2}$，ＭＬ＝$\frac{c}{2}$ より、ＭＮ：ＭＬ＝ａ：ｃで、ＮＱ：ＬＱ＝ａ：ｃであるから、ＭＦは∠ＬＭＮの二等分線になる。同様に考えると、ＮＦも∠ＬＮＭの二等分線になるので、点Ｆは角の二等分線の交点になる。よって図18のように、点Ｆは⊿ＬＭＮの内心である。

図 18



ここで⊿ＡＢＣの重心Ｇは⊿ＬＭＮの重心でもあり、⊿ＬＭＮの内心でもある点Ｆとは、⊿ＬＭＮが正三角形のときのみ一致し、それ以外は一致しない。

これを、ベクトルを用いて比較すると、

$\overrightarrow{CQ} = \frac{c}{2(a+c)}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ より、

$$\overrightarrow{CF} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{CN} + \frac{a+c}{a+b+c}\overrightarrow{CQ}$$

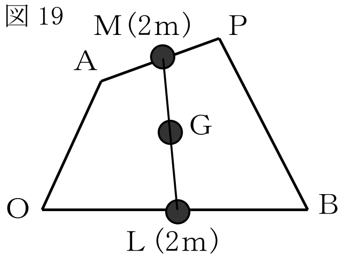
$$= \frac{b+c}{2(a+b+c)}\vec{a} + \frac{a+c}{2(a+b+c)}\vec{b}$$

となる。よって、この点は⊿ＡＢＣが正三角形、つまり $a=b=c$ 、のときだけ、$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ となり、幾何的重心と一致することがわかる。

5.4　四角形の物理的重心

図19のように、四角形の物理的重心は、点Ｏ、Ａ、Ｐ、Ｂに重さｍのおもりがあるときの重心だから、ＡＰの中点Ｌに2m、ＯＢの中点Ｍに2mの重さのおもりがあるときの重心なので、ＬＭの中点Ｇが重心となる。

図 19



$\overrightarrow{AP} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおくと、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}}{2} = \frac{\frac{\vec{b}}{2} + \vec{a} + \frac{p\vec{a}+q\vec{b}}{2}}{2} = \frac{(p+2)}{4}\vec{a} + \frac{(q+1)}{4}\vec{b}$$

となる。これは2.2の「対辺の中点を結んだ2本の線分の交点」であり、この点は四角形が平行四辺形、つまり $p=0, q=1$ のときだけ、$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ となり、幾何的重心と一致することがわかる。

6．まとめ

本論では、「三角形や四角形の重心」と「三角形の外心」を題材にした、生徒が興味をもち学習意欲を高める発展的な教材やその授業展開例を提案した。実際に授業実践したものとまだ授業実践していないものがあるが、当日の研究発表では、学習指導案や実際の生徒の反応等も紹介したいと思う。

＜参考・引用文献＞

[1]中村文則(2000),「四角形のへそ」,「北海道算数数学教育会高等学校部会研究部数学のいずみ」, http://www.nikonet.or.jp/spring/heso/heso.htm

[2]太田敏之(2004),「生徒が数学に興味をもち学習意欲を高めるための指導法の研究」,「平成15年度長期研修報告書」.