数学的モデリングを取り入れた指導法とその教材（３）

埼玉県大宮武蔵野高　太 田　敏 之

１．研究の概要

筆者は一昨年度から，「現実事象を分析して数理的に考察していく数学的モデリングを取り入れた指導法」について研究している．本論では，アメリカの数学教育との比較から「数学的モデリング」について考察し，その教材例を提案する．

２．アメリカの数学教育と日本

戦後の日本の数学教育は，アメリカの進歩主義的(Progressive)な教育の影響を大きく受けた「生活単元学習」であった．また，1970 年頃の日本の数学教育は「現代化」であったが，これもアメリカで科学技術の振興のための算数理科の改善がさけばれた影響で,アメリカをまねて始まっている．それでは現在のアメリカの数学教育はどうなっているかというと，現在のアメリカでは，グラフ電卓やコンピュータを利用し，現実事象との関わりで展開する数学教育が行われているのである．

アメリカのＣＰＭＰ(Core-Plus Mathematics Project)では，「意味ある物(Sense of making)」を生徒が生きているこの現実の事象と関わりを持つ中から数学を学ぶという視点に立っている教育課程を作っている．ＣＰＭＰのカリキュラムは，データを集め，まとめ，解釈し，予測し，検証するという数学的モデリングの教育を目指し，グラフ電卓やコンピュータなどを多用し，教具の利用や協同学習(Collaboration)なども活用した探求型の学習を目指している．また，グラフ電卓，コンピュータ，模型そして紙と鉛筆による式表現というような多重な表現形式を認めた「Multiple Representation」のあり方も提唱している．さらに単発的に現実の事象を事例にあげるだけでは教育効果は期待できないため，ある程度の系統性を考慮したカリキュラムが組まれている．

アメリカの数学教育を模倣した教育の歴史をたどっている日本の数学教育は，今後このような「系統的な数学的モデリング」のカリキュラムを取り入れていくことは十分考えられるのである．

そこで本論では，今後の日本における数学的モデリングのあり方も視野にいれ，つぎの２つの観点で，数学的モデリングを考察することにする．

３．系統的な数学的モデリング

筆者は，昨年度，一昨年度と数学Ｉを担当し，「数と式」「2 次関数」「三角比」の各単元において，1 年間かけて継続的に数学的モデリングを取り入れた指導法を実践してきた.(内容については当日の発表資料で紹介する．）生徒の反応や授業後の感想を分析したところ,「生徒は数学と日常生活との関連性や数学の有用性を感じ，学習意欲を高めた.」など，さまざまな効果をあげることができたと考察することができる．今年度は数学Ⅱと数学Ａを担当するため，この科目でも１年間かけて継続的に実践し，「系統的な数学的モデリング」の形を構築してきたいと考える．

４．予想を重視した数学的モデリングの教材

本論では，数学的モデリングの教材を開発していくにあたって,あらかじめ生徒が結果を予想し，その予想を検証，考察する形で展開する授業形態に着目した.このような教材は,生徒が驚きを感じ,現実の事象を分析する意義を感じることで，数学と日常生活との関連性や数学の有用性を感じることができる教材であると考えたからである．

たとえば，「円錐型のグラスに水を入れたとき，水を半分まで入れたときの量は全体の量の何分の１の量か.」という問題で,相似比 1:2 に対して体積比は 1:8 なので，「8 分の 1」という解答は生徒に驚きを与えるものである.(それ以外の教材については当日の発表資料で提案する．）

＜参考引用文献＞

町田彰一郎ほか(2006)，「現実事象との関わりの中で展開する数学教育に向けて」，「2006 年度数学教育学会春季年会発表論文集」．

発表資料（発表当日用）

系統的な数学的モデリングの実施経過

平成 16 年度に大宮武蔵野高等学校 1 学年（数学Ⅰ）４クラス（習熟度別展開、1 クラス 20 人程度）で、以下のような日程で数学的モデリングを取り入れた授業を行った。

回	日	内容	単元内容	数学的モデリングの分類
①	4 月 15 日	消費税の計算方法	式の計算	日常生活との関連性
②	4 月 21 日	熱膨張率	乗法公式	化学との関連性
③	6 月 24 日	黄金比とシルバー比	２次方程式の利用	現実事象の数量化
④	9 月 3 日	時差の計算	いろいろな関数	地理との関連性
⑤	9 月 6 日	タクシー料金の計算式	いろいろな関数	日常生活との関連性
⑥	9 月 15 日	ソフトボールで高さを測る	２次関数	測定の方法
⑦	9 月 16 日	放物線の役割	２次関数	現象理解
⑧	9 月 29 日	CD の売り上げ分析	２次関数	現実事象の予測
⑨	9 月 30 日	ホームランになるか	２次関数の最大最小	現象理解
⑩	10 月 4 日	雨どいを作るには	２次関数の最大最小	現実事象の最適化
⑪	11 月 15 日	校舎の高さを測る	三角比 tan	測定の方法
⑫	11 月 18 日	十国峠のケーブルカー	三角比 sin, cos	測定の方法
⑬	11 月 19 日	スキーのジャンプ	三角比 sin, cos	測定の方法
⑭	11 月 25 日	はしご車のはしごが届く距離	三角比 sin, cos	社会的有用性
⑮	12 月 1 日	太陽までの距離	三角比の相互関係	地学との関連性
⑯	2 月 17 日	ガリバー旅行記	相似と計量	国語との関連性
⑰	2 月 21 日	身のまわりの球を測る	球の体積と表面積	日常生活との関連性

平成 18 年度に大宮武蔵野高等学校 2 学年（数学Ⅱ）２クラス（習熟度別展開、1 クラス 25 人程度）で、以下のような日程で数学的モデリングを取り入れた授業を行った。

回	日	内容	単元内容	数学的モデリングの分類
①	4 月 26 日	ワイシャツの袖の型紙	三角関数のグラフ	家庭科との関連性
②	5 月 8 日	人の声と三角関数	三角関数の式とグラフ	日常生活との関連性
③	5 月 10 日	電波の種類と周波数	三角関数の式とグラフ	日常生活との関連性
④	6 月 16 日	バクテリアの増え方	有理数の指数	生物との関連性
⑤	6 月 23 日	オウム貝の等角らせん	有理数の指数	生物との関連性
⑥	6 月 23 日	新聞紙を折ったときの厚さ	指数関数のグラフ	日常生活との関連性
⑦	6 月 28 日	トイチローンの恐ろしさ	指数関数のグラフ	社会的有用性
⑧	6 月 28 日	お湯の冷め方	指数関数のグラフ	化学との関連性

今回の実践では、単元内容によって、数学的モデリングを取り入れた授業を行いやすい単元と、行いづらい単元があるため、実施にばらつきができてしまった。しかし、生徒の反応や授業後に書いてもらった感想を分析したところ、次のような成果があがったと考えることができる。

①生徒が、日常生活に数学が役立つことや数学と日常生活との関連性を感じたことで、数学の有用性を感じ、学習意欲を高めることができた。

②生徒が、数学を利用して現実事象のしくみを分析できることのよさを感じることができた。

③生徒が、現実事象を、数学を使って考察してみることのおもしろさを感じることができた。

④生徒が、自分の手を実際に動かして測定し考察することで、主体的に学ぶことができた。

⑤生徒が、数学と他教科の関連性を感じ、興味関心をもつことができた。

今後は教材の系統性も考慮しながら、ある程度単元にばらつきなく継続的に数学的モデリングを取り入れた授業を実施できるように、さらに多くの教材を開発するとともに、継続的に授業実践を行って開発した教材の効果的な利用法について考察し、教材をよりよいものにしていきたいと考える。

予想を重視した数学的モデリングの教材例セレクト２０

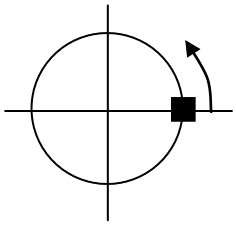
1　スキーのジャンプの落下距離（数学Ⅰ　三角比）

スキーのジャンプ競技で、札幌の大倉山ジャンプ競技場で飛距離 120ｍを飛んだとき、前には何ｍ飛んでいて、何ｍ下へ降りたか？

大倉山ジャンプ競技場のランディングバーンの斜度は、約 37 度なので（斜度は一定ではないので誤差があるが）、前には 120×cos37°≒95.8ｍ、下には 120×sin37°≒72.2ｍ飛んでいることがわかる。

見た目では横に飛んでいる印象が大きいので生徒はそんなに落下していないと予想するが、実際には約 70m、約 24 階建てのビルから降りているということに驚く。

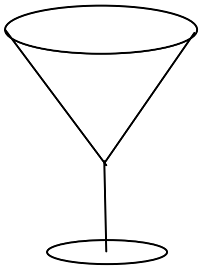
2　観覧車の高さ（数学Ⅰ　三角比）



6 分間（360 秒）で一周する観覧車があり、今、右図の黒四角の位置にいて、矢印の方向に回転する。観覧車が一番高い位置に達するまでに 90 秒かかる。（角速度 1°/秒なので）このとき、今いる位置と一番高い位置のちょうど半分の高さに達するのは何秒後か？

生徒の予想では 45 秒後という答えが多いが、$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ より、30 秒後であることに驚く。

3　ワイングラスの水の量（数学Ⅰ　相似と計量）



円錐型のワイングラスに水を入れる。水を半分まで入れたときにその量は全体の何分の１の量か？

相似な立体の体積比なので、$1^3:2^3=1:8$ より全体の $\frac{1}{8}$ にしかならない。

生徒の予想は $\frac{1}{3}$ や $\frac{1}{4}$ が多く、この結果に驚く。

また、このワイングラスに半分の量の水を入れるには、どれくらいの高さまで入れればよいか？

これは高次方程式で扱う教材になるが、$1:x^3=2:1$ より、$x^3=\frac{1}{2}$ なので、$x \fallingdotseq 0.794$ であることがわかる。

4　体積を比較する（数学Ⅰ　相似と計量）

ソフトボールと 500ｍｌのペットボトル、どちらが、体積が大きいだろうか？

ソフトボールの直径は約 10ｃｍなので、$V=\frac{4}{3}\times 5^3\times\pi \fallingdotseq 523.3\text{cm}^3$ となる。生徒の予想はまちまちであるが、計算してみるとほぼ同じ体積であることがわかる。

5　野球の打順は何通り（数学Ａ　順列・組合せ）

9 人の選手で打順を決める決め方は何通りあるだろうか？

9!＝362880 通りと多く、全通り試すには、プロ野球１年間に 146 試合としても、362880÷146≒2485 年間かかる。さらに高校野球のベンチ入り 18 人から 9 人選んで打順を決めるには、

${}_{18}C_9\times 9!=48620\times 362880=17643225600$ 通りとなる。生徒の予想を超えた通り数の多さに驚く。

6　クラスに同じ誕生日の人がいる確率（数学Ａ　確率）

40 人のクラスに少なくとも１組は同じ誕生日がいる確率はいくらだろうか？

同じ誕生日が１組もいない（全員誕生日が異なる）確率は、１クラス 40 人のときは、

$\frac{{}_{365}P_{40}}{365^{40}}$ なので、少なくとも 1 組は同じ誕生日がいる確率 $1-\frac{{}_{365}P_{40}}{365^{40}} \fallingdotseq 0.89123$ となる。生徒の予想は、40 人しかいないのに 365 日ある誕生日が重なることはあまりないだろうというものが多いが、よって約 9 割のクラスに同じ誕生日のペアが存在することに驚く。実際に 10 クラス調べてみた所、うまい具合に 9 クラスに同じ誕生日のペアがいた。

７　じゃんけんであいこの確率（数学Ａ　確率）

10 人で 1 回じゃんけんをしてあいこになる確率はいくらだろうか？
生徒の予想では、そんなにあいこの確率が高いとは思わず、実際に 10 人でじゃんけんを始めるケースも見られる。しかし計算してみると、10 人でじゃんけんをして、1 回で勝負がつく確率は、10 人が 2 種類を出す確率で、$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{10}-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\times 2\right\}\times 3=\frac{1022}{19683}$。よって、あいこになる確率は、$1-\frac{1022}{19683}=\frac{19661}{19683}\fallingdotseq 0.948$。よって 20 回に 1 回くらいしか勝負がつかないことに驚く。

８　宝くじの期待値（数学Ａ　確率）

販売価格 300 円の宝くじの 1 枚当たりの価値はいくらだろうか？
期待値を計算すると、約 143 円と生徒の予想以上に低いことに驚く。
また、10 年位前の年末ジャンボ宝くじは 1 等賞金 6000 万円だったが、現在の年末ジャンボ宝くじは 1 等賞金 2 億円である。売っている値段は同じであるが、現在の年末ジャンボ宝くじの方が価値（期待値）が高くなったのだろうか？
実際に計算すると、両方とも期待値はほぼ同じであることに驚く。これは、1 等の本数が 1000 万本当たり 4 本から 1 本に減っていて、他の等も減っていたり、5 等の 10000 円の当たりがなくなっていたりなど、当たりにくくなっているからである。「前後賞あわせて 3 億円」になっても得はしてないことがわかる。

９　平均点はまん中か（数学Ⅱ　相加平均）

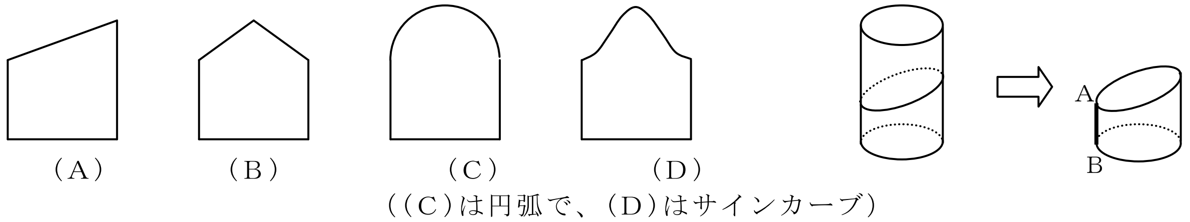
クラスでＡ君はテストで平均点ちょうどだった。Ａ君はそのことを家でお母さんに報告すると、お母さんは、「じゃあ、ちょうどクラスでまん中くらいの順位だね。」と言った。果たして本当だろうか？
例えば、40 人のクラスで平均点が 50 点、Ａ君も 50 点だとする。極端な例を出すと、55 点の生徒が 35 人いて、Ａ君が 50 点、25 点の生徒が 1 人いて、残り 3 人が 0 点だとすると、平均点は、

$\frac{55\times 35+50+25+0\times 3}{40}=50$点となる。しかし、Ａ君の順位は 36 位である。

生徒は平均点をとると順位はまん中であるという考えが強く、この例をあげると驚く。

１０　ワイシャツの袖の型紙（数学Ⅱ　三角関数のグラフ）

ワイシャツの袖のつなぎ目を切り開いてみるとどんな形になるだろうか？
円柱を斜めに切って、AB で縦に切り左右に開くと、下図の（Ａ）～（Ｄ）のどれになるだろうか？



（（Ｃ）は円弧で、（Ｄ）はサインカーブ）

結果は（Ｄ）であるが、生徒の予想は、（Ｄ）も多くいたが、（Ｂ）と（Ｃ）が多かった。最後に実際にワイシャツを切ってみて、その切り口が三角関数になることに驚く。

１１　バクテリアの増え方（数学Ⅱ　有理数の指数）

1時間で2倍に増えるバクテリアの、30分後（$\frac{1}{2}$時間後）の数は何倍に増えているだろうか？

生徒の予想では1.5倍が多いが、実際は$\sqrt{2}$倍（約1.41倍）であることがわかる。

次に20分後（$\frac{1}{3}$時間後）を考えさせ、$\sqrt[3]{2}$倍（約1.26倍）を予想させていく。

バクテリアがピンとこない生徒には、「1時間で2倍の大きさになる薬をかけたまんじゅう」などを話題にするとよい。

１２　ドラえもんのバイバイン（数学Ⅱ　指数関数）

ドラえもんの17巻に「バイバイン」という話がある。これは、「バイバイン」という薬をくりまんじゅうにかけると、食べない限り5分間で2倍に増えていくというものだ。のび太が食べきれなかったのでドラえもんが宇宙のかなたに送ってハッピーエンドという話だ。しかし、くりまんじゅうはいつか宇宙をうめつくすだろう。それはいつだろうか？

生徒に、①1日位，②1年位，③100年位，④1000年位，⑤それ以上のどれかを予想させる。実際の授業では、②の予想が多かった。答えは、宇宙の大きさを半径100億光年（1光年≒10^{16}mとして10^{26}m）の球として考えると、宇宙の体積は$\frac{4}{3}\pi\times(10^{26})^{3}\fallingdotseq 4\times 10^{78}\mathrm{m}^{3}$である。一方、まんじゅうの大きさを$100\,\mathrm{cm}^{3}\fallingdotseq 10^{-4}\mathrm{m}^{3}$とすると、$10^{-4}\times 2^{24\times 12}=10^{-4}\times 2^{288}\fallingdotseq 10^{82}\mathrm{m}^{3}$だから、1日もしないうちに宇宙はまんじゅうに埋めつくされてしまい、この話はハッピーエンドではない。指数の発散のすごさが体感でき、生徒は驚く。

１３　紙を折りたたんだときの厚さ（数学Ⅱ　指数関数）

普通のプリントを20回折りたたんだときの厚さはどれくらいになるだろうか？

生徒に①人間の身長位，②サッカーゴール位，③学校の校舎位，④ソニックシティービル位のどれかを予想させる。生徒の予想は③が多かった。紙1枚の厚さを0.1㎜とすると、20回折ったときの厚さは$0.1\times 2^{20}=1048576$より約105m。これはだいたい30階建てのビル位の高さとなり、生徒は驚く。これが100回折るとなると、1.27×10^{26}m。これは宇宙の半径と同じ位の大きさとなり、さらに驚く。

１４　トイチローンの恐ろしさ（数学Ⅱ　指数関数）

ある生徒が入学式で隣の生徒にジュース代100円を借りた。利子はトイチつまり10日で1割とした。そのまま忘れていて卒業式を迎えた。さて卒業式にいくら返済しなければならないだろうか？

生徒にいくらかを予想させる。生徒の予想は多くても10万くらいであった。入学式から卒業式まで2年間11ヶ月約1060日とすると、返済金額は、$100\times 1.1^{106}\fallingdotseq 244$万円となり、トイチの利子の恐ろしさを体感し、生徒は驚く。

１５　給料のもらい方（数学Ｂ　等差数列・等比数列の和）

次の給料のもらい方で2年半(30ヶ月)給料をもらうとき、どれが一番よいだろうか？

①毎月150000円づつもらう。

②1日目10000円，2日目20000円，3日目30000円と毎月10000円づつ増える。

③1日目1円，2日目2円，3日目4円と、毎月2倍に増える。

①は、150000×30日＝450万円、②は$\frac{1}{2}\times 30\times(20000+29\times 10000)=460$万5000円、

③は、$2^{30}-1=10$億7374万1823円となり、生徒に予想させると、③が多いことを予想できる生徒は多くいるものの、あまりにもの金額の違いに驚く。

１６　複利計算（数学Ｂ　等差数列・等比数列の和）

100 万円を 10 年間預けるとき、次のどの銀行が得だろうか？

①Ａ銀行　年利 10％の１年ごとの単利

②Ｂ銀行　年利 8％の１年ごとの複利

③Ｃ銀行　年利 8％（半年で 4％）の半年ごとの複利

Ａ銀行は、100 万＋（100 万×0.1）×10＝200 万円、Ｂ銀行は、(100 万×$(1.08)^{10}$＝215 万 8924 円、Ｃ銀行は、100 万×$(1.04)^{20}$＝219 万 1123 円。生徒に予想させて計算すると、きちんと計算しないとどれが得かわからないということがわかる。

１７　ハノイの塔（数学Ｂ　漸化式）

一つの柱に大きい円板から小さい円板へと下から順にいくつかの円板が積んである。これらの円板を他の柱に積みかえる。ルールは、「①円板はいずれかの柱へ１枚ずつ移動することができる。②小さい円板の上に大きい円板は乗せられない。」インドのバラモン教のある寺院では、黄金の円板 64 枚があり、日夜僧侶が円板を移しかえている。この 64 枚がそっくり移されたときがこの世の終わるときだといわれている。さてこの世の終わるときはいつだろうか？

まず、ｎ枚の円板をそっくり他の柱に移すのに最低何手で移せるだろうかを考える。

実際にプリントを正方形に切って操作させて最低手数を数えさせる。3 枚だと 7 手、4 枚だと 15 手かかる。ｎ枚の円板を全部移すには、まず一番下の円板が移せるようになるまで a_{n-1} 手かかり、一番下の円板を移すのに１手、また上のｎ－1 枚を戻すのに a_{n-1} 手かかるので、

合計 $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$ より、$a_n = 2a_{n-1} + 1$，$a_1 = 1$ という漸化式がたてられ、これを解くと、

$a_n = 2^n - 1$ となる。これによると、円板 64 枚を移しかえる手数は、$2^{64}-1 \fallingdotseq 1.8\times10^{19}$ で、1 秒間に 1 回移しても、6000 億年もかかることになり、生徒は驚く。

１８　木はどこまで伸びる（数学Ⅲ　無限等比級数）

ある木は毎年、前の年に伸びた分の半分だけ枯れることなく必ず伸びる。高さ 1mの木が最初の年に 1m伸びた。この木はどこまでも伸び続けるのだろうか？

ｎ年後の木の高さは、$1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ となる。よって、

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\lim_{n\to\infty}2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}=2$ より、この木の高さは 3mまでしか伸びない。半分ずつでも伸び続けていることから、生徒は伸びる限界があること（漸近線があること）を予想できず驚く。

１９　ドッジボールの確率（数学Ⅲ　無限等比級数）

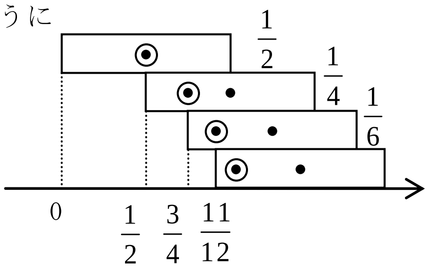
A,B,C の 3 人でドッジボールをする。まず抽選で最初に投げる人を決める。投げる人は残っている人のどちらを狙ってもよい。当てられたら負けで、次に投げる人は残った一人に移る。当てられなかった時は、次は今狙われた人が投げることができる。A が投げたときは必ず当て、B が当てる確率が $\frac{4}{5}$、C が当てる確率は $\frac{1}{2}$ である。このとき、誰が一番勝つ確率が高いだろうか？

生徒に予想させると、A が勝つ確率が一番高いと予想する生徒が多い。しかしこの問題は意外な結果になる。①抽選で A から投げ始める場合は $\frac{1}{3}$ で、その場合、A は最初に B を狙った方が得なので、B は必ず当てられ、その後 C が A に投げるので、勝つ確率は A も C も $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$。②抽選で B から投げ始める場合は、B は最初に A を狙った方が得であり、B が最初に A に当てた場合は $\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$

で、この場合は次に C が投げるので、C の勝つ確率は $\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\right)^3+\cdots\right\}=\frac{5}{9}$ となり、B は $\frac{4}{15}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{135}$、C は $\frac{4}{15}\times\frac{5}{9}=\frac{4}{27}$、A に当たらなかった場合は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$ で、次は A が投げるため①のパターンに進むので、勝つ確率は A も C も $\frac{1}{15}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$、③抽選で C から投げ始める場合は、C は最初に A を狙った方が得であり、C が最初に A に当てた場合は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ で、この場合は次に B が投げるので、B の勝つ確率は $\frac{4}{5}\left\{1+\left(\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\cdots\right\}=\frac{8}{9}$ となり、B は $\frac{1}{6}\times\frac{8}{9}=\frac{4}{27}$、C は $\frac{1}{6}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{54}$、A に当たらなかった場合は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ で、次は A が投げるため①のパターンに進むので、勝つ確率は A も C も $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$、よって合計すると勝つ確率は、A が $\frac{4}{20}$、B が $\frac{7}{20}$、C が $\frac{9}{20}$ で、一番当たる確率の低い C が一番勝つ確率が高いという結果がでて驚く。

２０　ずらして積み木を積む（数学Ⅲ　無限級数）

ずらして積み木を積むと、横にどこまでも遠くまで積んでいくことができるだろうか？
積み方は、重心の下に積み木があればくずれないので、右図のように積むとよい。生徒にどこまで遠くまで積めるかを予想させる。



上から 2 つの積み木の重心の位置は、$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{3}{4}$

上から 3 つのときは、$\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}+1+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{1}{3}\left\{\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{11}{12}$

上から 4 つのときは、$\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}+1+\frac{5}{4}+\left(\frac{11}{12}+\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{1}{4}\left\{\frac{11}{4}+\left(\frac{11}{12}+\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{25}{24}$

よって、上から n つのときは、$a_n=\frac{1}{n}\left\{(n-1)\times a_{n-1}+\left(a_{n-1}+\frac{1}{2}\right)\right\}=a_{n-1}+\frac{1}{2n}$ のしくみからもわかる通り、ずらす量は、$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ となる。

ここで、$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=1+\frac{n}{2}$$ より、

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{2}\right)=\infty$ より、はさみうちの定理から、$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$ となる。

よって、積み木をこのように積むと、横にどこまでも遠くまで積んでいくことができる。ただし、高さはそれ以上に高くなるので、現実的には不可能である。この結果に生徒は驚く。