数学的モデリングを取り入れた指導法とその教材（２）

埼玉県大宮武蔵野高　太 田　敏 之

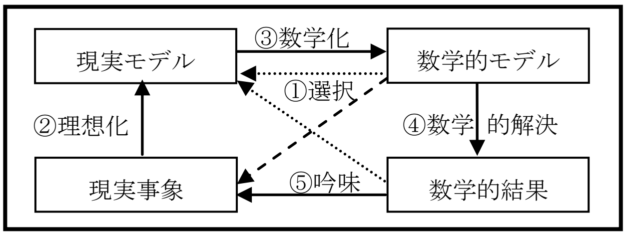
１．研究の概要

筆者は昨年度から、「現実事象を分析して数理的に考察していく数学的モデリングを取り入れた学習は、生徒が数学に興味をもち学習意欲を高めるだけでなく、主体的に学ぶ力を育むことができる。」と考え、その教材例を研究してきた。本論では、その教材例の一部の提案と、その教材例の授業実践を報告する。

２．数学的モデリング

筆者は、高等学校における数学的モデリングを取り入れた授業を、「現実事象を扱うことで生徒が数学に興味をもち、学習意欲を高め、高等学校数学の各単元の中に実生活への有用性を感じ、その内容の理解を深める授業」と考える。そこで本論では、数学的モデリングの過程を、以下のように先行研究で述べられている過程より広く捉えた５つの過程と考える。

①　授業者または生徒がその単元を理解するような現実事象または現実モデルを選択する。
②　現実事象を分析し、理想化して現実モデルを作成する。
③　現実モデルを数学的内容に数学化して数学的モデルを作成する。
④　数学的モデルを単元内容に沿って数学的解決をし、数学的結果を得る。
⑤　数学的結果を現実事象または現実モデルに適用し吟味する。



３．数学的モデリングを取り入れた教材の分類

池田氏(2002)、村本氏(2003)の見解を基にして分類された数学的モデリングのねらいによる分類と、筆者が分類した指導目標による分類に基づき、平成 16 年度に筆者の勤務校である大宮武蔵野高等学校１学年（数学Ⅰ）で実践した数学的モデリングを取り入れた教材を例にし、以下のように分類した。

(1)　数学的モデルを作るねらいによる分類

①現象理解

条件、仮定を設定して、なぜそうなるのかを理解していないような現実事象のしくみを理解するために数学的モデルを作る活動。数学的モデルの妥当性は、現実事象と対比することでなされる。

・放物線の役割（２次関数）
・ホームランになるか（２次関数）

②予測

現在、過去、未来における未知の現象を予測するために、入手可能なデータを集め、それを基に、それに適合する数学的モデルを作る活動。予測された内容は、それが正しいか間違いかだけではなく、何かの判断・決断に対しての選択肢が考えられ、検討する材料となる。

・CD の売り上げ分析（２次関数）

③最適化

判断・決断が要求される問題場面に出会ったときに、前もってできる限り多くの想定される場面を考え、最も適した方法・解を探る試みのひとつの方法として、数学的モデルを作る活動。数学的モデ

ルを形式的に処理することによって、最適な方法・解を求めることができる。数学的モデルの妥当性は、実際にそこで得られた結果を現実的にあるいは擬似現実的に行動に移してみることにより検証される。

・雨どいを作るには（２次関数）

④数量化

あるいくつかの現象を比較可能にしたり客観的に判断できるようにしたりするために、誰もが認める合理的な基準を定めて数量化した数学的モデルを作る活動。数学的モデルは価値観、目的の違いによって複数作られるため、価値観自体を総合的に判断して作る必要がある。

・黄金比とシルバー比（２次方程式）

⑤測定の方法

測定の方法を利用して、長さ、重さ等の量を求めるのに焦点を当てた数学的モデルを作る活動。測定の誤差を少なくするためにはどのような理想化を行い、どのような数学的モデルを作るかが重要である。

・校舎の高さを測る（三角比）
・十国峠のケーブルカー（三角比）
・スキーのジャンプ（三角比）

⑥社会的有用性

数学的原理・法則を利用して社会的に有用なものをつくることに焦点を当てた数学的モデルを作る活動。作られた数学的モデルを分析することによって、社会的に有用なシステムを作ることが可能となる。

・はしご車のはしごが届く距離（三角比）

(2)指導目標による分類

①数学と他教科との関連性

個々の生徒によって好きな教科は様々である。そこで生徒が、好きな教科と数学との関連を知ることで、生徒は数学の有用性を感じ、数学に興味をもつようになると捉える。

・ガリバー旅行記（相似比）国語
・ソフトボールで高さを測る（２次関数）物理
・熱膨張率（乗法公式）化学
・太陽までの距離（三角比）地学
・時差の計算（いろいろな関数）地理

②数学と日常生活との関連性

生徒が日常生活と数学との関連を知ることで、数学に興味をもつようになると捉える。

・消費税の計算方法（式の計算）
・タクシー料金の計算式（いろいろな関数）
・身のまわりの球を測る（球の体積・表面積）

＜引用・参考文献＞

[1]町田彰一郎(2003)，埼玉大学教育学部数学教育学特論Ａ(埼玉大学講義).

[2]西谷泉(1998)，「数学的モデリング」，『新版 21 世紀への学校数学の展望』，誠文堂新光社，p.287.

[3]池田敏和(2002)，「中等数学科における数学的モデリング・応用の指導目標に関する一考察，日本における 1990 年代の文献調査を通じて」，「日本数学教育学会誌数学教育 56-3」，pp.2-12.

[4]村本健一(2003)，「主体的に学ぶ力の育成から見たモデリング指導の一考察」，埼玉大学大学院修士論文.

[5]太田敏之(2004)，「生徒が数学に興味をもち学習意欲を高めるための指導法の研究」，「平成 15 年度長期研修報告書」.

<数学的モデリングを取り入れた教材>

ここでは、平成 16 年度に大宮武蔵野高等学校 1 学年（数学Ⅰ）で実践した数学的モデリングを取り入れた教材（指導案）とその実践報告を 17 個紹介する。

１．消費税の計算方法

種類（話題）　難易度　★★

内容（日常生活）

１．単元

「１章　数と式　１節　式の計算　１　整式　」

整式の導入、文字の有用性

２．原理

税込価格を x（円）とすると、本体価格は、$x \div 1.05$（円）より、消費税は、$x \div 1.05 \times 0.05$（円）となる。これを簡単にすると、消費税は $\frac{0.05}{1.05}x = \frac{1}{21}x$ となり、税込価格を 21 で割れば消費税が求められることがわかる。よって、例えば本体価格が 3045 円のときは、3045÷21＝145（円）で、この場合消費税は 145 円払っていることがわかる。

このことから、文字式を使って「税込価格を 21 で割れば消費税が求まる」というしくみを求めておけば、毎回 1.05 で割って 0.05 かける計算をしなくてすむから楽ということで、文字式の計算の有用性を感じさせることができ、文字式を学んでいく導入となる。

数学的モデリングの分類では、指導目標による分類において、数学と日常生活の関連性にあたる。

<参考文献>

[1] 松岡哲雄(2004),「税込表示と小数・社会科教育」,「平成 15 年度埼玉大学教育学部町田研究室研究発表会資料」.

３．本時の学習活動

(1) ねらい

① 消費税という身近な話題から文字式に興味・関心をもち、文字式の有用性を感じることで、主体的に取り組むことができるようにする。（関心・意欲・態度）

② 消費税の計算やそのしくみが、文字式の計算を利用することによってわかるという見方・考え方ができるようにする。（数学的な見方・考え方）

③ 文字と小数を含んだかけ算やわり算の式を、分数の形にして整理することができるようにする。（表現・処理）

④ 文字を利用して式をたて、その式を簡単に整理しておくことで一般化でき、次から代入計算で簡単に計算することができるようになるということが理解できるようにする。（知識・理解）

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．展開① ４月から店頭での表示が、本体価格から税込価格に変わりました。今まではレジで消費税が加算されるので消費税をいくら払っているか実感できましたが、これからは最初から税込価格で表示されるので、そのうちいくらが消費税なのかがわからなくなります。だから消費税がいくらなのか計算できなければいけませんね。さて税込 3045 円のものがあります。そのうち消費税はいくらでしょうか？ （※平成 16 年４月より税込表示）	生徒に計算させ、 3045÷1.05×0.05 の計算が大変なことを実感させる。 (本体価格)×1.05＝3045 から、 (本体価格)＝3045÷1.05 とし、 (消費税)＝(本体価格)×0.05 より、3045÷1.05×0.05 を説明する。

２．展開② 税込価格を x とすると、消費税はいくらになるでしょうか？文字式で表してみましょう。 消費税は $\frac{1}{21}x$ となることから、税込価格を 21 で割れば消費税がでることを説明する。税込価格 210 円のものの消費税が、210 を 21 で割った 10 円であることから、このことをイメージさせる。	$\frac{0.05}{1.05}$ がわかりづらいときは、 $x \div \frac{105}{100} \times \frac{5}{100}$ で考えてもよい。
３．課題 税込価格を適当に設定し、実際に問題を解かせる。 （例）税込価格 840 円のＴシャツの消費税は？など	生徒の身近なものを題材にする。 文字の有用性を意識し、$\frac{1}{21}x$ に代入させ、$\frac{1}{21} \times 840 = \frac{840}{21} = 40$ と計算させてもよい。

４．授業実践

(1) 生徒の感想

・身近な例を上げたのでよかった。
・生活の役に立った。
・次何か買ったら計算してみたいなと思った。
・びっくりした。使ってみる。
・いままでは 105 円ごとに 5 円ずつひいていたからめんどうだった。
・21 でわるというとても簡単にできるのがともよいと思った。
・どれくらい税がとられているかがわかるようになってよかった。

(2) 考察

今回の実践では、時間がなかったので、実際に生徒に考えさせることはできず、説明するにとどまったが、身近な題材ということで生徒は興味深く聞いていたように感じた。生活に数学が役立つことを感じさせたことで、学習意欲を高めることにつながったと考える。文字の有用性を感じさせることができたかについては、まだまだ良い感触は得られず、展開方法の改善が今後の課題といえる。

２．熱膨張率

種類（話題）　難易度　★★★★
内容（化学）

１．単元

「１章　数と式　１節　式の計算　１　乗法公式　」
３乗の展開公式の利用、近似式への発展

２．原理

0℃のとき１辺の長さが 10ｃｍの、ある立方体のブロックは、30℃まで暖めると 10＋ｈｃｍになる。ここでｈは、熱膨張率α（物質によって決まる）、元の長さｌ、温度差ｔとしたとき、ｈ＝αｌｔで、鉄の場合α＝12×10^6＝0.000012 なので、ｈ＝0.000012×10×30＝0.0036 となる。

ある立方体を鉄としたとき、この立方体の体積は、$(10.0036)^3$ を計算するのはめんどうなので、$(10+h)^3 = 1000 + 300h + 30h^2 + h^3$ とし、h^2 と h^3 は微小となるので、体積を 100＋300×0.0036 から約 1001.08 cm^3 と求める。数学Ⅲの近似の概念に発展させることもできる。

熱膨張率は、鉄の他は、銅 16.7、アルミ 23、鉛 29、ガラス 10、ポリエチレン 100、水 210、エタノール 1080、水銀 181（すべて単位は×10^6）である。生徒の興味にあわせて題材を設定すればよい。

数学的モデリングの分類では、指導目標による分類において、数学と他教科の関連性（化学）にあたる。

＜参考文献＞

［1］ベングト・ウリーン著，丹羽敏雄，森章吾共訳（1995)，『シュタイナー学校の数学読本』，三省堂, p. 54.

３．本時の学習活動

(1) ねらい

① レールのつなぎ目の必要性から、鉄のブロックの膨張に興味・関心をもち、3 乗の展開公式の利用について主体的に取り組むことができるようにする。(関心・意欲・態度)

② 温度によって違う伸び率を文字で置いて展開する見方・考え方ができるようにする。(数学的な見方・考え方)

③ 3 乗の展開公式を使って展開することができるようにする。(表現・処理)

④ 発展として 1 次近似の概念が理解できるようにする。(知識・理解)

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
1．展開① 鉄道のレールには、つなぎ目にすきまが開いています。なぜでしょう？これは鉄は気温があがると膨張するため、つなぎ目にすきまがないとレールが膨張したときゆがんでしまうからです。気温 0℃で30mの長さのレールは、30℃では何m膨張して伸びると思いますか？実は約 1 c mも伸びるのです。 では、気温 0℃で 1 辺 10 c mの鉄のブロックがあって、これを使って建築物を作ることを考えます。30℃では体積はどれだけ増えるでしょうか？ ただし、鉄は 30℃では 10 c mが 10．0036 c mになります。	つなぎ目にすきまが開いている理由を生徒に考えさせて、聞く。 レールの膨張の話で生徒の興味を引く。 生徒から$(10.0036)^3$ の式が出て、計算を始めるまで、自由に考えさせる。 物質によって伸び率が違うことを説明する。余裕があれば熱膨張率の式にもふれておく。
2．展開② $(10.0036)^3$を計算するのは大変だし、気温によって伸びる長さも変わるので、そのたびに毎回 3 乗を計算するともっと大変である。だいたいの体積の増加量を知るためによい方法はないだろうか？ 伸びる長さをxとして考えると、3 乗の展開公式を利用して、$(10+x)^3$とおけることを導き出す。	伸びる長さが温度によって違うので、とりあえず文字でおけばよいことに気づかせる。
3．課題 $(10+x)^3$を$(x+10)^3$と置き換えて展開させる。	生徒の様子によって、$(10+x)^3$ をそのまま展開させてもよい。
4．考察 $(x+10)^3=x^3+30x^2+300x+1000$ となる。ここで、$x=0.0036$ であり、x^2 やx^3 はとても小さい値になることから、$(x+10)^3 \fallingdotseq 300x+1000=300\times0.0036+1000$ $=1001.08$（cm^3）となり、約 $1\,\mathrm{cm}^3$ 体積が大きくなることがわかる。	発展として、数学Ⅲで学ぶ近似の概念にふれさせる。

４．授業実践

(1)生徒の感想

・鉄は温度があがると膨張することを初めて知った。

・鉄が膨張するなんてしらなかったからびっくりした。鉄棒ももしかしたら膨張しているのかなと思った。
・電車のことはとても興味があるので、とても印象に残った。

(2) 考察

今回の実践では、難しい話題であるせいもあって、3 乗の展開公式の有用性など、数学自身の理解を深めるところまでは至らなかったように感じるが、鉄が膨張することの驚きから、数学と化学の関連や、現象が数学を利用して分析できることのよさを感じることはできたのではないかと考える。

3．黄金比とシルバー比

種類（実験・演習）　難易度　★★

内容（日常生活）

１．単元

「１章　数と式　３節　１次不等式と２次方程式　２　２次方程式　」

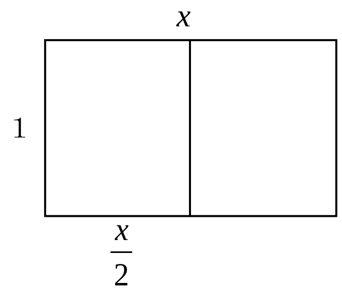
2 次方程式の利用

２．原理

生徒に身のまわりから形が決まっている長方形を探してきてもらい、その長方形の縦と横の長さの比について考察させる。黄金比やシルバー比（$1:\sqrt{2}$）について説明し、2 次方程式を利用して比を求め、探してきた長方形を分類する。

(1) シルバー比

長方形	短い辺の長さ	長い辺の長さ	比
教科書	14.8	21.0	1：1.42
ノート	17.8	25.2	1：1.42
文庫本	10.5	15.0	1：1.43
Ａ３	29.7	42.0	1：1.41
Ａ４	21.0	29.7	1：1.41
Ｂ４	25.7	36.4	1：1.41
Ｂ５	18.3	25.7	1：1.41

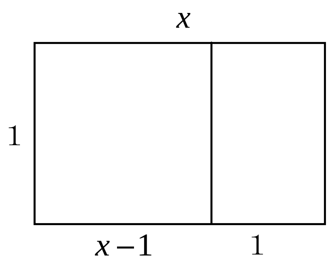


$1:x=\frac{x}{2}:1$ より、$\frac{x^2}{2}=1$　　$x^2=2$

$x>0$ より $x=\sqrt{2}\fallingdotseq 1.41$

(2) 黄金比

長方形	短い辺の長さ	長い辺の長さ	比
名刺	5.5	9.1	1：1.65
スイカ	5.4	8.7	1：1.61
新書本	10.5	17.1	1：1.63



$1:x=x-1:1$ より、$x(x-1)=1$　　$x^2-x-1=0$　　$x>0$ より $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\fallingdotseq 1.62$

数学的モデリングの分類では、数学的モデルを作るねらいによる分類において、数量化にあたり、長方形のかたちを縦と横の比率という基準から数量化し、形を比較可能にしているという数学的モデルを作る活動である。

＜参考文献＞

[1] 数研出版 編(2003),『楽しく学ぶ数学基礎』, 高校数学基礎教科書, 数研出版.

３．本時の学習活動

(1) ねらい

① 身のまわりの長方形に興味・関心をもち、主体的に実験に取り組むことができ、2 次方程式の有用性を感じることできるようにする。(関心・意欲・態度)

② 身のまわりの長方形の縦と横の長さの比を分類し、相似比や 2 次方程式を用いて考察できるようにする。(数学的な見方・考え方)

③ xに範囲がある 2 次方程式の応用問題を解くことができるようにする。(表現・処理)

④ 2 次方程式の解法やxの範囲について理解できるようにする。(知識・理解)

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．導入 前の授業で、身のまわりにある形が決まっている長方形を探してくるように言っておく。	名刺、スイカ(JR)など、例をあげておく。
２．実験 用意してきた長方形の辺の長さを定規で測って、その辺の比を求めてみよう。 測定結果を発表させる。	教科書とノートは共通題材として測るように指示する。 測定結果の誤差が大きい場合には、他の人の意見も聞き、多数のものを採用する。
３．展開① 「紙を半分に折っても形がかわらない（相似）である」というシルバー比の原理について説明する。 シルバー比を求めてみよう。	立式については、生徒に考えさせながら、生徒に発問し、答えを黒板に書いていく。 xが正であることについて注意させる。
４．展開② 1) 古代から伝わる最も美しい長方形に見られる、黄金比について説明する。 2) 「長方形から正方形を切り取って残った長方形が、元の長方形と相似である」という黄金比の性質について説明する。 黄金比を 2 次方程式を利用して求めてみよう。	パルテノン宮殿、ミロのビーナスなどの話をする。 展開①を参考にして、自分で式を立てさせて、比を計算させる。
５．まとめ 黄金比についてまとめる。	黄金比が生物の成長や人間の感覚（株式)、正五角形の対角線などに見られることなどの話をする。

４．授業実践

(1)生徒の感想

・長方形は不思議だなーと思いました。実験的な事が好きなので、楽しかったです。またおもしろい実験をやりたいです！

・黄金比についてもっと知りたいと思った。またやりたいです。

・他の長方形も調べてみようと思った。

・身のまわりには決まった比があるなんて知らなかった。けっこうためになる授業だったと思う。

・黄金比は自分のまわりにたくさんあることにびっくりした。

・黄金比がいろいろなところにあっておどろいた。すごく興味があって楽しかった。

・シルバー比は、半分にしても大きさが変わっているだけで形は変わらないなんてびっくりした。黄金比は、正方形をどんどん切っていくと、同じ形ができるなんてすごい。
・おもしろい話がいろいろきけてすごく楽しかった。今日の実験をして、どんな所で黄金比がつかわれているのか、もっといろいろ知りたいと思った。生物の成長や人間の感覚までに黄金比があるなんてすごくふしぎだ！
・昔から黄金比が使われていたことにびっくりした。
・おもしろかった。黄金比が様々な分野で利用されていて、まさか株式にも使われているとは思わなかった。新書本は黄金比にして、売り上げを少しでも伸ばしたいのだと思う。
・方程式は実用性がないものだと思っていたが、たくさん使われていることを知り驚いた。
・数学は、たし算、ひき算、かけ算、わり算が出来ればいいと思っていたけど、すごい身近にかんじて、見なおした！

(2) 考察
今回の実践を通じて、生徒は、身近なものを題材にしたことで興味をもち、数学を利用して現実事象のしくみを分析できることのよさを感じることができたのではないかと考える。また実験という、自分の手を実際に動かして測定し考察する形態をとることで、主体的に学ぶことができたのではないかと考える。

４．時差の計算

種類（話題・演習）　難易度　★★
内容（地理、日常生活）

１．単元
「３章　２次関数　１節　２次関数とそのグラフ　１　関数　」
いろいろな関数、文字式の有用性

２．原理
時差は経度 15°に対して 1 時間で、日本は東経 135°なので、東経 x°の場所と日本との時差を y 時間とすると、$y=\frac{1}{15}(x-135)$ という 1 次関数の式となる。これを整理して、$y=\frac{1}{15}x-9$ とするとわかりやすい。
例えば、前々回 2000 年のオリンピックが行われたオーストラリアのシドニーは東経 150°なので、$y=\frac{1}{15}(150-135)=\frac{1}{15}\times 15=1$ と計算でき、時差が 1 時間であることがわかる。これは 1 時間進んでいることを意味する。前回 2004 年のオリンピックが行われたギリシャのアテネは東経 30°なので、$y=\frac{1}{15}(30-135)=\frac{1}{15}\times(-105)=-7$ で、時差が－7 時間つまり 7 時間遅れていることがわかる。
ただし、夏の間アテネはサマータイムを実施していて、時差は 1 時間少なく、－6 時間である。よって、夏のアテネで 19 時に開始した試合は、19＋6＝25 より、日本では翌日の午前 1 時開始となる。
西経の場合はマイナスとして表すとこの式をそのまま使うことができる。例えばアメリカのニューヨークは西経 75°なので、x＝－75 として計算すると、$y=\frac{1}{15}(-75-135)=\frac{1}{15}\times(-210)=-14$ となり、時差は－14 時間であることがわかる。
数学的モデリングの分類では、指導目標による分類において、数学と他教科の関連性（地理）にあたる。

３．本時の学習活動
(1) ねらい
① 地理で扱う時差の計算と 1 次関数が関係していることに興味・関心をもち、主体的に計算することができ、しくみを文字式で表すことの有用性を感じることできるようにする。（関心・意欲・態度）

② 時差のしくみから式をたてるときの見方・考え方ができるようにする。西経をマイナスで表せばよいことに気づくことができるようにする。(数学的な見方・考え方)
③ 1次関数の式を用いて、経度から時差を求めることができるようにする。(表現・処理)
④ 時差を求める式のしくみやその求め方について理解し、身のまわりにいろいろな関数があることを知ることができるようにする。(知識・理解)

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
1．導入 先日オリンピックが行われたギリシャのアテネと日本との時差は何時間だろうか？	授業の実施時期によって、生徒が興味を引きそうな都市を適当に選んでよい。 生徒に予想させる。
2．展開① 簡単な例として、その前にオリンピックが行われたオーストラリアのシドニーと日本との時差を求めてみよう。 生徒に与える必要がある情報は以下のとおりである。 ①時差は経度 15° に対して 1 時間である。 ②日本は東経 135° である。 ③シドニーは東経 150° である。	必要なデータは何か考えさせる。 $y=\frac{1}{15}(150-135)=\frac{1}{15}\times15=1$ の式が出てくるように、ヒントを与えながら導く。
3．展開② 東経 x° の場所と日本との時差を y 時間として、y と x の関係を式に表してみよう。	具体的な式から一般化ができるようにする。
4．課題① アテネは東経 30° である。日本との時差は何時間だろうか？ サマータイムの話や、「アテネで 19 時に開始された試合は、日本では何時に見ることができるのだろうか？」といった実際の話をする。	$y=\frac{1}{15}(x-135)$ の式に代入しても、 $y=\frac{1}{15}x-9$ の式に代入してもよい。 y がマイナスになった意味を考えさせる。
5．展開③ アメリカのニューヨークは西経 75° である。日本との時差は何時間だろうか？	西経の場合は、x をマイナスで表せばよいことに気づかせる。

4．授業実践
(1) 考察
今回の実践では、難易度の関係で、生徒に情報を与えた後にこちらから式を与えてしまい、シドニーとの時差を例として与えて、アテネとの時差を求めさせるという展開で行った。身近なものを題材にしたことで生徒は興味をもち、文字式で表す有用性を少しは感じさせることができたのではないかと考える。次回は上記の学習過程例のように、生徒に式を考えさせる展開で実践してみたい。

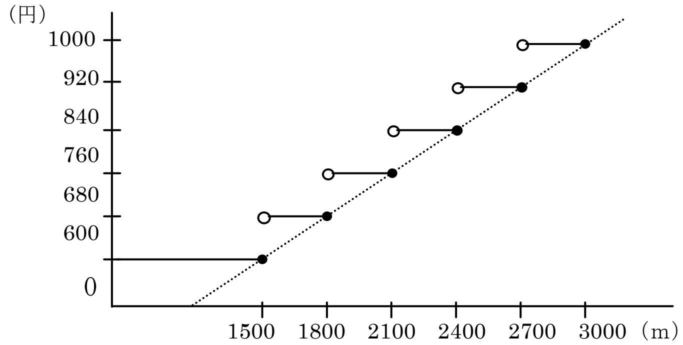
5．タクシー料金の計算式

種類（話題）　難易度　★★★★★
内容（日常生活）

1．単元
「3章　2次関数　1節　2次関数とそのグラフ　1　関数　」
いろいろな関数、発展

２．原理

例えば、最初の 1500ｍまで 600 円、以下 300ｍ走るごとに 80 円加算していくようなタクシーを例にして、そのタクシーの料金の関係式を考えてみる。本当は停車時間も料金に計算されるが、今回は、それは考えないことにする。それをグラフにしてみると下図のとおりになる。



簡単に考えると、これは次のような式になると考えられる。（xを走行距離（m）、yを料金（円）とする。）

$$y=\frac{x-1500}{300}\times 80+600 \quad （ただし x>1500）$$

この式で大体の料金は計算されるが、これは整理すると$y=\frac{4}{15}x+200$となり、1 次関数の直線になってしまう（上のグラフの破線部）。つまり、例えば本当は 1500ｍから 1800ｍは一律 680 円のはずなのに、この式だと 1600ｍのときに約 627 円と計算されてしまう。

そこで正確に式にするためにガウス記号を用いる。ガウス記号とは、$[x]$のように表す記号で、$[x]$とは、xを越えない最大の整数を表す。この記号を使って、タクシー料金を式に直してみると、

$$y=80\left[\frac{x-1500}{300}+1\right]+600 \quad （ただし x>1500）$$ となる。

これに実際に具体的な数字を入れて計算してみると、

x＝1600ｍのとき　$y=80\left[\frac{1600-1500}{300}+1\right]+600=80[1.33\cdots]+600=80\times 1+600=680$円

x＝2900ｍのとき　$y=80\left[\frac{2900-1500}{300}+1\right]+600=80[5.66\cdots]+600=80\times 5+600=1000$円

と、見事に計算することができる。

数学的モデリングの分類では、指導目標による分類において、数学と日常生活の関連性にあたる。

３．本時の学習活動

(1) ねらい

① タクシー料金のグラフの形やガウス記号に興味・関心をもち、主体的に授業に参加することができるようにする。（関心・意欲・態度）

② タクシー料金のグラフを式に表す過程における数学的な見方・考え方ができるようにする。（数学的な見方・考え方）

③ ガウス記号を含んだ関数の式を用いて、距離に対するタクシー料金を求めることから、いろいろな関数の式を利用できるようにする。（表現・処理）

④ 身のまわりにある関数が、1 次関数や 2 次関数ばかりではないことや、タクシー料金のグラフのように式では表せないと思いがちなグラフでも式に表すことができるということを知ることができるようにする。（知識・理解）

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
1．展開① 次のグラフは、最初の 1500m まで 600 円、以下 300m 走るごとに 80 円加算していくようなタクシーの料金のグラフである。これを式で表してみよう。	少し時間を与え、1 次関数で表す発想をひきだす。
2．展開② 1 次関数の式で表してみる。 タクシーが 1600m 走ったときはいくらだろうか？	1600m 走ったときは、本来 680 円のはずなのに、約 627 円と計算されてしまう理由をグラフから考えさせる。
3．展開③ ガウス記号を紹介する。	ガウスの話を織り交ぜながら、興味をひかせる。
4．展開④ ガウス記号を使って、タクシー料金の式を作ってみる。 $x=1600$ のとき、$y=680$ になることを確認する。	式を作るところの説明は深入りしない。実際に代入して正しいことの確認を重視する。
5．課題 タクシーが 2900m 走ったときはいくらだろうか？グラフと式、両方で求めて、結果を比べてみよう。	グラフによる（または順に考えていく）と、1000 円になり、式に代入しても 1000 円になることを確認させる。

4．授業実践

(1) 考察

今回の実践では、難易度の関係で、生徒に読み物としてプリントを与え、タクシー料金のようなグラフでも関数の式として表すことができるということだけを強調し、あまり説明をしなかった。次回は、上記の学習過程例のように、生徒に式に代入させて計算させ、正しい結果が得られることの驚きを感じさせるような展開方法で実践してみたい。

6．ソフトボールで高さを測る

種類（話題）　難易度　★★★

内容（物理、測定の方法）

1．単元

「3章　2次関数　1節　2次関数とそのグラフ　2　2次関数　」

2次関数の導入

2．原理

物理で学習する自由落下運動の式 $h=\frac{1}{2}gt^2$（g は重力加速度）を利用すると、落下時間から物の高さを測ることができる。重力加速度 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$ であるが、計算の簡略化のために $g=10\mathrm{m/s^2}$ を使う方法もある。例えば橋の高さを測るときに小石を落とし、落下時間が 3 秒だったら、橋の高さはだいたい $h=5\times3^2=45\mathrm{m}$ とわかる。逆に、バンジージャンプで 45m の高さから飛び降りるのに何秒かかるかという話題も混ぜるとおもしろい。校舎の高さ（後に三角比を使って測る授業もあるので）を測る実験もやってみたいが、屋上から物を落とすのは危険なので、よほどよい環境でないと実験は厳しい。

実験としては、ソフトボールを使って身長を測るという実験が考えられる。頭の上からソフトボールを落とし、落下時間を測定し、身長を求める。以前玩具で落下時間を測定できるものがあったが（投

球速度を測ることのできる球)、現在は発売していないらしく手に入らなかった。ストップウォッチで手動で測定したが、これは誤差が大きかった。ただし何度も測定しているうちに測定誤差は少なくなると考えられる。例えば、0.6 秒かかったら、身長は $4.9\times(0.6)^2=1.764$m となる。(この場合は誤差を少なくするために、$g=9.8\mathrm{m/s^2}$ の方を使った方がよい。)

また、高さ 0.5m, 1m, 1.5m・・・からの落下時間を測り、グラフを書いて、自由落下が 2 次関数になることに気づかせる実験も考えられる。

数学的モデリングの分類では、指導目標による分類において、数学と物理との関連性にあたる。

＜参考文献＞
[1]何森仁，小沢健一，近藤年示，時永晃 共著(1987)，『生き生き数学』，三省堂,pp. 20-21.

３．本時の学習活動

(1) ねらい

① 小石やソフトボールを落下させることで、橋の高さや身長が求められることに興味・関心をもち、主体的に授業に参加することができるようにする。(関心・意欲・態度)

② 落下時間を測れば、落下距離がわかるという関数的な見方・考え方ができるようにする。(数学的な見方・考え方)

③ 2 次関数の代入計算ができるようにする。(表現・処理)

④ 自由落下運動が 2 次関数で、2 次関数の代入計算で物の高さが計算できることが理解できるようにする。(知識・理解)

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．展開 橋の高さを求めるにはどうしたらよいだろうか？ (予想される生徒の反応) 橋の上からメジャーをたらす。など	生徒にいろいろな方法を発想させ、橋の上から石を落として落下時間を測る方法を発想させる。
２．課題 物の落下時間 x (秒) と落下距離 y (m)の関係は、$y=5x^2$ である。橋から小石を落としたら、落ちるまでに 3 秒かかった。橋の高さを求めてみよう。 落ちる時間を変えて、いくつか求めてみる。	$y=4.9x^2$ を使ってもよい。
３．実験 前で、ソフトボールを落として、ストップウォッチで落下時間を測る実験をし、生徒に観察させる。 測定結果の平均は 0.6 秒だった。私の身長はだいたいどれくらいでしょう？	実際に実験を見せて興味をひかせることが目的なので、正確に落下時間を測れればよいが、この実験方法では誤差が大きいことは、生徒にきちんと説明しておく。 余裕があれば、生徒に実験させてもよい。

４．授業実践

(1)生徒の感想

・高さを小石等で測れるなんて凄いと思った。
・高さをこんな方法で測ることができるんだぁと思った。
・それだけで測れるなんてびっくりした。
・ちょっと出かけて、測るものがない時でも、橋とかの高さがわかるから、すごいと思った。
・日常でもできることだからよかった。
・ボールが落ちる時間で身長が測れるのを知っておもしろかった。

(2) 考察

今回の実践を通じて、生徒は、身近なものを題材にしたことで興味をもち、数学や物理を利用して簡単に物の高さを測ることのできる驚きとよさを感じることができたのではないかと考える。さらに数学と物理の関連性も感じることができたのではないかと考える。また、簡単で精度の低い実験ではあるが、実際に実験風景を観察させることで、イメージがわき、興味をひくことができたのではないかと考える。今後は生徒に実験をさせる展開方法について考えていきたい。

７．放物線の役割

種類（話題）　難易度　★★

内容（現象理解、日常生活）

１．単元

「３章　２次関数　１節　２次関数とそのグラフ　２　２次関数　」

２次関数の導入

２．原理

パラボラアンテナは、図１のように、平行に飛んでくる電波を放物面で反射し、焦点にある一カ所の受信機で受信する。

また、車のライトや懐中電灯は、図２のように、逆に焦点にある電球を放物面の反射板で反射し、遠くまで伸びる平行の光にして照らす。

数学的モデリングの分類では、数学的モデルを作るねらいによる分類において、現象理解にあたり、パラボラアンテナや車のしくみを理解するための数学的モデルを作る活動である。

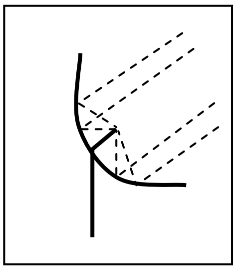


図１

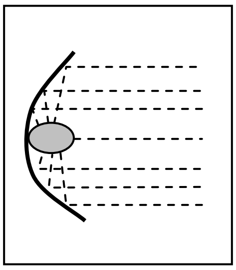


図２

３．本時の学習活動

(1) ねらい

① 放物線からできる放物面が役立つものであることに興味・関心をもち、主体的に授業に参加することができるようにする。（関心・意欲・態度）

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．展開 身の回りにある放物線を探してみよう。 （予想される生徒の反応） ボールを投げたときの軌跡、噴水、ネックレスなど パラボラアンテナや車のライトの反射板、懐中電灯などに見られる放物線の性質を話し、放物線からできる放物面が役立つものであることを感じさせる。	生徒が見つけてきた放物線について 話をする。ネックレスは懸垂線であるが、原点の近くでは限りなく放物線に近いことを解説してもよい。 数学Ｉの段階では証明は難しいので、話題としてとりあげる。

４．授業実践

(1) 生徒の感想

・衛星アンテナや車のライトについての話は知らなかったため、おもしろかった。

・ボールの軌道や衛星や車は、常日頃から見ているものだからとても興味がひかれた。車のライトの話はすごくおもしろかった。

・身の回りの物に数学があっておもしろかった。

(2) 考察

今回の実践を通じて、生徒は、身近なものに数学で学ぶ放物線が役に立っていることに興味をもち、数学の有用性を感じることができたのではないかと考える。科学館によくある、２つの放物面

の焦点どうしで話ができる器具の話をするのもよい。今後は、このことが実感できるような実験を観察させる授業展開も考えていきたい。

８．ＣＤの売り上げ分析

種類（話題・演習）　難易度　★★★★

内容（日常生活，予測）

１．単元

「３章　２次関数　１節　２次関数とそのグラフ　２　２次関数　」

２次関数の利用

２．原理

過去のＣＤの売り上げデータから、傾向を分析し、今後の売り上げを予測する数学的モデルを作る活動をする。

(1) ２次関数の回帰曲線

図３は、2003 年４月以降の森山直太朗の「さくら（独唱）」という曲のＣＤの売り上げ枚数の推移を表したものである。

図３

週数	1	2	3	4	5	6	7
売上（万枚）	2.4	5.1	7.5	9.4	10.8	9.9	7.8

これをグラフに描くと図４のようになる。このグラフはどんな関数に近似するかを求めてみる。売り上げ枚数の差を計算してみると、

5.1－2.4＝2.7

7.5－5.1＝2.4

9.4－7.5＝1.9

10.8－9.4＝1.4

となり、傾きがだんだん緩やかになっていて、頂点があることから、２次関数に近似できることが予測される。

図４

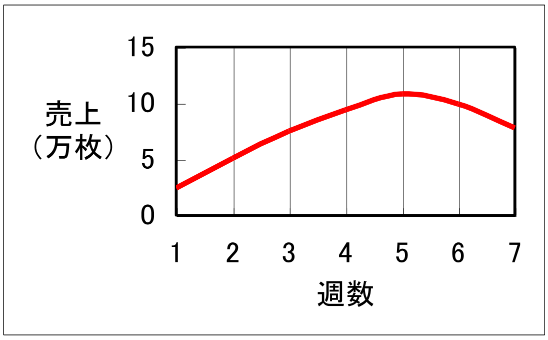


図５

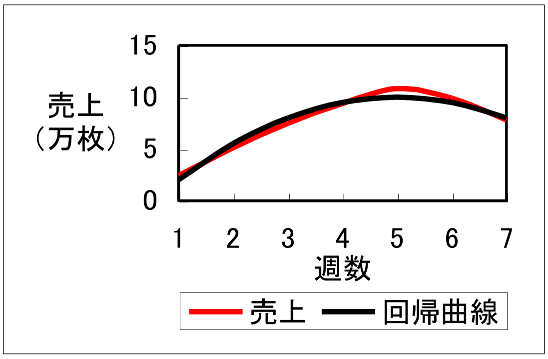


図４のグラフを、２次関数に近似して、最小２乗法で回帰曲線を求めてみると、

$y=-\frac{1}{2}x^2+5x-\frac{5}{2}$ のグラフに近似する。

これを平方完成すると、

$y=-\frac{1}{2}(x-5)^2+10$ となり、図５のようになる。

この式を利用して、この曲の８週目の売り上げを予想してみる。計算によると、$y=-\frac{1}{2}(8-5)^2+10$＝5.5 となり、実際の売り上げは、5.4 万枚だったため、かなり近い予測ができたといえる。ただし、この２次関数は、x＝10 のときに y の値が負になるため、局所的な近似になる。

(2) 指数関数の回帰曲線

図６は、2003 年３月以降のＳＭＡＰの「世界で一つだけの花」という曲のＣＤの売り上げ枚数の推移を表したものである。

図６

週数	1	2	3	4	5	6	7	8
売上（万枚）	63.0	38.0	30.0	14.0	10.0	8.0	6.1	5.5

これをグラフに描くと図７のようになる。このグラフを、２次関数に近似して、最小２乗法で回帰曲線を求めてみると、図８のように、$y = 59.4 \times (0.61)^x + 3.6$のグラフに近似する。図３の曲のように、徐々に売り上げを伸ばすＣＤは２次関数に近似できると分析できるが、図６のように、発売１週目から売れるＣＤは指数関数に近似できると分析することもできる。指数関数は未履修事項であるが、紹介程度で扱うとよい。

ＣＤの売り上げが分析できると、次に同じような曲を出すときに、売り上げの推移を予測することができ、ＣＤを何枚作って何枚流通させればよいかなどの目安になると考えられる。

数学的モデリングの分類では、数学的モデルを作るねらいによる分類において、予測にあたり、ＣＤの売り上げという未知の現象を予測するために、過去の売り上げのデータを集め、それを基にそれに適合する数学的モデルを作る活動である。

図７

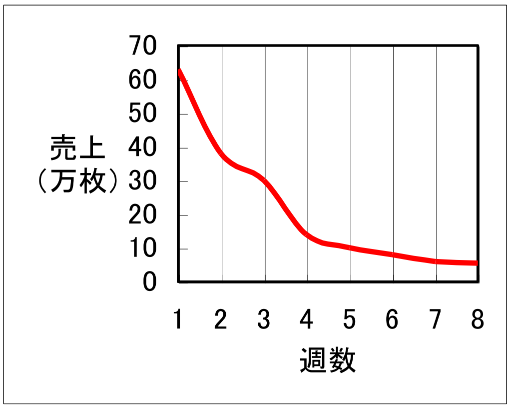
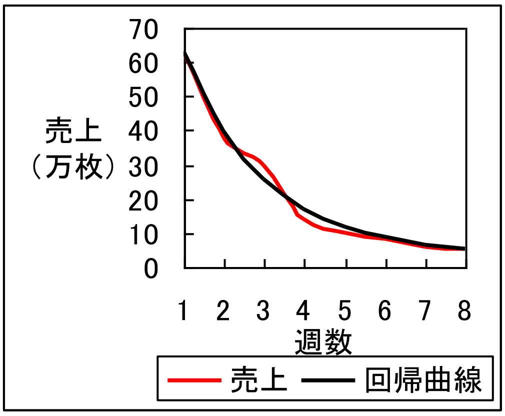


図８



４．本時の学習活動

(1) ねらい

① ＣＤの売り上げのデータに興味・関心をもち、経済や流通における２次関数の有用性を感じることで、主体的に授業に取り組むことができるようにする。（関心・意欲・態度）

② データを関数の式で近似して傾向を分析したり、動向を予測したりすることができるという見方・考え方ができるようにする。（数学的な見方・考え方）

③ データからグラフを書くことができるようにする。２次関数を平方完成したり、グラフを書いたり、値を求めたりすることができるようにする。（表現・処理）

④ ２次関数の性質が理解できるようにする。（知識・理解）

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．展開① ① 図３は、2003 年４月以降の森山直太朗の「さくら（独唱）」という曲のＣＤの売り上げ枚数の推移を表したものです。これをグラフに書いてみましょう。	点を折れ線で結ぶように指導する。
② 書いたグラフは、どんな曲線に見えるだろうか （予想される生徒の反応） 山型、１次関数が２つ、２次関数。など	隣り合う数字の差が少しずつ小さくなっていることに着目させ、２次関数の特徴と関連づけるとともに、数列の階差的な考えの素地となる考え方を育てる。

２．展開② 1) 図４のグラフが $y=-\frac{1}{2}x^2+5x-\frac{5}{2}$ のグラフに近似することを話す。 ① $\boxed{y=-\frac{1}{2}x^2+5x-\frac{5}{2}\text{を平方完成して、図４のグラフの上に書きこんで、近似するかどうか確かめよう。}}$ ② $\boxed{y=-\frac{1}{2}(x-5)^2+10\text{を利用して、この曲の８週目の売り上げを予想してみよう。}}$ 2) 近似や予測について考察する。	回帰曲線や最小２乗法については扱わない。 局所的にしか近似しないことを説明する。
３．展開③ 「世界で一つだけの花」の例も扱い、データを分析する意義を説明してまとめる。	指数関数は未履修事項なので、曲線には２次関数だけではなく、いろいろな関数があることを感じさせる程度にしておく。

４．授業実践

(1)生徒の感想

・ＣＤの売り上げが２次関数のグラフを使って表すことができるなんておもしろかった。
・グラフでＣＤの売り上げが予想できるなんてすごいと思った。
・音楽に興味があったので、計算などで売り上げが予測できるのはすごいと思った。
・売り上げを予測することで出荷量を調節することができ、損失を最小限にできるという話はためになりました。
・こんな応用があるんだとわかっておもしろかった。

(2)考察

今回の実践を通じて、生徒は、2 次関数などの関数がデータ分析に使うことができるよさを感じることができ、データをグラフに表して分析するおもしろさや、データから未来予測できるおもしろさや便利さを感じることができたのではないかと考える。また、数学と経済や流通との関連性も感じることができたのではないかと考える。さらに、身近なＣＤの売り上げという題材を取り上げたことで、興味をひくことできたのではないかと考える。今後はいろいろなデータ分析の題材例について考えていきたい。

９．ホームランになるか

種類（話題・演習）　難易度　★★★
内容（物理，体育，現象理解）

１．単元

「３章　２次関数　１節　２次関数とそのグラフ　３　２次関数の最大・最小　」
最大・最小の応用

２．原理

東京ドームで図９のように、V_0=40m/t（＝144ｋｍ/ｈ）の速度、45°の角度でバックスクリーン方向に放たれた打球は、天井に当たらずにスタンドまで届くホームランになるかを考える。。

東京ドームの天井の高さは 56m、バックスクリーンのフェンスまでの距離は 120m、フェンスの高さは 6m という条件とする。

図９

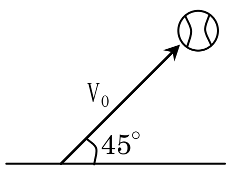
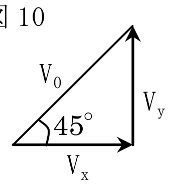


図 10 から、x 方向の速度 $V_x=\dfrac{40}{\sqrt{2}}=20\sqrt{2}$ m/t、y 方向の速度 $V_x=\dfrac{40}{\sqrt{2}}=20\sqrt{2}$ m/t である。

重力加速度を 10m/ t ^{2} とし、空気抵抗、風、打球の回転等を無視すると、

図 10

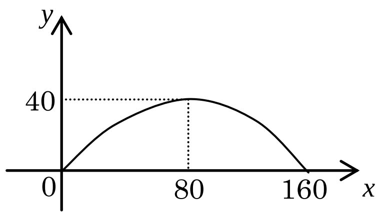


$x=20\sqrt{2}\,t$ …①

$y=20\sqrt{2}\,t-5t^2$ …② となる。

①より、$t=\dfrac{x}{20\sqrt{2}}$ から、これを②に代入すると $y=-\dfrac{x^2}{160}+x$…③となる。

図 11



これを、平方完成すると、$y=-\dfrac{1}{160}(x-80)^2+40$ となるため、

グラフは図 11 のようになる。

よって、打球の最高点は 40m で天井には当たらず、打球は 160m 飛ぶことになる。また 120m 地点のフェンスに当たらないかを調べると、

$x=120$ を代入して、$y=-\dfrac{1}{160}(120-80)^2+40=30$ となり、

120m 地点でまだ打球の高さは 30m もあり、楽々とフェンスを越えることがわかる。

数学的モデリングの分類では、数学的モデルを作るねらいによる分類において、現象理解にあたり、空気抵抗、風、打球の回転等を無視するといった条件、仮定を設定して、打球の行方という現象のしくみを理解するための数学的モデルを作る活動である。

３．本時の学習活動

(1) ねらい

① 2 次関数を使って野球の打球の動きが解析できることに興味・関心をもち、主体的に課題に取り組むことができるようにする。（関心・意欲・態度）

② 打球の動きを 2 次関数に近似し、平方完成をしてグラフを書くことで考察できるという見方・考え方ができるようにする。（数学的な見方・考え方）

③ 2 次関数を平方完成し、グラフの概形や最大値を求めることができるようにする。（表現・処理）

④ 2 次関数を平方完成することでグラフが書け、最大値を求められることが理解できるようにする。（知識・理解）

(2) 学習過程例

１．課題 東京ドームで図 9 のように、V_0=40m/t（＝144ｋm/ｈ）の速度、45° の角度でバックスクリーン方向に放たれた打球は、天井に当たらずにスタンドまで届くホームランになるだろうか。ただし、東京ドームの天井の高さは 56m、バックスクリーンのフェンスまでの距離は 120m、フェンスの高さは 6m とする。 1) 結果を生徒に予想させてから、式を出すところまでは説明する。 （予想される生徒の反応） ホームランになる。ホームランにならない。など 2) どうすれば問題を解決できるかを考えさせる。 3) 平方完成させ、グラフを書かせ、最大値を求めさせる。 4) 考察させて、結果を発表させる。	$y=-\dfrac{x^2}{160}+x$ の式が出るまでは、物理の分野で未履修なので、物理との関連性を感じさせるようにしながら、簡単に話す。

４．授業実践

(1) 生徒の感想

・打球の動きを予想することができるんだなあとおどろいた。

・身のまわりのことで数学的なことが学べてよかった。

(2) 考察

今回の実践を通じて、生徒は、ホームランと放物線の軌跡との関連を感じながら、2 次関数を利用することによって、重力落下の現象を理解、分析できるよさを感じることができたのではないかと考える。また、数学と物理との関連性も感じることができたのではないかと考える。今後は生徒が理解しやすい授業展開について工夫して、さらに実践を深めていきたい。

１０．雨どいを作るには

種類（実験）　難易度　★★

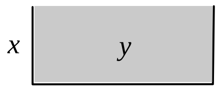
内容（日常生活，最適化）

１．単元

「３章　２次関数　１節　２次関数とそのグラフ　３　２次関数の最大・最小　」

最大・最小の応用

２．原理



幅 24ｃｍの銅板を右図のように折り曲げて、深さ x ｃｍの雨どいを作る。図の灰色の部分である、雨水を流す部分の面積を最大にするには、高さ x を何ｃｍにして折ればよいかを求める。

生徒には幅 24ｃｍの紙を配り、作業させて最大の面積になる折り方を探させ、計算で確認させる。底の幅は（24－2 x）ｃｍである。深さや底の幅は正であるから、$0 < x < 12$　・・・①

面積は、$y = x(24-2x) = -2x^2 + 24x = -2(x-6)^2 + 72$ となり、①の定義域より最大値を求めると、

$x = 6$ のとき、y は最大値 72 をとる。よって、高さ 6ｃｍ、底幅 12ｃｍになるように折ればよい。

数学的モデリングの分類では、数学的モデルを作るねらいによる分類において、最適化にあたり、作る雨どいの寸法をどうするかという判断が要求される問題場面で、面積が最大になるという最も適した解を求めるための数学的モデルを作る活動である。

３．本時の学習活動

(1) ねらい

① 雨どいを最大面積になるように作る課題に興味・関心をもち、主体的に課題に取り組むことができるようにする。(関心・意欲・態度)

② 雨どいの最大面積を、2 次関数の最大・最小の問題を使って求めることができるという見方・考え方ができるようにする。(数学的な見方・考え方)

③ 文章題から、定義域を考え、2 次関数を立式し、その式を平方完成して、グラフ等から制限された定義域での最大値を求めることができるようにする。(表現・処理)

④ 文章題から定義域と式を求め、最大値を求める解法が理解できるようにする。(知識・理解)

(2) 学習過程例

１．課題 幅 24ｃｍの銅板を折り曲げて、深さ x ｃｍの雨どいを作る。雨水を流す部分の面積を最大にするには、高さ x を何ｃｍにして折ればよいだろうか。 生徒には幅 24ｃｍの紙を配り、 結果を生徒に予想させてから、実際に紙を折らせて考えさせる。 (予想される生徒の反応) 高さ 6ｃｍ、8ｃｍ、11ｃｍ。など	紙は１ｃｍごとに目盛りをふってやると作業しやすい。 計算をしない段階では、正方形にすればよいという発想から高さ 8ｃｍ、高さ最大という考えから 11ｃｍといった答えがでてくることが予想される。

２．展開 1）どうすれば問題を解決できるかを考えさせる。 （予想される生徒の反応） xを１ｃｍから順に変えて折って面積を求める。 ２次関数の式を立てる。など 2）定義域と２次関数の式を求めさせ、平方完成させてグラフを書かせ、最大値を求めさせる。 3）考察させて、結果を発表させる。	最大値のxが整数なので、xを１ｃｍから順に変えていくと求まるので、生徒の実態によっては、最大値のxが整数ではないように設定してやると、２次関数を利用するよさを感じさせやすい。 xが整数の場合だけで考えると、整数でない範囲に最大値があった場合は、最大値を見過ごしてしまうことを説明する。

４．授業実践

(1)生徒の感想

・断面積が全部同じだと思っていたのに、ちがうのでおどろいた。

・折り方のちがいによって面積がかわってすごいと思った。

(2)考察

教科書に実際に載っている応用問題であるが、実際に生徒に紙を配って作業させて考えさせたことによって、生徒は問題をイメージすることができたように感じた。また身近にある雨どいを題材として強調したことで、生徒は問題を身近な問題としてとらえることができたように感じた。生徒の感想でもわかるように、同じ長さの紙で折ると面積も同じになるという勘違いをしている生徒は少なくないので、最初は極端な例（高さ１ｃｍ幅 22ｃｍ）から折ったり面積を求めたりしていくとよい。また、最大値のxが整数であると、xを１ｃｍから順に変えて求める生徒が多いので、最大値のxが整数ではない問題を扱うと、２次関数を利用しないと正答に達しづらいので、２次関数の有用性を感じさせやすいと考える。時間があれば次はそのような問題を扱ってみたい。

１１．校舎の高さを測る

種類（実験）　難易度　★

内容（測定の方法）

１．単元

「４章　図形と計量　１節　鋭角の三角比　２　直角三角形の辺と角　」

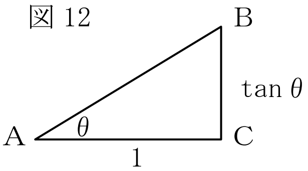
タンジェント

２．原理

(1) タンジェントの定義の方法

タンジェントの定義の方法には２通りあって、$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}$で定義する方法と、図 12 のように、AC＝1 のときの BC の長さが $\tan\theta$ と定義する方法が考えられるが、ここでは後者の立場をとる。

図 12

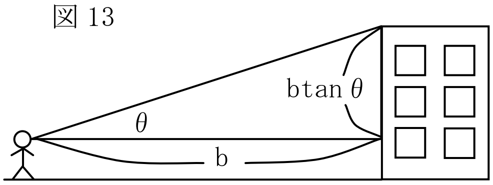


(2) タンジェントを利用して高さを測る

高さを測る物の真下から 1(m)はなれた地点から、物のてっぺんを見上げた角度をθとすると、その物の高さは $\tan\theta$ (m)である。

よって、高さを測る物の真下からｂ(m)はなれた地点から測ると、図 13 のように、その物の高さは b $\tan\theta$ (m)となる。

図 13



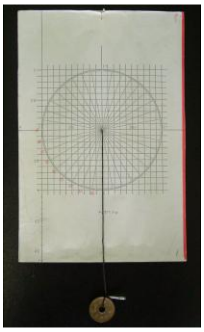
(3) 実験

この原理を使って、物の高さを測る実験を行う。校舎など実際の高さがわかっている物を共通の測定物とし、他は好きな物の高さを測定する。実験方法は次の３通りが考えられる。

① 距離と角度を測定する

メジャーと手作りの角度測定器（図 14）を用意する。メジャーはクラス全員分は用意できないので、クラスを班に分けて実験をする。角度測定器は、厚紙と糸と五円玉などのおもりがあればできるので、生徒に作らせる。

図 14



＜角度測定器の使い方＞

ⅰ）赤い線を上にし、矢印を目標の方向に向ける。
ⅱ）目線を合わせ、目標を見る。
ⅲ）糸のゆれが静止したら押さえ、目盛りを読みとって角度を測る。
（ⅰ～ⅲを何回か繰り返し、平均をとって、それを角度 θ とするとよい。）

② 距離ｂを固定して角度だけを測定する

例えば、距離を 10(m)に固定すると、高さは 10×tan θ (m)になる。距離を 10(m)に固定すると、メジャーを用意しなくても、10(m)の長さに切ったひもを用意するだけでよい。メジャーを使わないので、班ごとでなくひとりひとり好きな物の高さを測ることもできる。

また、ひもを使わずに歩測を使う方法もある。あらかじめ 10(m)に測った白線をひいておいて、生徒それぞれが 10(m)を何歩で歩けるかを測る。次に高さを測りたい物を見つけ、その真下から測った歩数を歩き、10(m)はなれた地点に立って測定する。これは、正確性には欠くが、好きなものを簡単に測れる機動性にすぐれている方法である。

③ 角度を固定する

角度を 45° に固定すれば、メジャーで測った長さがそのまま物の高さになる。この方法だけで測定すると、三角比を使わないので実験で使うのはよくないが、生徒が解決方法を考える場面では、話題にのぼることを想定したい。

(4) データ処理

生徒が計測したデータから計算をして、物の高さを求める。tan θ の値は、教科書の最後などについている三角比表で読み取る。この値は、図 13 のように、目線の高さからてっぺんまでの長さなので、実際の物の高さは、「計算値＋目線の高さ」である。目線の高さは、自分の身長－10ｃｍ前後で、きりのいい数値で生徒ごとに設定しておく。

(5) 予備実験データ

	実際の高さ（m）	測定（m）	誤差
校舎	18.5	10×tan60° ＋1.6＝18.9	2.2%

数学的モデリングの分類では、数学的モデルを作るねらいによる分類において、測定の方法にあたり、校舎の高さを求めるのに焦点を当てた数学的モデルを作る活動である。測定の誤差を少なくすることと、測定を簡単にすることという、相反する条件のもと、数学的モデルを作る際の理想化のレベルをどの段階にするかが重要である。

＜参考文献＞

[1]何森仁，小沢健一，近藤年示，時永晃 共著(1987)，「角度測定器」，『生き生き数学』，三省堂，pp.34-35.
[2]原恵理(1995)，「「測る」（三角比）の授業より」，『数学教室 1995.4 №521』，国土社.
[3]太田敏之(1996)，「物の高さを測ってみよう！（三角比より）」，「平成 7 年度高等学校数学研究会教育課程研究会全体発表会発表資料」.

３．本時の学習活動

(1) ねらい

① 三角比のタンジェントに興味・関心をもち、三角比の有用性を感じることで、主体的に実験に取り組むことができるようにする。（関心・意欲・態度）

② 物の高さが直角三角形とタンジェントを利用して求めることができるという見方･考え方ができるようにする。（数学的な見方・考え方）

③ 直角三角形の底辺と底角がわかっているときの高さを、タンジェントを使って求めることができるようにする。（表現・処理）

④ 直角三角形の底辺が 1、角度 θ のときの高さが $\tan\theta$ であることを理解できるようにする。（知識・理解）

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．展開① 校舎の高さを測るにはどうしたらよいだろうか？ （予想される生徒の反応） ・屋上からメジャーをたらす →長さが足りない ・屋上からボールを落とす →あぶない ・校舎の影の長さを測る →曇っているとできない ・45°の角度で校舎を見る →45°の長さ分場所をとることができるか ・相似な三角形をつくればよい	様々な方法がでるように議論させる。 それぞれの方法のよさと欠点を考察し、発表させる。
２．展開② 1) 直角三角形の底辺が 1、角度 θ のときの高さを測っていったものが $\tan\theta$ で、それが三角比表にのっているという方法で説明する。 2) 現実事象を理想化した過程を説明しながら図 13 を書いて、実験の原理を説明する。	$\tan\theta = \frac{BC}{AC}$ の定義は後で説明する。
３．実験 生徒個人または班ごとで校舎の高さとその他好きな物の高さを測定する実験を行う。	測定するものの高さを事前に生徒に予想させる。 距離を固定して角度を測定するなどの測定方法は、統一するか生徒に決めさせるか、どちらでもよい。
４．考察 実験したデータを処理し、実際の長さと比較して検討し、発表させる。	測定方法を限定しなかったときは、測定方法も発表させ、そのよさを検討させる。

４．授業実践

(1) 生徒の感想

・本当にタンジェントを使ってだいたいの高さがわかるんだなあと思った。
・教科書の問題だけでは答えをだしても実感がありませんでしたが、実際に測定して答えを出すとすごく納得できました。
・思ったより校舎って高いんだなあと思った。公式を使ってすぐものの高さがわかるというのはすごいと思う。この単元はおもしろいな。
・簡単に測ることができることがわかった。測定器を作るのは大変だけど、作ってしまえばいろいろなものの高さが測れて便利。
・意外に校舎の高さをきちんと測れたのに驚いた。こういう実験をすると身近に感じられておもしろいと思った。
・数学で実験をしたのは初めてで楽しかったです。また実験する機会があればやってみたいです。
・数学で計算ばっかりだったから実験するのもたまにはいいね。10 年前につくった先生の道具はスゴいね！！
・実験おもしろかったです。計算でわかっちゃうなんてスゴォイ！！！
・今日の実験は楽しかった。次は橋を測ってみたいです。

(2) 考察

今回の実践では、時間の関係で校舎のみを測定した。距離を 10mに固定する実験方法で、校舎から 10m離れた地点に線を引いて測定した。角度測定器は以前作成したものを 2，3 人に 1 つ配って

交互に使ってもらい、ひとりひとりが測定を行い、データをとった。外で実験をするという新鮮さと、簡単な道具だけで校舎の高さが測れるという驚きから、生徒に数学の有用性を感じさせることができ、生徒が数学を身近に感じることができたと考える。

１２．十国峠のケーブルカー

種類（演習）　難易度　★★

内容（測定の方法，日常生活，地理）

１．単元

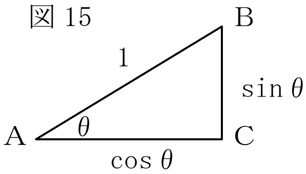
「４章　図形と計量　１節　鋭角の三角比　２　直角三角形の辺と角　」

サイン・コサイン

２．原理

(1) サインとコサインの定義の方法

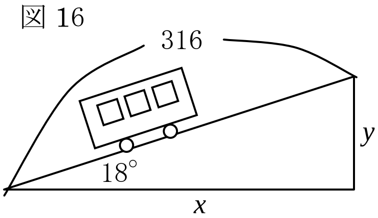
図 15



サインとコサインの定義の方法には 2 通りあって、$\sin\theta = \dfrac{BC}{AB}$ $\cos\theta = \dfrac{AC}{AB}$ で定義する方法と、図 15 のように、AB＝1 のときの BC の長さが sin θ 、AC の長さが cos θ と定義する方法が考えられるが、ここでは後者の立場をとる。

(2) 十国峠のケーブルカー

図 16



伊豆半島にある十国峠のケーブルカーは、図 16 のように、レールの全長が 316m、平均傾斜角は 18° である。このとき、山ろく駅と山頂駅の標高差 y とレールの地図上の長さ x を求める。地図上の長さとは、図 17 の地図に書かれているレールの長さである。三角比表を用いて計算すると、標高差 y ＝316×sin18° ≒316×0.3090＝ 97.644m

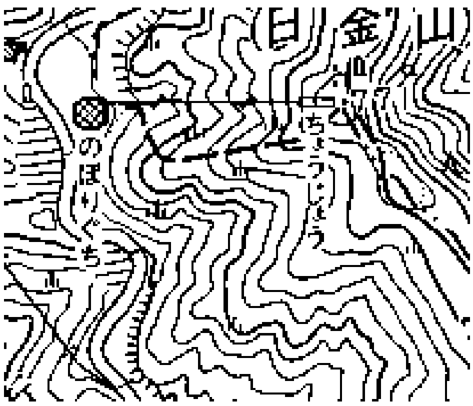
地図上の長さ x ＝316×cos18° ≒316×0.9511＝300.5476m となる。

地図上の長さは、図 17 の 5000 分の 1 の地図に書かれているレールの長さを測るとちょうど 6ｃｍなので、実際の長さは 6×5000＝30000ｃｍ＝300m となり、ほぼ正しいことが検証できる。また標高差においても図 18 の地図で山ろく駅から山頂駅までの等高線を数えると 10 本分あり、等高線の間隔は 10m 間隔なので標高差が約 100m であることがわかり、ほぼ正しいことが検証できる。(図 18 のレールの長さは、駅の中心付近から測られているようで、地図上の長さを正確に検証するのには使いづらいので、使う図を分けた。)

数学的モデリングの分類では、数学的モデルを作るねらいによる分類において、測定の方法にあたり、十国峠のケーブルカーの標高差と地図上の距離を求めるのに焦点を当てた数学的モデルを作る活動である。斜面が平均斜度で一定とするなどの理想化を確認することが重要である。

図 17

図 18



<参考資料>

[1]「goo 地図」，http://goo.ne.jp/map

[2]「国土地理院.地形図閲覧システム」，http://mapbrowse.gsi.go.jp

３．　本時の学習活動

(1) ねらい

① 三角比のサイン・コサインに興味・関心をもち、三角比の有用性を感じ、主体的に課題に取り組むことができるようにする。(関心・意欲・態度)

② 標高差や地図上の長さが直角三角形とサイン･コサインを利用して求めることができるという見方・考え方ができるようにする。(数学的な見方・考え方)

③ 直角三角形の斜辺と底角がわかっているときの高さと底辺を、サイン・コサインを使って求めることができるようにする。(表現・処理)

④ 直角三角形の斜辺が 1、角度 θ のときの高さが $\sin\theta$ 、底辺が $\cos\theta$ であることを理解できるようにする。(知識・理解)

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．課題① 十国峠のケーブルカーの写真を見せる。 このケーブルカーはどのくらいの高さを登っているのだろうか？（山ろく駅と山頂駅の標高差を求める）わかっていることはケーブルカーのレールの全長が 316mであることと、平均傾斜角が 18°ということである。	生徒に解法を考えさせる。
２．課題② 図 17 の地図を配る。 この地図を作るとき、ケーブルカーのレールの長さを316mで書いていいだろうか？レールの地図上の長さを何mにとればよいだろうか？	角度が急な場合は、たくさん進んでも水平方向の移動は少ないことも考えさせる。
３．考察 計算結果を発表してもらう。図 18 で標高差を、図 17 の地図で地図上の距離を調べ、比較をして発表させる。	等高線の見方も説明する。

４．授業実践

(1) 考察

教科書にある問題を､少し身近に感じられるように具体化した教材である｡今回の実践を通じて、生徒にとって標高差の問題は身近に感じていたようであるが、地図上の長さはあまり身近には感じていなかったように感じた。しかし、ただ教科書の文章題を解くよりは生徒は問題をイメージすることができたのはないかと考える。等高線や地図の縮尺を扱うのは難しかったが、生徒の実態に応じてうまく扱うと、数学と地理との関連性にもつながり、よい教材となるのではないかと考える。

その他の題材として、道路の角度標識（例えば「角度 7%」の標識から、タンジェントを利用して角度を求める)、屋根の勾配（例えば「四寸勾配」の表現からタンジェントを利用して角度を求める)、すべり台の角度（実際に写真を取ったものを定規で測りサイン を利用して求める）などの実践も行ったが、それぞれ反応はとてもよかった。これからも積極的に身近なものを測定する題材を取り入れていきたい。

１３．スキーのジャンプ

種類（演習）　難易度　★★

内容（測定の方法）

１．単元

「４章　図形と計量　１節　鋭角の三角比　２　直角三角形の辺と角　」

サイン・コサイン

２．原理

スキーのジャンプ競技で、札幌の大倉山ジャンプ競技場で120ｍの距離を飛んだとする。これは、斜めに飛んだ距離を測っているので、実際に前には何ｍ飛んでいて、何ｍ下へ降りたのだろうか。大倉山ジャンプ台のランディングバーンの斜度は約 37 度なので（斜度は一定ではないので誤差あるが）、前には $120 \times \cos 37^\circ \fallingdotseq 95.8$ｍ、下には $120 \times \sin 37^\circ \fallingdotseq 72.2$ｍ飛んでいることがわかる。

数学的モデリングの分類では、数学的モデルを作るねらいによる分類において、測定の方法にあたり、スキーのジャンプ競技の動きを求めるのに焦点を当てた数学的モデルを作る活動である。

３．　本時の学習活動

(1) ねらい

① 三角比のサイン・コサインに興味・関心をもち、三角比の有用性を感じ、主体的に課題に取り組むことができるようにする。（関心・意欲・態度）

② スキーのジャンプ競技での前に飛んだ距離と下の降りた距離を、サイン・コサインを利用して求めることができるという見方・考え方ができるようにする。（数学的な見方・考え方）

③ 直角三角形の斜辺と底角がわかっているときの高さと底辺を、サイン・コサインを使って求めることができるようにする。（表現・処理）

④ 直角三角形の斜辺が 1、角度 θ のときの高さが $\sin\theta$、底辺が $\cos\theta$ であることを理解できるようにする。（知識・理解）

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．課題 大倉山のジャンプ台の写真を見せる。 スキーのジャンプ競技で、札幌の大倉山ジャンプ競技場で 120ｍ飛んだとき、前には何ｍ飛んでいて、何ｍ下へ降りたでしょうか？ジャンプ台のランディングバーンの斜度は、約 37 度である。	生徒に何ｍ下に降りているかを予想させる。 生徒に解法を考えさせる。
２．考察 計算結果を発表してもらう。	72ｍ降りるということは、ビルの 24 階くらいから飛び降りるのと同じくらいであることを話す。

４．授業実践

(1)生徒の感想

・降りる高さがものすごく高くてびっくりした。

・以前からジャンプ台のどのくらいの高さから落ちているのかが気になっていたので、今回知ることができてとてもためになりました。

・ジャンプ台をテレビでは遠くからしかうつらなかったから、この授業で写真を見てこんなに高いんだあと思ったし、簡単に高さがわかって楽しかった！

(2)考察

筆者が大好きなスキーのジャンプ競技を題材として取り上げてみたが、意外にも生徒にとっても興味がある題材であり、特にどれくらいの高さ降りているかは興味があったらしく、計算結果にも驚きを表していた。次は、時間があれば、ジャンプのフライングの台（200ｍ以上飛ぶ台）についても扱ってみたい。

１４．はしご車のはしごが届く距離

種類（話題・演習）　難易度　★★★

内容（日常生活，社会的有用性）

１．単元

「４章　図形と計量　１節　鋭角の三角比　２　直角三角形の辺と角　」

サイン・コサイン

２．原理

２．原理

(1) はしご車のはしごが届く距離①

はしご車は、はしごの長さが 30mのものが一般的であり、はしごが最大 75°の角まであがるということである。このとき、どれくらいの高さまではしごをかけることができるかと、そのときに必要な道路の幅を求める。消防車の高さは 3.5mであるとする。

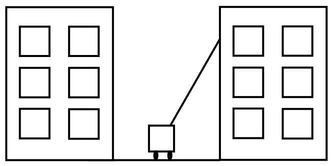
高さ$h=3.5+30\times\sin75^\circ\fallingdotseq3.5+30\times0.9659=31.977$m

必要な道路の幅$x=30\times\sin75^\circ\fallingdotseq30\times0.2588=7.764$m

となる。これによると、高さ約 31m、ビルにして 10 階くらいの高さにはしごをかけることができる。

しかし、いくらはしごの高さが足りても、道路の幅が約 8mないとはしごをかけることができないこともわかる。

図 19

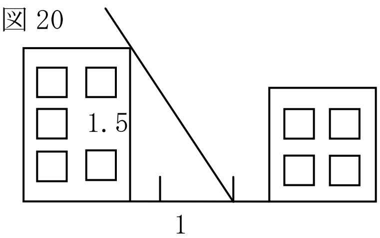


(2) 消防法と建築基準法

消防法第 8 条の 2 によると、31mを超えるビルを高層建築物という。いわゆる高層ビルである。31mというと 10 階建てのビルに相当する。東京消防庁は、「共同住宅以外の高層建築物では、火気使用設備に都市ガスを使用する器具はなるべく使用せず、やむを得ず使用するときは、31m以下の階で使用する。31mを超える階では展望を目的とした飲食店など、機能上必要と認められるものに限られる。」などと行政指導している。この 31mというのが、30mのはしご車が届く距離からきているのではないかと考えられる。

また、建築基準法では、道路斜線制限という法律で目の前の道路の幅に対する建物の高さを制限している。これは、まず建物は幅 2m以上道路に接している必要があり、ビルなどの商業系用途の場合、その前面道路の反対側の境界から敷地に向かって、図 20 のように、1：1.5 の斜線内に入る高さに立てなければならないのである（住宅地の場合は 1：1.25)。つまり、31mの高さの建物を建てるためには $31\div1.5\fallingdotseq20.67$mの幅が必要ということである。これは、はしご車がはしごをかけるために必要な幅としては十分である。

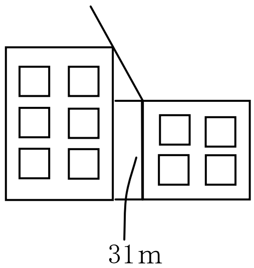
図 20



ちなみに $\tan\theta=1.5$ のときの $\theta\fallingdotseq56.3$ なので、はしご車のはしごを 56.3 度まで立てればよいことになる。

さらに建築基準法で、道路に接していない部分については、ビルなどの商業系用途の場合、図 21 のように、31mの垂直線を引き、その上端から 1：1.25 の斜線内に入る高さに立てなければならないとある。この 31mも、30mのはしご車が届く距離と関連しているのではないかと考えられる。

図 21



(4) はしご車のはしごが届く距離②

はしご車で、はしごの長さが最長のものは 50mである。同様に、はしごが最大 75°の角まであがるとき、最大どれくらいの高さまではしごをかけることができるかと、そのときに必要な道路の幅を求める。

高さ$h=3.5+50\times\sin75^\circ\fallingdotseq3.5+50\times0.9659=51.795$m

必要な道路の幅　$x=50\times\sin75^\circ\fallingdotseq50\times0.2588=12.94$m　となる。

これによると、高さ約 52m、ビルにして 15～16 階の高さにはしごをかけることができる。

しかし、いくらはしごの高さが足りても、道路の幅が約 13mないとはしごをかけることができないこともわかる。

数学的モデリングの分類では、数学的モデルを作るねらいによる分類において、社会的有用性にあたり、数学的原理を利用して社会的に有用な消防法がつくられたということに焦点を当てた数学的モデルを作る活動である。

＜参考文献＞

[1]吉岡淳(2003),「定理を得る過程を追体験する授業」,『高等学校の数学の授業と授業研究』,国立教育政策研究所, p.55.

[2]ホームページ「全国住宅展示場ネットワーク.総合住宅展示場ガイド.住まいの知識－建築法規－」, http://www.e-a-site.com/html/index4_4.html

[3]ホームページ「なんだか変.東京ウォッチング.区庁舎展望レストラン」, MainichiINTERACTIVE, http://www.mainichi.co.jp/eye/strange/1999/1019.html

３．本時の学習活動

(1) ねらい

① 三角比のサイン・コサインに興味・関心をもち、三角比の有用性を感じ、主体的に課題に取り組むことができるようにする。(関心・意欲・態度)

② はしご車ではしごをかけるという現実場面の問題がサイン･コサインを利用して考察できるという見方・考え方ができるようにする。(数学的な見方・考え方)

③ 直角三角形の斜辺と底角がわかっているときの高さと底辺を、サイン・コサインを使って求めることができるようにする。(表現・処理)

④ 直角三角形の斜辺が 1、角度 θ のときの高さが $\sin\theta$ 、底辺が $\cos\theta$ であることを理解できるようにする。(知識・理解)

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．課題① はしご車の写真を見せる。 はしご車は、はしごの長さが 30ｍのものが一般的であり、はしごが最大 75°の角まであがるということである。このとき、どれくらいの高さまではしごをかけることができるだろうか？また、そのときに必要な道路の幅も考えよ。ただし、消防車の高さは 3.5ｍであるとする。	図を考えさせて書かせる。 式を立てさせて計算させ発表させる。
２．考察 消防法や建築基準法について説明し､課題①で出た結果を考察させ、発表させる。	現実場面や法律の中の数字との関連を、興味をもてるように話す。
３．課題② はしごの長さが最大の 50ｍのときについて計算させる。	生徒が求めてみたいように課題提示する。

４．授業実践

(1)生徒の感想

・消防法とかそういうのも数学で考えられるんだなあって思った。

・消防法の中に数学があっておもしろかった。

・消防法と数学に関係があるとは意外だった。数学がとても身近に感じられた。

・普通に豆知識としてよかった。楽しかった。

・おもしろかった。現実味があった。

・31m以上の所で火災がおきたら大変だと思った。

(2)考察

今回の実践を通じて、生徒は、一見全く関連のないように思われる消防法と数学が関連しているの

ではないかということの驚きを感じ、数学の有用性や身近な数字を数学で分析するおもしろさを感じることができたのではないかと考える。また、はしご車のはしごが届く距離の実際に計算することで、自分が高層ビルの高い階にいるときに火災があったらどうなるのかなどを考え、題材が身近に感じられたようである。

１５．太陽までの距離

種類（話題・演習）　難易度　★★

内容（地学）

１．単元

「４章　図形と計量　１節　鋭角の三角比　３　三角比の相互関係　」

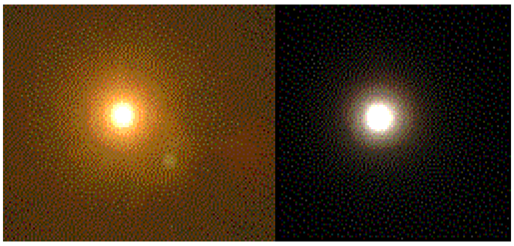
90°　－A の三角比

２．原理

(1)　太陽までの距離は月までの何倍か

「地球から太陽、月までの距離の比」を最初に求めたのは、アリスタルコス（BC310 年～）である。アリスタルコスはユークリッドの弟子で、初めての科学的天文学者であり、それまでの勝手な想像から離れて、観測をもとにした天文学をはじめて確立した人である。

図 22



地球から見ると、図 22 のように、太陽と月はほとんど同じ大きさに見えるが、地球と太陽の間に月が入って日食が起きることなどから、月の方が太陽よりも近くにあると推測できた。そこでアリスタルコスは、太陽は月までの距離の何倍くらいなのかを求めることに挑戦した。

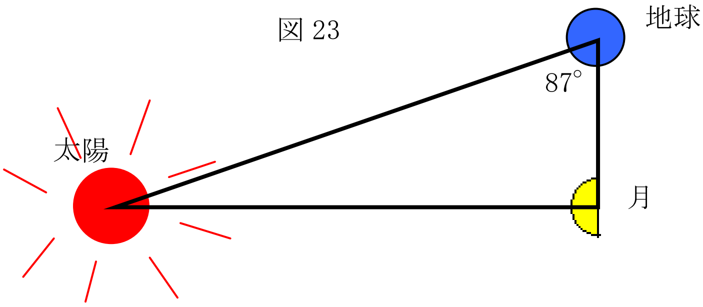
まず、月は太陽とは違い、自ら光を発しているわけではなく太陽の光を反射していることは、月が満ち欠けすることからたやすく想像できた。

月が半月の時は、太陽のちょうど真横に光っていることだから、そのときの月と地球、太陽の位置関係は、図 23 のように、大きな直角三角形になると考えた。

よってアリスタルコスは、「月～地球～太陽」の角度を測り、87 度であることから、「地球～月の距離」を 1 とすると、「地球～太陽の距離」 $= \dfrac{1}{\cos 87°} \fallingdotseq \dfrac{1}{0.052} \fallingdotseq 19.11$（※ $\dfrac{1}{\sin 3°}$ でもよい。）

となり、「地球から太陽の距離」は「地球から月の距離」の約 19 倍になるとした。

図 23



アリスタルコスはこの証明を当時の王ヒエロンへの書簡の中で行っていて、それまでは太陽は月の 3 倍の距離と思われていたので、「いかに太陽が月に比べて遠いか」を力説していた。

しかし、実際は 19 倍どころか、約 400 倍にもなる。これは、実際の「月～地球～太陽」の角度が、約 89 度 51 分（89 度 51 分 $=89+\dfrac{51}{60}$ 度 $=89.85$ 度）であったからであり、これによると、「地球～太陽の距離」 $\fallingdotseq \dfrac{1}{\cos 89.85°} \fallingdotseq \dfrac{1}{0.002618} \fallingdotseq 382$ 倍となる。

（※厳密には「地球～月の距離」は約 38 万 km、「地球～太陽の距離」は約 1 億 5 千 km だから、394.7 倍になる。よってこれでも精度は低いが、89 度 52 分にすると、89.866･･度になり

$\frac{1}{\cos 89.866\cdots^\circ} \fallingdotseq \frac{1}{0.002327}$ ≒430 倍になってしまい、1 分角度が違うだけで大きく変わってしまうので、この測定法ではこれくらいの誤差は仕方がないと思われる。)

当時の測定精度が追いつかなかったわけだが、アリスタルコスの考え方はすばらしかったといえる。また、アリスタルコスは、さらにこれらから太陽の重量は地球の254倍と計算した(実際は約33万倍)。アリスタルコスは「地球よりもはるかに重い太陽が地球のまわりを回っている(天動説)は不自然だ。地球の方が太陽のまわりを回っているのではないか。」と論じ、最初の地動説論者となり、後のコペルニクスにも影響を与えたといわれている。

数学的モデリングの分類では、指導目標による分類において、数学と他教科の関連性（地学）にあたる。

＜参考文献＞

[1]中宮寺薫(1994),『数学通になる本』, オーエス出版社, pp.64-65.

[2]中里孝(2004),「生徒が興味をもち自ら学ぶ力を育てる数学科指導法の研究」,「平成 15 年度長期研修報告書」.

３．本時の学習活動

(1) ねらい

① 数学と宇宙やその歴史との関連に興味・関心をもち、主体的に課題に取り組むことができるようにする。(関心・意欲・態度)

② 「地球から太陽の距離」と「地球から月の距離」の比を求めるときに、コサインを利用しても、サインを利用してもよいことに気づき、$\cos\theta$ と $\sin(90^\circ - \theta)$の関係に気づくことができる。$\cos 89^\circ$ 付近では、角度が微小に変わると値は大きくかわることに気づくことができる。(数学的な見方・考え方)

③ コサインを使って直角三角形の辺の比を求めることができるようにする。(表現・処理)

④ 直角三角形の斜辺と底辺の比がコサインであることを理解できるようにする。$\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$であることを理解できるようにする。(知識・理解)

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．展開 アリスタルコスの話をして、図 23 を与える。	興味をもつように話をする。
２．課題 図 23 から、太陽と月の距離の比を求めてみよう。 生徒に考えさせて発表させる。 (予想される生徒の答え) $\frac{1}{\cos 87^\circ}$, $\frac{1}{\sin 3^\circ}$, $\cos 87^\circ$, $\sin 3^\circ$, $\tan 87^\circ$ …	$\frac{1}{\cos 87^\circ}$ と $\frac{1}{\sin 3^\circ}$ の両方出た場合には、三角比表で計算させ(電卓を用いてよい)どちらでもよいことを考えさせる。$\frac{1}{\sin 3^\circ}$ が出ない場合には、ヒントを出して、意見が出るようにする。 $\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$に気づくようにする。
３.考察 実際の距離を紹介して、誤差を考え、アリスタルコスの話の先を進める。	89 度 51 分の 60 進法については、余裕があればふれるものとする。ふれないときは、89 度 52 分だと 430 倍になってしまい誤差が大きくなることは、$\cos 89^\circ$ 付近では角度が微小に変わると値は大きくかわることに着目させて、簡単にふれる程度にする。

４．授業実践

(1)生徒の感想

・地球から太陽・月までの距離の比が数学でわかってしまうなんてすごいと思った。昔と比べて数学は時代が進むごとにどんどん進化していることがわかった。
・そういう風に数学を用いて求められるんだなあって思った。
・昔の人はすごいなあと思った。
・えーってかんじでびっくりしました。

(2)考察

今回の実践を通じて、生徒は数学と地学との関連や、宇宙の現象を数学を利用して分析できることのよさを感じることはできたのではないかと考える。また、数学史にもふれることができ、測定技術がまだ発達していない分をカバーする昔の人の考え方のすごさや、数学や技術の時代による進歩なども感じることができ、よかったのではないかと考える。ただ、授業の展開の仕方を配慮しないと､この授業の大きなねらいである $\cos\theta$ と $\sin(90°-\theta)$ の関係の部分がぼやけてしまうので、注意しなければならないと感じた。

１６．ガリバー旅行記

種類（演習・議論）　難易度　★★

内容（国語）

１．単元

「４章　図形と計量　４節　図形の計量　１　相似と計量　」

相似な平面図形の面積比，相似な立体の体積と表面積

２．原理

ガリバー旅行記・リリパット国（小人国）の話に出てくる数字を分析し、相似な平面図形の面積比、相似な立体の体積と表面積について理解を深める。

① 小人のサイズ

そのうちに、左脚の上で、何か生き物がもぞもぞ動いている気配がした。そいつは、そろそろと胸のあたりを通りすぎると、あごのすぐ下まで進んできた。できるだけ下目を使って見ると、15ｃｍたらずの人間の姿が目にはいった。（ｐ7）

問 1）ガリバーと小人の身長の比はどれくらいだろうか？
ただしガリバーの身長を 180ｃｍとする。

答え）180ｃｍ：15ｃｍ＝12：1
（この比率は後で本に記述されている。（ｐ57））

② 塔の高さ

大通りをへだてて、神殿から 6m離れた向こう側に、少なくとも 1.5mぐらいの塔が建っていた。（ｐ22）

問 2）小人が感じる塔の高さは、普通の人間にとってのどれくらいの高さの塔と同じだろうか？

答え）1.5m×12＝18m

③ 畑の大きさ

まわりの土地は、ひとつづきの庭園のようだった。柵にかこまれた畑はどれもだいたい 12m^{2}ほどの広さで、花壇によく似ていた。畑と畑の間には、22m^{2}ほどの広さの森がまざっており…（ｐ24）

問 3）　小人が感じる畑と森の広さは、普通の人間にとってのどれくらいの広さの畑と森と同じだろうか？

答え）面積比なので、$1:12^2=1:144$ になる。
畑；12m^2×144＝1728m^2　（約 41.6m四方）
森；22m^2×144＝3168m^2　（約 56.3m四方）

④ 食料

> こんどは、何か飲み物がほしいという身振りをしてみせた。連中は、わたしの食べっぷりから察して、少しくらいではとてもたりないと見てとり、しかも、たいそう気のきく人たちだったので、いちばん大きな樽を、実に器用に吊るしあげてから、わたしの手もとまで転がしてきて、ふたをたたき割ってくれた。わたしは一気に飲みほしてしまったが、それもあたりまえのことだった。なにしろ、分量は、0.2ℓそこそこだったし、味は薄味のブルゴーニューワインに似ていて…（p13）

問4）小人にとってのワインの量は、普通の人間にとってのどれくらいの量だろうか？

答え）体積比なので、$1:12^3=1:1728$ になる。

　　　$0.2\ell\times1728=345.6\ell$　（1.5ℓのペットボトル230杯分）

⑤ ガリバーの布団

> 皇帝は、わたしのためにベッドをつくるようにと、命令を出された。この国では普通の大きさの布団が、600枚も車で運んでこられ、家の中で、わたしに合うように仕立てられた。つまり、150人分の布団を縫い合わせて1枚とし、同じ大きさのものを4枚重ねただけのことだったが…（p31）

問5）この布団の大きさと厚さは、ガリバーにとって十分なものだろうか？

考察）布団の大きさは、面積なので144倍必要だから、150人分あれば十分の大きさ。
布団の厚さは、長さなので12倍必要だが、4枚しか重ねていないので、普通の布団の3分の1の厚さと感じ、薄くて寝ごこちは悪い。

⑥ 軍艦を引っ張る

> 海峡の中ほどまでできるだけ急いで歩いていき、そこから30ヤードほど泳いだら、また足が海底に届いた。艦隊のすぐそばまで近づくのに、半時間たらずしかかからなかった。
> （中略）
> また、鉤のついている綱の結び目を手ににぎって、軍艦の中でも最も大きいのを50隻ほど、らくらくと引っ張ってもどってきた。（p75）

問6）ガリバーは本当に軍艦を50隻も引っ張れたのだろうか？

考察）当時の軍艦の例として、ベネチアのポラカ(1750年)は500トンであった。
小人の世界の軍艦1隻の重さは、$500\div1728\fallingdotseq0.289$ トン＝289kgより、
軍艦50隻の重さは、$289\times50=14450$kg＝14.45トン
現実の世界では、モーターボート1隻が約300kg、遊漁船1隻14トンであるが、
モーターボート50隻または遊漁船1隻を引っ張ることができるだろうか？

⑦ 体に登ってくる人

> 彼らは、番兵が立っているのもおかまいなしに、何度も、はしごを伝わってわたしの体の上に登ってきたが、その数は1度に1万をくだることはなかったと思う。（p22）

問7）ガリバーの体に1万人も乗ることができるのだろか？

考察）重さ…人1人の重さを65kgとすると、
小人1人の重さは $65\text{kg}\div1728\fallingdotseq0.038\text{kg}=38\text{g}$ より、
小人1万人の重さは、$0.038\text{kg}\times10000=380\text{kg}$
これは、鍛えている人には耐えられる重さであると考えられる。

表面積…人1人の足の面積を 500cm^2 とすると、
小人1人の足の面積は、$500\ \text{cm}^2\div144\fallingdotseq3.5\ \text{cm}^2$
小人1万人の足の $3.5\ \text{cm}^2\times10000=35000\ \text{cm}^2$
ガリバーの身長を180cm、横幅80cmとしても、表面積は $14400\ \text{cm}^2$
多く見積もっても、とても乗ることはできないと考えられる。

数学的モデリングの分類では、指導目標による分類において、数学と他教科の関連性（国語）にあたる。

＜参考文献＞

[1] J．スウィフト著，坂井晴彦訳(1988)，『ガリヴァー旅行記』，福音館書店.

３．本時の学習活動

(1) ねらい

① ガリバー旅行記に書かれている数学に興味・関心をもち、文学と数学の関連性を感じ、主体的に課題に取り組むことができるようにする。（関心・意欲・態度）

② ガリバー旅行記に書かれている数字を、相似的な見方・考え方で捉えることができるようにする。（数学的な見方・考え方）

③ ガリバー旅行記に書かれている状況を、相似な平面図形の面積の比と相似な立体の表面積比と体積の比の関係を使って分析することができるようにする。（表現・処理）

④ 相似な平面図形の面積の比と相似な立体の表面積比と体積の比の関係について理解することができるようにする。（知識・理解）

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．導入 ガリバー旅行記の一部を配布し、生徒に読ませ、数字部分に着目させて、状況をイメージさせる。	ガリバーと小人のサイズをイメージさせて、相似的な感覚をもたせる。
２．課題① 原理の①～④の問題を示し、具体的な状況をイメージさせながら課題に取り組ませる。	時間を区切って、1 問ずつ生徒に解答させる。 展開によっては、課題を 1 問ずつ区切って生徒に与え、その違いを明らかにしていく方法も考えられる。 相似な平面図形の面積の比と相似な立体の表面積比と体積の比の関係がイメージできるように解説をする。
３．課題② 1) 原理の⑤～⑦の問題を示し、具体的な状況をイメージさせながら、課題に取り組ませる。 2) 生徒個人ごとまたはグループで考えさせて、発表させ、議論させる。	生徒の状況に応じて、個人で考えさせるか、グループで考えさせるかのどちらかにする。 数字的な値は出すが、結果については議論させることに主眼をおき、結論を断定しない。
４．考察 表面積比が相似比の 2 乗、体積比が相似比の 3 乗になることから起こる現実事象の話をしてまとめる。	ガリバーの話には、巨人の国の話もあるが、「巨人は足の裏の面積が相似比の 2 乗であることに対し、体重は相似比の 3 乗になることから、足の裏にかかる圧力が大きすぎて立てないことが考えられる。」「建築物の縮小モデルは、圧力の関係で同じ素材で作っても物理的な相違点が生まれる。」など、物理的に興味をひく話をしてまとめる。

４．授業実践

(1)生徒の感想

・計算してみると思っていたこととちがったからけっこう意外で楽しかった。
・すげえおもしろかった。考えれば考えるほどおもしろい！！調べた先生の気持ちがよくわかる。
・楽しかった。考える楽しみを与えてくれた。
・ガリバーは読んだことがあったけど、細かい大きさは気にしてなかったからびっくりした。巨人は物理的に無理と知ってショック。でも楽しかった です。
・今までは面積だけで考えていたことがわかった。これからは体積でも考える！

・物語をこういう風に見ていくのもおもしろかったです。
・物語の一部分に数学的な疑問を持つのがおもしろかった。
・童話だから夢をこわさないほうがいいと思う。
・童話に数学が適用できるなんてびっくりしました。
・数学ってけっこう色々使えるなと思った。楽しかった。
・ガリバー旅行記を読んでみたくなりました。

(2)考察

今回の実践では、時間がなくて生徒に十分な時間をとって考えさせることはできず、説明していくことが多くなってしまったが、生徒にガリバー旅行記という物語を通じて、十分に相似の世界をイメージさせることができたと感じた。また、物語の中の数字に着目し、疑問を持ったら数学を使って考察してみることのおもしろさを感じさせることができたのではないかと考える。さらに、物語から飛び出し、巨大な世界やミクロの世界の面積と体積の関係などの話をすると、物理や身近なものとの関連にも発展させることができ、とてもおもしろい授業が展開できたと感じた。

１７．身のまわりの球を測る

種類（演習・実験）　難易度　★

内容（日常生活）

１．単元

「４章　図形と計量　４節　図形の計量　２　球の体積と表面積　」

球の体積と表面積

２．原理

直方体など体積や表面積が容易に計算できる物を提示し、それと同じ体積の球をと同じ表面積の球身の回りからを探す授業展開を行う。

例えば、数学の問題集の体積は、 18.2ｃｍ×25.7ｃｍ×1.1ｃｍ≒515ｃｍ^3

表面積は、18.2ｃｍ×25.7ｃｍ×2＋18.2ｃｍ×1.1ｃｍ×2＋25.7ｃｍ×1.1ｃｍ×2＝1032ｃｍ^2

であることを提示し、それと同じ体積の球と同じ表面積の球を身の回りから探してこさせる。

例として、卓球ボール、野球ボール、ソフトボール、ハンドボール、サッカーボールなどを提示し、予想させてから、体積と表面積を計算させてもよい。

卓球ボール　体積　半径２ｃｍより、$\frac{4}{3}\pi\times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$ ≒34ｃｍ^3

表面積　$4\pi\times 2^2 = 16\pi$ ≒50ｃｍ^2

野球ボール（硬球）　体積　半径3.5ｃｍより、$\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{343}{6}\pi$ ≒180ｃｍ^3

表面積　$4\pi\times\left(\frac{7}{2}\right)^2 = 49\pi$ ≒ 154ｃｍ^2

ソフトボール（3 号球）　体積　半径５ｃｍより、$\frac{4}{3}\pi\times 5^3 = \frac{500}{3}\pi$ ≒523ｃｍ^3

表面積　$4\pi\times 5^2 = 100\pi$ ≒314ｃｍ^2

ハンドボール（2 号球）　体積　半径９ｃｍより、$\frac{4}{3}\pi\times 9^3 = \frac{2916}{3}\pi$ ≒3052ｃｍ^3

表面積　$4\pi\times 9^2 = 324\pi$ ≒1017ｃｍ^2

サッカーボール　　　　　体積　半径11ｃｍより、$\frac{4}{3}\pi\times11^3=\frac{5324}{3}\pi$ ≒5573ｃm^3

表面積　$4\pi\times11^2=484\pi$ ≒1520ｃm^2

となり、体積はソフトボール、表面積はハンドボールと近いことがわかる。
　数学的モデリングの分類では、指導目標による分類において、数学と日常生活の関連性にあたる。

３．本時の学習活動

(1) ねらい

① 身の回りの球の体積や表面積に興味・関心をもち、主体的に課題に取り組むことができるようにする。（関心・意欲・態度）

② 形の違う直方体と球の体積や表面積を、数値で比較するという考え方ができるようにする。（数学的な見方・考え方）

③ 球の体積や表面積を求めることができるようにする。（表現・処理）

④ 球の体積や表面積の公式とそのなりたちを理解することができるようにする。（知識・理解）

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．課題① この数学の問題集の体積は515ｃm^3、表面積は1032ｃm^3である。これと同じ体積の球と同じ表面積の球はどれだろうか？ 形の違う直方体と球の体積と表面積を比べるにはどうしたらよいだろうか？ （予想される生徒の反応） 表面積は実際に紙を巻く。 体積は中をくりぬいて砂を入れる。 体積と表面積を数値として求めて比べる。など	前時にこの課題を出し、生徒に球を探して測ってきてもらう。または、こちらで球を用意して提示する。直方体はここでは問題集であるが、別のものでもよい。 表面積と体積を数値として出すことの意味とその有用性を感じさせる。
２．展開 半径ｒの球の体積は、底面の半径ｒ高さ２ｒの円柱の体積の何倍かを予想してみよう。 （予想される生徒の反応） $\frac{1}{3}$倍，$\frac{1}{2}$倍，$\frac{2}{3}$倍・・・など。 半径ｒの球の表面積は、半径ｒの円の面積の何倍かを予想してみよう。 （予想される生徒の反応） ４倍，５倍・・・など。 球の体積と表面積の公式を求める。	円錐は$\frac{1}{3}$倍だったことを話し、$\frac{2}{3}$倍を予想させる。 円錐＋球＝円柱のモデルを使って説明し、球の体積の公式を導く。 実際に円を切り抜いた紙を球に巻きつけてみる。 円の面積の４倍であることから、球の表面積の公式を導く。 それぞれ何倍かというのは、積分を使わないと求められないので、ここでは周知の事実とする。
３．課題② 課題①で用意した直方体が用意したどの球と同じ体積、表面積かを生徒に予想させてから、実際に球の体積と表面積を計算し、発表させる。	予想したものから計算させて、直方体の体積、表面積と近いかどうかを調べさせる。

４．授業実践

(1)考察

　今回の実践では、使用する球はすべてこちらで提示した(ハンドボール以外の４つの球を用意した)。また時間の関係で、課題で行ったのは体積だけにした。直方体を「数学の問題集」という厚さがなく体積がわかりにくい物をわざと選んだのだが、それでも比較する球の大きさに差があったため、「ソフトボール」と正解を予想した生徒がほとんどであり、逆に「数学の問題集」の体積と比較する意義が薄く、興味を引きづらくなってしまったように感じた。
次回は、比べる直方体と球の選定を慎重にし、生徒が興味を持ち求めたくなるような物を探したいと思う。ただ、身近な球の体積を実際に求めたことで、教科書の問題をただ解くよりも、問題をイメージすることができ、よかったのではないかと感じた。