数学的モデリングを取り入れた指導法とその教材
－「渦巻」を題材にした教材の提案－

埼玉県 大宮武蔵野高等学校　太田　敏之

＜要旨＞
現実事象を分析して数理的に考察していく数学的モデリングを取り入れた学習は、生徒が数学に興味をもち学習意欲を高めるだけでなく、主体的に学ぶ力を育むことができると考える。
そこで本論では「渦巻」を題材にした数学的モデリングを取り入れた教材を提案する。

１．研究の背景

近年、高等学校の現場で生徒の数学離れを感じることが多い。理系を選択する生徒が減少傾向にあり、生徒の「数学が嫌い」という声を耳にする。また、1999 年の第 3 回国際数学・理科教育調査－第 2 段階調査－（TIMSS-R）においても、日本は諸外国に比べて学力は高いものの数学が嫌いな生徒が多いという結果がでている。このような現状の中で、生徒が数学に興味をもち学習意欲を高めるようにすることが今日の数学教育の大きな課題であると考える。

昨年度から新教育課程がスタートした。教育課程審議会の答申の算数・数学科の改善の基本方針には、「実生活における様々な事象との関連を考慮しつつ、ゆとりをもって自ら課題を見つけ、主体的に問題を解決する活動を通して、学ぶことの楽しさや充実感を味わいながら学習を進める」とある。

また、数学教育の目標の中に、形式陶冶、文化の継承と共に、「数学が実生活で役立つから」という実用的側面が考えられる。しかしながら、生徒の多くは「数学は実生活にはあまり役に立たない」と感じているように思う。小・中学校の教科書には文章題の形で実生活にかかわりのある問題を多少ながら見ることができるが、高等学校の教科書には実生活にかかわりのある問題は少なく、生徒が現実場面を想定して問題解決をしたり、実生活とのかかわりを感じたりすることが少ないのが現状である。

さらに、今日の社会は工業化社会から高度情報通信社会への急激な変容の過程にあるといわれている。今日の社会はあらゆるものが複雑化したシステムとなっていて、外から見えにくい世界になってきている。工業化社会においては、歯車やモーターなどで作られているものが多く、分解すればしくみを確認できる「見える社会」だった。しかし、高度情報通信社会においては、情報は大規模集積回路の中に埋め込まれたソフトウェアによって処理されていて、分解してもそのしくみを確認することができない「見えない社会」になってきている。このような社会では「見えない社会を見る」能力の育成が必要である。

以上のことから、本論では数学的モデリングを取り入れた指導法に注目した。数学的モデリングを取り入れた授業によって、今まで見えなかった現実事象のしくみが見えるようになり、高等学校数学が直接実生活で役に立たなくても、数学を使うことによって見えない社会を見ることができるということから、生徒が「数学が実生活と関連している」と感じ、数学に興味をもち学習意欲を高めることになると考える。また、自ら考え主体的に学ぶ力や思考力、判断力など、今日の社会を生きるために必要な力を育むことにもなると考える。

２．数学的モデリング
2.1 数学的モデリングの捉え方

中学校の授業においては、選択授業などを利用して、今日の教育にとって重要な教育目標となり得る「数学的モデリングの見方・考え方を培う」ことや「数学的モデルの理解力を培う」ことをねらいとする授業を行うことも考えられる。しかしながら、高等学校の授業においては、授業時数に余裕がないために、教科書の単元内容に関係のない現実事象を扱うだけの授業を行うことは難しいと考える。

そこで本論では、数学的モデリングを取り入れた授業を、「現実事象を扱うことで生徒が数学に興味をもち、学習意欲を高め、高等学校数学の各単元の中に実生活への有用性を感じ、その内容の理解を深める授業」とする。よって、「単元内容の理解」とともに、「現実場面を積極的に用いて数学に興味・関心をもつこと」、「数学の有用性を感得すること」、「数学と、社会や生活、他教科とが密接に関連していることを理解すること」を指導目標とした授業を開発する。そして、「数学的モデリングの見方・考え方」や「数学的モデルの理解」は、こうした授業を継続的にするにつれて身についていくと考える。

2.2 数学的モデリングの過程

高等学校数学の単元内容の理解を目的と考えたとき、生徒が興味をもつような現実事象を解析することを目標として授業を展開するのではなく、

生徒または授業者がその単元内容の理解を支援するような現実事象を選択する過程から始まると考える。そのことを含め、本論では、町田(2003a)、西谷(1998)の見解を基にした数学的モデリングの過程に、①の選択の過程を加え、その過程を以下のように広く捉えることとする。

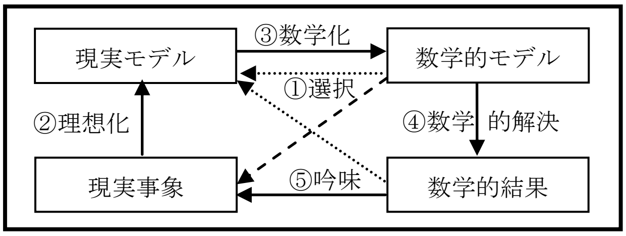
①選択；数学的内容を理解するために適した数学的モデルを考え､それが適用可能な現実事象(または現実モデル)を選択する。

②理想化；現実事象を分析し、数学的内容の理解に必要な変数の抽出を行い、条件を整理して抽象化を行って、現実モデルを作成する。

③数学化；現実モデルを数学的内容に翻訳して数学的モデルを作成するか、またはあらかじめ作成した数学的モデルに適用できるかを検討し、修正する。

④数学的解決；数学的モデルを、理解を目指した単元内容に沿って数学的に処理し、解を求めて数学的結果を得る。

⑤吟味;数学的に処理して得られた数学的結果を現実事象（または現実モデル）に適用し具体化することで、何がわかったのかを考え、数学的結果を検討し、修正する。



【 図 1 】

そして、以上のような過程を基にした教材を開発していくこととする。

３．数学的モデリングを取り入れた教材

本論では、数学的モデリングを取り入れた教材として、「渦巻」を題材にした教材を提案する。

3.1「等角らせんと黄金比」の教材

はじめに、新教育課程で高等学校に移ってきた数学Ａの平面幾何の有用性を感じる教材を提案する。極方程式を扱うと数学Ｃの教材にもなる。

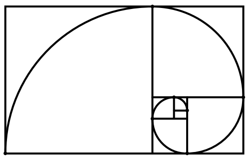
$x^2=x+1$の正の解 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ において、１：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

すなわち１:αのことを黄金比というが、一般に、図２のように、縦と横の辺の比が黄金比になっている長方形上に描いた黄金らせんがオウム貝の渦巻線に近似できるといわれている。

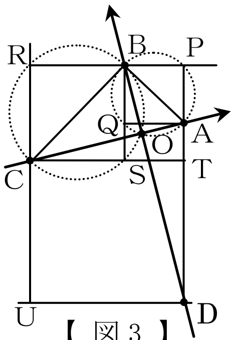
ここで、図３において、正方形 APBQ と正方形 BRCS の外接円の交点を O とすると、∠AQB＝∠BSC＝90°で円周角は等しいことから、∠AOB＝∠BOC＝90°となる。よって、⊿OAB∽⊿OBC で相似比が１：αであることがわかる。

以上のことからこの渦巻線は、AO を x 軸として引くと BO が y 軸となり、図４のように OA を 90°回転させてα倍したものが OB、OB を 90°回転させてα倍したものが OC になる等角らせんであることがわかる。

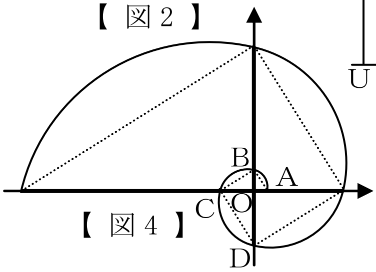
この曲線を極方程式で表すと、比をαとしたときの回転角が$\dfrac{\pi}{2}$なので、$r=k\alpha^{\frac{2}{\pi}\theta}$の形で表すことができる。



【 図２ 】



【 図３ 】



【 図４ 】

この数学的モデルを利用して（①選択)、次のような数学的モデリングの過程を利用した授業を提案する。事前に、『黄金比』についてと『等角らせん』について学習させておくこととする。

オウム貝の断面に見られる渦巻部分をなめらかな渦巻線と考えて現実モデルを作ると(②理想化)、図 2 の黄金らせんの数学的モデルに近似できる（③数学化）といわれているので、これを数学的に解決すると、比をαとしたときに回転角が 90°になる等角らせんになることが円周角の定理を利用してわかる（④数学的解決)。しかし実際にオウム貝を調べてみると、等角らせんに近似することはできるが、比をαとしたときの回転角は 150°～160°のものが多く､黄金らせんではないことがわかり、この数学的モデルは正しくないことがわかる（⑤吟味)。

3.2 「二等辺三角形と等角らせん」の教材

次に、「等角らせんと黄金比」の教材の演習・課題として利用できる教材を提案する。

等角らせんは、縦と横の辺の比が黄金比になっている長方形に限らずいろいろな図形を使って書くことができる。例えば、町田(2003b)は、M51 星雲の写真の光が強い部分を渦巻線と考えると（②理想化)、底角が 72°の二等辺三角形を組み合わせて書ける図５のような渦巻線に近似できる（③数学化）と述べている。この二等辺三角形は、正五角形の中に登場する三角形で、辺の比が黄金比になっている三角形である。

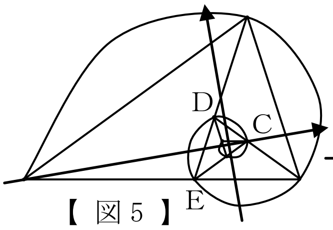
ここで、図６において、⊿ACD の外接円と⊿BDE の外接円の交点を O とすると、∠CAD＝∠DBE＝

108°で円周角は等しいことから、∠COD＝∠DOE＝108°となる。よって、⊿OCD∽⊿ODE で相似比が 1：αであることがわかる。

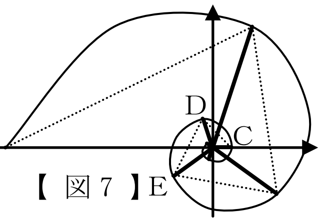
以上のことから、CO を x 軸として引くと、この渦巻線も、図 7 のように、比をαとしたときの回転角が 108°の等角らせんであることがわかる（④数学的解決）。

この曲線を極方程式で表すと、回転角が $\frac{3}{5}\pi$ なので、$r = k\alpha^{\frac{5}{3\pi}\theta}$ の形で表すことができる。

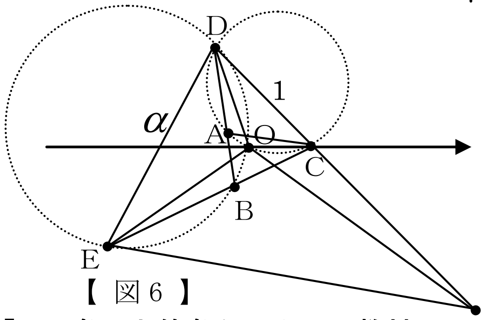
実際に調べると、M51 星雲の渦巻線は、回転方向は逆であるが、同じ形の $r = k\alpha^{-\frac{5}{3\pi}\theta}$ で表される等角らせんに近似できることがわかる(⑤吟味)。



【 図 5 】



【 図 7 】



【 図 6 】

3.3 「正三角形と等角らせん」の教材

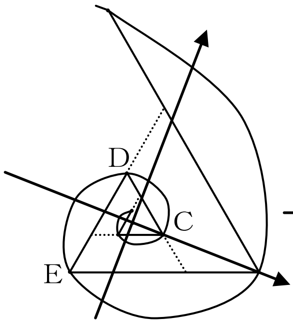
次に、「等角らせんと黄金比」と「二等辺三角形と等角らせん」の発展となる教材を提案する。

2003 年 8 月 7 日の台風 10 号の写真の雲を渦巻線と考えると（②理想化）、相似比が 1：αの正三角形を組み合わせて書ける図 8 のような渦巻線に近似できる（③数学化）。この図形は、黄金比の性質である $\alpha^2 = \alpha + 1$ を利用して描ける面白い図形である。ここで、図 9 において、CD を一辺とする正三角形を外側に書いてその頂点を R、同様に DE を一辺とする正三角形の頂点を S としたときに、⊿CDR の外接円と⊿DES の外接円の交点を O とすると、∠CRD＝∠DSE＝60°で円に内接する四角形の対角の和が 180°であることから、∠COD＝∠DOE＝120°となる。よって、⊿OCD∽⊿ODE で相似比が 1：αであることがわかる。

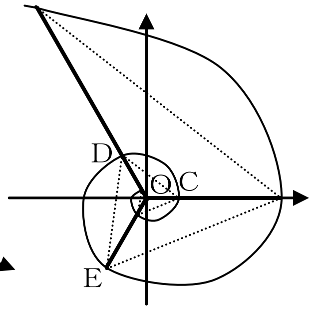
以上のことから、CO を x 軸として引くと、この渦巻線も、図 10 のように、比をαとしたときの回転角が 120°の等角らせんであることがわかる（④数学的解決）。

この曲線を極方程式で表すと、回転角が $\frac{2}{3}\pi$ なので、$r = k\alpha^{\frac{3}{2\pi}\theta}$ の形で表すことができる。

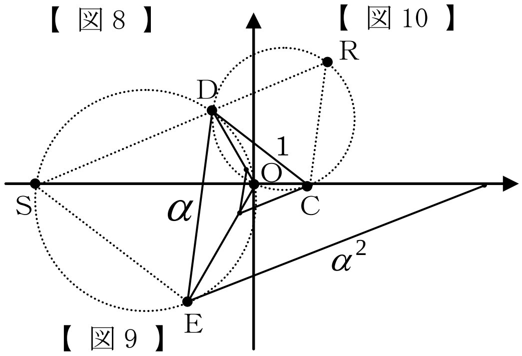
実際に、台風 10 号の雲の渦巻線は、回転方向は逆であるが、同じ形の $r = k\alpha^{-\frac{3}{2\pi}\theta}$ で表される等角らせんに近似できることがわかる（⑤吟味）。



【 図 8 】



【 図 10 】



【 図 9 】

4．今後の課題

本論では数学的モデリングを取り入れた教材を提案したが、今後はさらに多くの教材を開発するとともに、授業実践を行って開発した教材の効果的な利用法について考察し、教材をよりよいものにしていきたいと考える。

5．引用・参考文献

[1]町田彰一郎(2003a)，埼玉大学教育学部数学教育学特論Ａ講義資料.

[2]西谷泉(1998)，「数学的モデリング」，『新版 21 世紀への学校数学の展望』，誠文堂新光社，p.287.

[3]池田敏和(2002)，「中等数学科における数学的モデリング・応用の指導目標に関する一考察，日本における 1990 年代の文献調査を通じて」，『日本数学教育学会誌数学教育 56-3』，pp.2-12.

[4]町田彰一郎，中里孝(2003b)，「学習指導案「自然の不思議・数学の不思議」」，『第 85 回全国算数・数学教育研究(愛知)大会公開授業学習指導案集』，pp.103-108.

[5]太田敏之(2004)，「数学的モデリングを取り入れた指導法とその教材」，「平成 15 年度埼玉県高等学校数学研究会教育課程研究会全体発表会発表資料」.

[6]太田敏之(2004)，「生徒が数学に興味をもち学習意欲を高めるための指導法の研究」，「平成 15 年度埼玉県長期研修報告書」.

指導案例と証明例

1．単元　円周角の定理と円に内接する四角形の性質の利用

2．本時の学習活動

(1) ねらい

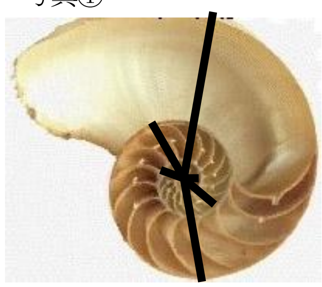
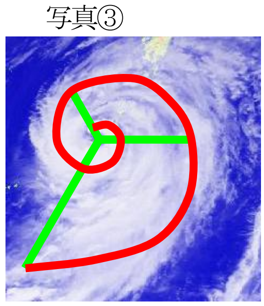
① 身近にある渦巻線と数学とのつながりに興味・関心をもち、平面図形の有用性を感得し、主体的に課題に取り組むことができるようにする。(関心・意欲・態度)

② 円周角の定理や円に内接する四角形の性質を用いて、等角らせんの中心を作図のしかたに気づくことができるようにする。(数学的な見方・考え方)

③ 円周角の定理や円に内接する四角形の性質を用いた作図や証明が書けるようにする。(表現・処理)

④ 円周角の定理や円に内接する四角形の性質の有用性と等角らせんのしくみについて理解できるようにする。(知識・理解)

(2) 学習過程例

学習活動	指導上の留意点
1．導入 宿題として、身の回りの渦巻を探させておき、生徒に答えさせる。	何日か前に、身の回りの渦巻を探してくる宿題を出しておく。
2．展開 1) 写真①のオウム貝の写真を見せ、オウム貝の断面に見られる渦巻部分をなめらかな渦巻線と考えると、図 2 に近似できるといわれていることを説明する。 2) 図 4 の等角らせんについて説明する。	理想化の部分はきちんと説明する。 黄金比については、事前の授業で取り上げて説明しておく。 等角らせんについての説明は簡単にする。
3．課題① ① 図 2 は、図 4 の等角らせんと同じである。図 2 に等角らせんの中心 0 を作図して、図 2 と図 4 が同じ渦巻線であることを示してみよう。 ② 写真①の実際のオウム貝の写真を調べ、図 4 の等角らせんと同じかどうかを調べてみよう。 1) このオウム貝は回転角が約 160°で、図 4 の黄金らせんではないことに気づかせる。 2) その他のオウム貝の回転角も 150°～160°のものが多いことを話す。	等角らせんの中心 0 をどうやって作図するかに焦点におき、相似の証明は余裕があれば考えさせる。 写真① 
4．課題② 1) 同様に、写真②の M51 星雲と写真③の台風 10 号の写真を配り、その渦巻線が、図 5 と図 8 のようなしくみで描かれる渦巻線と近似することを説明して、それぞれ等角らせんの中心を作図させ、図 7 と図 9 のような等角らせんになることを証明させる。 2) 等角らせんの中心 0 の作図のしかたをそれぞれ発表させる。 3) M51 星雲と台風 10 号の写真を調べ、それぞれ図 7 と図 9 の等角らせんであることを確かめる。	中心 0 をどうやって作図するかに焦点におき、終わった生徒には証明を書かせるようにする。 写真②  写真③ 

証明１

右図において、∠AOB＝∠BOC＝90°と OA:OB＝OB:OC＝$1:\alpha$ を証明する。

（証明）

四角形 APBQ、四角形 BRCS、四角形 CTDU はすべて正方形である。

正方形の対角の和は 180°より円に内接するため、

外接円をもつので、正方形 APBQ の外接円と

正方形 BRCS の外接円の交点を O とすると、

∠AQB＝∠BSC＝90°より、

円周角は等しいので、

∠AOB＝∠BOC＝90° …①

また、

∠ABC＝∠ABQ＋∠SBC =45°＋45°＝90°より

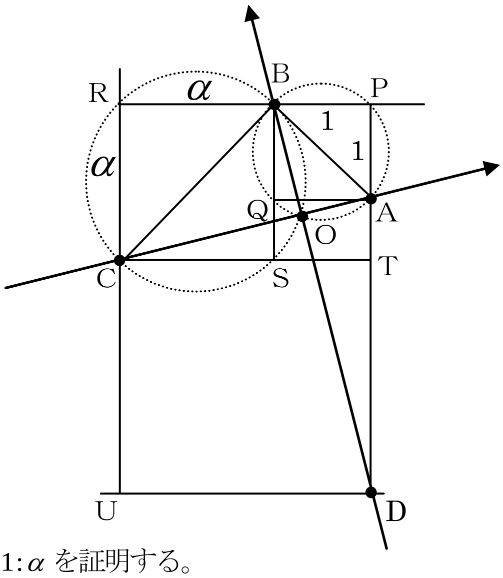
∠ABO＝90°－∠OBC から、

∠ABC＝∠OCB …②

⊿OAB と⊿OBC において、①, ②から二角相等より

⊿OAB∽⊿OBC

また、AB:BC=$1:\alpha$ より　OA:OB＝OB:OC＝$1:\alpha$



証明２

右図において、∠COD＝∠DOE＝108°と OC:OD＝OD:OE＝$1:\alpha$ を証明する。

（証明）

⊿ACD の外接円と⊿BDE の外接円の交点を O とすると、

∠CAB＝∠DBC＝72°より

∠CAD＝∠DBE＝180°－72°＝108°

円周角は等しいので、

∠COD＝∠DOE＝108° …①

また、

∠OCD＋∠ODC＝180°－∠COD

＝180°－108°＝72°

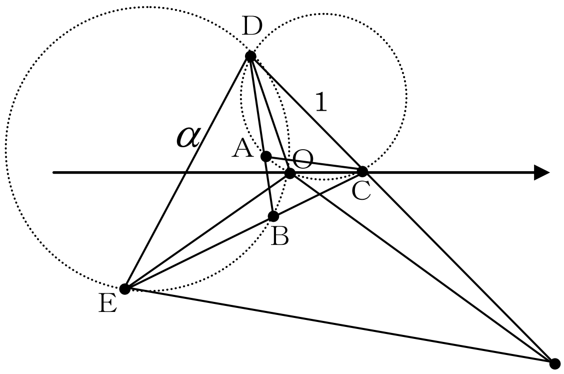
∠ODE＋∠ODC＝∠CDE＝72°より、

∠OCD＝∠ODE …②

⊿OCD と⊿ODE において、①, ②から二角相等より

⊿OCD∽⊿ODE

また、CD:DE＝$1:\alpha$ より　OC:OD＝OD:OE＝$1:\alpha$



証明３

右図において、∠COD＝∠DOE＝120°と OC:OD＝OD:OE＝$1:\alpha$ を証明する。

（証明）

CD を一辺とする正三角形を外側に書いてその頂点を R、

同様に DE を一辺とする正三角形の頂点を S としたときに、

⊿CDR の外接円と⊿DES の外接円の交点を O とすると、

∠CRD=∠DSE＝60°より

∠COD＝∠DOE＝180°－60°＝120° …①

（円に内接する四角形の対角の和は 180°より）

また、

∠OCD＋∠ODC＝180°－∠DOE

＝180°－120°＝60°

∠ODE＋∠ODC＝∠CDE

＝180°－∠CDR－∠EDS

＝180°－60°－60°＝60°より、

∠OCD＝∠ODE …②

⊿OCD と⊿ODE において、①, ②から二角相等より

⊿OCD∽⊿ODE

また、CD:DE＝$1:\alpha$ より　OC:OD＝OD:OE＝$1:\alpha$