第１回高数研教課研　　2003.　7

# 数列の話題

浦和西高等学校 太田 敏之

## １．はじめに

数列には、「ハノイの塔」などのさまざまなおもしろい話題がある。今回はその中から２つを取りげて、深く考察してみることにした。

## ２．碁石の移動パズル

### 2.1　パズルの原理

左から黒石をｎ個、右から白石をｎ個置き、黒石と白石の間に一つ石を置くスペースをあけて一列に並べ、石を一つずつ動かして黒石と白石をそくり入れ替えるパズルがある。石の動かし方は以下のどちらかである。

① 一つ右か左の開いているスペースに動かす。（スライド）

② 別の石を一つだけ飛び越えて、開いているスペースへ動かす。（ジャンプ）

このとき、ｎ個ずつある（以下、ずつは省略し、ｎ個のときと記す）黒石と白石をそっくり入れ替えるのに最低何手かかるだろうか。

１）まず１個の場合の動かし方と手数を考えてみる。

最初　●　－　○　　（●黒石、○白石、－スペース）
１手　－　●　○　　黒石を右に動かす。
２手　○　●　－　　白石を左に飛び越えさせる。
３手　○　－　●　　黒石を右に動かす。

よって１個のときの最低手数は３手である。

２）次に２個の場合を考えてみる。

最初　●　●　－　○　○
１手　●　－　●　○　○　黒右
２手　●　○　●　－　○　白飛左
３手　●　○　●　○　－　白左
４手　●　○　－　○　●　黒飛右
５手　－　○　●　○　●　黒飛右
６手　○　－　●　○　●　白左
７手　○　○　●　－　●　白飛左
８手　○　○　－　●　●　黒右

よって２個のときの最低手数は８手である。

### 2.2　授業の展開

１個と２個の場合を黒板で説明した後、３個の場合、４個の場合・・・と生徒に最低手数を考えさせる。「ハノイの塔」と同じような授業展開が考えられる。５個まで動かせた生徒に対しては、手数の数列や石の動かし方から関係を推測させて、一般項を推測させる。

### 2.3　手数からの推測

実際の最低手数は以下の通りになる。

| 個数 | １ | ２ | ３ | ４ | ５ |
|---|---|---|---|---|---|
| 手数 | ３ | ８ | １５ | ２４ | ３５ |

この数列の階差をとると、一般項を推測することができる。

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 3 & 8 & 15 & 24 & 35 \end{array}$$

$$+5 \quad +7 \quad +9 \quad +11$$

よって階差数列の一般項は $b_n = 2n+3$ なので、$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+3) = 3 + n(n-1) + 3(n-1)$$

$= n(n+2)$ と推測できる。

ただし、この方法だと推測までしかできない。

### 2.4　構造からの推測

次に動かし方の構造を分析してみる。

１）３個の場合を例に分析してみる。

最初　●　●　●　－　○　○　○
１手　●　●　－　●　○　○　○　黒１
２手　●　●　○　●　－　○　○　白２
３手　●　●　○　●　○　－　○　↓
４手　●　●　○　－　○　●　○　黒３
５手　●　－　○　●　○　●　○　↓
６手　－　●　○　●　○　●　○　↓
７手　○　●　－　●　○　●　○　白３
８手　○　●　○　●　－　●　○　↓
９手　○　●　○　●　○　●　－　↓
１０手　○　●　○　●　○　－　●　黒３
１１手　○　●　○　－　○　●　●　↓
１２手　○　－　○　●　○　●　●　↓
１３手　○　○　－　●　○　●　●　白２
１４手　○　○　○　●　－　●　●　↓
１５手　○　○　○　－　●　●　●　黒１

この動かし方から考察すると、

$$a_3 = (1+2+3) + 3 + (3+2+1) = 2\sum_{k=1}^{3} k + 3 = 15$$

という構造を推測することができる。

２）４個の場合で検証してみる。

全手数の図を書くのは大変なので、同じ色を連続して動かすのをまとめて構造がわかるように図示してみる。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ● | ● | ● | ● | － | ○ | ○ | ○ | ○ | |
| ● | ● | ● | － | ● | ○ | ○ | ○ | ○ | 黒１ |
| ● | ● | ● | ○ | ● | ○ | － | ○ | ○ | 白２ |
| ● | － | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ○ | 黒３ |
| ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | － | 白４ |
| － | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | 黒４ |
| ○ | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | － | ● | 白４ |
| ○ | ○ | － | ○ | ● | ○ | ● | ● | ● | 黒３ |
| ○ | ○ | ○ | ○ | ● | － | ● | ● | ● | 白２ |
| ○ | ○ | ○ | ○ | － | ● | ● | ● | ● | 黒１ |

$$a_3=(1+2+3+4)+4+(4+3+2+1)=2\sum_{k=1}^{4}k+4=24$$

の関係になっているので、これらより、

$$a_n=2\sum_{k=1}^{n}k+n=n(n+1)+n=n(n+2)$$ という推測

をすることができる。

2.5　漸化式の利用

ここまでの考察は時間をかければ生徒にもできる。しかしこれはあくまで石が５個までについての推測であり、石がｎ個になったときにこの関係が成り立つかについてはいえない。そこで生徒に漸化式を考えさせることによって、帰納法的に成り立つことを考えさせたい。

１）石が５個の場合

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ● | ● | ● | ● | ● | － | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | |
| ① | ● | ● | ● | ● | － | ● | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | 黒１ |
| ② | ● | ● | ● | ● | ○ | ● | ○ | － | ○ | ○ | ○ | 白２ |
| ③ | ● | ● | － | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ○ | ○ | 黒３ |
| ④ | ● | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | － | ○ | 白４ |
| ⑤ | － | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | 黒５ |
| ⑥ | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | － | 白５ |
| ⑦ | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | － | ● | 黒１ |
| ⑧ | ○ | － | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ● | 黒４ |
| ⑨ | ○ | ○ | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | － | ● | ● | 白４ |
| ⑩ | ○ | ○ | ○ | － | ○ | ● | ○ | ● | ● | ● | ● | 黒３ |
| ⑪ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ● | － | ● | ● | ● | ● | 白２ |
| ⑫ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | － | ● | ● | ● | ● | ● | 黒１ |

まず両端の２つの石を除いて石が４個の場合を考え、途中で両端の黒石と白石を入れ替えることとする。図を見ると、①～④と⑧～⑫は両端を除いた石４個の部分の移動と同じであり、④と⑦は両端が入れ替わっているだけの図であることから、図の四角で囲まれた手数が $a_4$ なので、

$a_5=a_4+5+5+1$ という関係が見える。

これをｎ個の場合にして考えてみると、まず内側の(ｎ－１)個を入れ替えるのに、$a_{n-1}$ 手かかり、両端の黒石と白石を入れ替えるのに、ｎ個の黒石とｎ個の白石をそれぞれ動かしたあと、スペースをずらすのに１手必要なので、合計(２ｎ＋１)手必要である。よってこれより漸化式は $a_n=a_{n-1}+(2n+1)$（$n$≧２）と表すことができる。これを解いてみると、

$a_{n+1}=a_n+(2n+3)$，$a_1=3$ より

$n$≧２のとき、

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)=3+n(n-1)+3(n-1)$$

$$=n(n+2)$$

$n=1$ のとき、$a_1=1(1+2)=3$ より満たす。

よって、$a_n=n(n+2)$ と解くことができる。

これは帰納的に成り立っているので、すべてのｎについていえることがわかる。

2.6　別の視点からの分析

今までは動かす石の色に着目して分析してみたが、次に動かし方に着目して分析してみることにする。石の動かし方にはスライドとジャンプがあるので、スライド手数とジャンプ手数の合計手数を考えればよい。

１）ジャンプ手数

例えば石が５個の場合、１個の黒石が５個の白石をジャンプしなくてはならないので、５個黒石があるので、5×5＝25 回のジャンプが行われる。（白石が黒石を飛び越える場合も含む）よって、石がｎ個の場合は、ジャンプ手数は $n^2$ 回である。

２）スライド手数

スライド手数は直接は数えられないので次のようにして考える。５個の場合、黒白合わせて石は全部で１０個あり、黒白にかかわらず１個の石は６コマ移動する必要があるので、合計 10×6＝60 コマの移動が必要である。よって石がｎ個の場合は、$2n\times(n+1)$ コマの移動が必要である。そのうちジャンプで移動するコマ数は、ジャンプ１回あたり２コマ移動できるので、$2n^2$ である。よってスライド１回あたりは１コマ移動なので、スライド手数は $2n(n+1)-2n^2=2n$ である。

よって合計手数は $n^2+2n=n(n+2)$ と計算できる。

## ３．フィボナッチ数列

以下のように、$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$（$a_1=a_2=1$）で表される数列をフィボナッチ数列といい、自然界に多くみられ､黄金比とも関係してくる数列である。

数列$\{a_n\}$ 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89...

これについてはいろいろな研究がなされているが、今回代数的に分析してみることで、おもしろい関係がみられたので紹介してみようと思う。

### 3.1 フィボナッチ数列の一般項

フィボナッチ数列の一般項を漸化式を解いて求めてみる。三項間の特性方程式$x^2=x+1$を解くと、$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$となる。$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$とおくと、

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

$b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$とおくと、

$b_{n+1}=\beta b_n$，$b_1=a_2-\alpha a_1=1-\alpha$ より

$$b_n=(1-\alpha)\beta^{n-1}\text{、}\therefore a_{n+1}-\alpha a_n=(1-\alpha)\beta^{n-1}\cdots①$$

$$\text{同様にすると、}a_{n+1}-\beta a_n=(1-\beta)\alpha^{n-1}\cdots②$$

①－②より、$(\beta-\alpha)a_n=(1-\alpha)\beta^{n-1}-(1-\beta)\alpha^{n-1}$

よって、$a_n=\dfrac{(1-\alpha)\beta^{n-1}-(1-\beta)\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha}$

ここで、$\beta-\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

$1-\alpha=\dfrac{2}{2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\beta$

同様に$1-\beta=\alpha$より、

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^n-\alpha^n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$$

### 3.2 フィボナッチ数列と黄金比

黄金比は、$1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$、すなわち$1:\beta$である。

フィボナッチ数列の隣接する項の比のｎ→∞の極限が黄金比になることが知られている。

黄金比　$1:\beta$≒1:1.61803

34:55≒1:1.16765

55:89≒1:1.61818

89:144≒1:1.61797

一般項を求めたことでそれを確認できる。

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\beta^n-\alpha^n)$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})$より、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta^n-\alpha^n}=\frac{\beta-\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n\alpha}{1-\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n}$$

ここで$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$より、$-1<\dfrac{\alpha}{\beta}<0$

よって$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=0$より、$\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\beta}$

### 3.3 黄金比のｎ乗(1)

黄金比をｎ乗していくとおもしろいことがわかるので紹介したいと思う。すべてはきびしいが、一部授業で紹介するとおもしろいだろう。

$$\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^3=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{4+2\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^4=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^5=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5=\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^6=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6=\frac{18+8\sqrt{5}}{2}$$

ここで、$\beta^n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n=\dfrac{x_n+y_n\sqrt{5}}{2}\cdots③$

とおいたとき、数列$\{x_n\}$1,3,4,7,11,18…と、数列$\{y_n\}$1,1,2,3,5,8…ができる。この数列について分析してみるとおもしろいことがわかる。

まず数列$\{y_n\}$はフィボナッチ数列であるように推測できる。実際に計算してみると、

$\alpha^n=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n=\dfrac{x_n-y_n\sqrt{5}}{2}\cdots④$となるので、

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^n-\alpha^n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{x_n+y_n\sqrt{5}}{2}-\frac{x_n-y_n\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2y_n\sqrt{5}}{2}\right)=y_n$$ より、$y_n=a_n$ となり、

数列 $\{y_n\}$ はフィボナッチ数列であることがわかる。

次に数列 $\{x_n\}$ $1,3,4,7,11,18\cdots$ は、第２項こそ違うが、やはり $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ の関係があることが推測される。実際に計算してみると、まず

③＋④より $x_n=\beta^n+\alpha^n$ という式が得られる。ここで、$z_{n+2}=z_{n+1}+z_n$ （$z_1=1, z_2=3$) という数列を仮定して一般項を求めてみると、

$$z_{n+1}-\alpha z_n=(3-\alpha)\beta^{n-1},\quad z_{n+1}-\beta z_n=(3-\beta)\alpha^{n-1}$$

より、$(\beta-\alpha)a_n=(3-\alpha)\beta^{n-1}-(3-\beta)\alpha^{n-1}$

よって、$a_n=\dfrac{(3-\alpha)\beta^{n-1}-(3-\beta)\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha}$　ここで、

$$3-\alpha=\frac{6}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\sqrt{5}\beta$$

$$3-\beta=\frac{6}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=-\sqrt{5}\alpha$$

$z_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{\sqrt{5}\beta^n-(-\sqrt{5}\alpha^n)\}=\beta^n+\alpha^n$ となり、

ゆえに数列 $\{x_n\}$ は $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ の関係を満たす。

### 3.4　黄金比のｎ乗(2)

黄金比のｎ乗を、別の視点から求めていくと、さらにおもしろい関係が見えてくる。

$\beta$ は、２次方程式 $x^2=x+1$ の解の１つであるから、$\beta^2=\beta+1$ の関係を満たすので、$\beta^n$ を次のようにして求めることもできる。

$$\beta \qquad =\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^2=1+1\beta \qquad =1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^3=\beta(1+\beta)=\beta+\beta^2=\beta+(1+\beta)=1+(1+1)\beta$$

$$=1+2\beta \qquad =1+2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{4+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^4=\beta(1+2\beta)=\beta+2\beta^2=\beta+2(1+\beta)=2+(1+2)\beta$$

$$=2+3\beta \qquad =1+3\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^5=\beta(2+3\beta)=2\beta+3\beta^2=2\beta+3(1+\beta)=3+(2+3)\beta$$

$$=3+5\beta$$

$$=3+5\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^6=\beta(3+5\beta)=3\beta+5\beta^2=3\beta+5(1+\beta)=5+(3+5)\beta$$

$$=5+8\beta$$

$$=5+8\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{18+8\sqrt{5}}{2}$$

よって、　$n\geqq 2$ のとき、

$$\beta^n=a_{n-1}+a_n\beta \qquad (a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\ a_1=a_2=1)$$

となることが推測される。これを数学的帰納法で証明してみると、

ｉ）$n=2$ のとき $\beta^2=a_1+a_2\beta=1+\beta$ より成り立つ。

ii）$n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$\beta^k=a_{k-1}+a_k\beta$$

$n=k+1$ のとき

$$\beta^{k+1}=\beta\cdot\beta^k=\beta(a_{k-1}+a_k\beta)=a_{k-1}\beta+a_k\beta^2$$

$$=a_{k-1}\beta+a_k(1+\beta)=a_k+(a_k+a_{k-1})\beta$$

$=a_k+a_{k+1}\beta$ より成り立つ

よって、$\beta^n=a_{n-1}+a_n\beta=a_{n-1}+a_n\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$$\beta^n=\frac{(2a_{n-1}+a_n)+a_n\sqrt{5}}{2}$$

$a_n+a_{n-1}=a_{n+1}$ より、$\boxed{\beta^n=\dfrac{(a_{n+1}+a_{n-1})+a_n\sqrt{5}}{2}}$

ここで、$\beta^n=\dfrac{x_n+y_n\sqrt{5}}{2}$ とおいたとき、

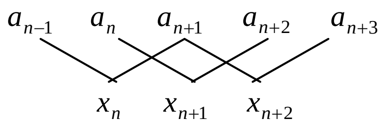
$x_n=a_{n+1}+a_{n-1}$, $y_n=a_n$ （$n\geqq 2$ のとき）

となるが、これを図で表してみると、

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{y_n\}$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | … |
| $\{x_n\}$ | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | … |

と、$y_n$ はフィボナッチ数列そのものであり、$x_n$ はフィボナッチ数列の隣の隣の項との和の数列となっていることがわかる。

そして、数列$\{x_n\}$は$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$の関係を満たしていることは、下図を参考に計算すると、




$$\begin{aligned} x_n+x_{n+1} &= (a_{n-1}+a_{n+1})+(a_n+a_{n+2}) \\ &= (a_{n-1}+a_n)+(a_{n+1}+a_{n+2}) \\ &= \quad a_{n+1} \quad + \quad a_{n+3} \quad = \quad x_{n+2} \end{aligned}$$

となり、示すことができる。

また、$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\beta^n-\alpha^n)$を利用すると、

$$a_{n+1}+a_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})+\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\beta^n-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\alpha^n\right\}$$

ここで、$\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$より、

$\beta+\dfrac{1}{\beta}=\sqrt{5}$、同様に計算すると$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=-\sqrt{5}$

よって$a_{n+1}+a_{n-1}=\beta^n+\alpha^n=x_n$と示してもよい。

### 3.5　フィボナッチ数列と渦巻線

　フィボナッチ数列と渦巻線の関係についてはよく知られているが、巻貝の渦巻等に見られるといわれている。よく紹介されている渦巻は図１であるが、今回の話題である黄金比のｎ乗を利用した図２のような渦巻も考えられる。

## 4　おわりに

　以上の話題を授業にどう生かしていくかを今後考えていきたいと思う。