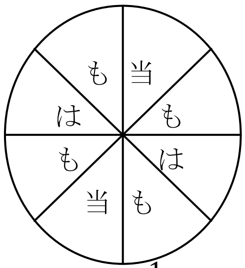
確率アラカルト

浦和西高等学校 太田 敏之

１．子どものゲームから

デパートの屋上に、ルーレットで当たりが出ると景品が出る子ども用のゲームがある。ルーレットが８分割になっていて、「当たり」が２個、「はずれ」が２個そして「もう一度回す」が４個あるゲームである。このとき当たる確率を求めてみた。



当・・当たり
は・・はずれ
も・・もう一回

当たる確率が$\frac{1}{4}$、はずれる確率が$\frac{1}{4}$、もう一回の確率が$\frac{1}{2}$なので、確率pは以下のようになる。

$$p=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{4}\cdots$$

$$=\frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdots\right\}$$

これは無限等比級数となる。よって、

$$p=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\frac{1}{2}$$

となる。無限等比級数の話題としておもしろい。

２．じゃんけんであいこになる確率

じゃんけんをするとき、人数が多いとあいこになる確率が多いのは体験からわかると思う。ここではn人でじゃんけんしたときあいこになる確率を求めてみる。まず順列組合せを使って求めると、全事象が3^n、そのうちあいこになるのは3^nから勝負が決まるつまり２種類以下が出る場合$2^n\times 3$を引くわけだが、これにはあいこになる全員が同じ場合が６種類含まれるので、結局確率pは

$$p=\frac{3^n-3\times 2^n+6}{3^n}=\frac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}\quad (n\geqq 2)$$となる。

これを、ちょっと視点を変えて漸化式を使って求めてみた。

$n\geqq 3$においてあいこになるためには、$n-1$人の出し方が全部同じ場合はn人目は同じものを出さなくてはならないので１通り、$n-1$人の出し方が３種類つまり全部同じでないあいこの場合はn人目はなんでもよいので３通り、$n-1$人の出し方が２種類つまりあいこでない場合はn人目は他の$n-1$人とは違うもう１種類のものを出さなくてはならないので１通り、と考えると、n人でじゃんけんをしてあいこになる確率p_nは、

$$p_n=\frac{3}{3^{n-1}}\times\frac{1}{3}+\left(p_{n-1}-\frac{3}{3^{n-1}}\right)\times 1+\left(1-p_{n-1}\right)\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}p_{n-1}-\frac{2}{3^n}+\frac{1}{3}$$となる。これを解くと、

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n-\frac{2}{3^n}+\frac{1}{3}\ ,\quad p_3=\frac{1}{3}$$

$$p_{n+1}-1=\frac{2}{3}\left(p_n-1\right)-\frac{2}{3^n}\ ,\quad p_n-1=b_n$$とおくと

$$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n-\frac{2}{3^n},\quad b_3=p_3-1=-\frac{2}{3}$$

$$3^{n+1}b_{n+1}=2\cdot 3^n b_n-6\ ,\quad 3^n b_n=c_n$$とおくと

$$c_{n+1}=2c_n-6\ ,\quad c_3=3^3 b_3=-18$$

$$c_{n+1}-6=2\left(c_n-6\right)\ ,\quad c_n-6=d_n$$とおくと

$$d_{n+1}=2d_n\ ,\quad d_3=c_3-6=-24$$

よって$d_n=d_3\cdot 2^{n-3}=-24\cdot 2^{n-3}=-3\cdot 2^n$

$$c_n=d_n+6=-3\cdot 2^n+6$$

$$b_n=\frac{-3\cdot 2^n+6}{3^n}=\frac{-2^n+2}{3^{n-1}}$$より

$$p_n=b_n+1=\frac{-2^n+2}{3^{n-1}}+1=\frac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}$$となり、

これは$n=2$のときも満たすので、同じ形となる。

なおこの結果から、たとえば１０人でじゃんけんしたときにあいこになる確率は、$\frac{18661}{19683}\fallingdotseq 0.95$より約95％の確率であいこになることがわかる。