微分積分学入門

このPDFファイルはこれまでの「微分積分学」の講義ノートを加筆・修正したものです．TeXの機能に慣れるためにいろいろ練習する場も兼ねて作成しています．図やグラフはまだ練習中のため，以前より増えてはいますが説明のためにはまだ十分ではありません．基本的に黒板での説明は図が多めなので，このノートを見れば講義に出なくてもよいわけではないことに注意してください．

（学生向けの前書き：使用前に必ず読むこと）

講義で使用していた頃から，このテキストの内容全てを扱ったわけではありません．発展事項を自習したい学生のための資料として作成し始めたので，難易度の高い内容も含まれています．また，自身の備忘録としてさらに数学科向けの内容を加筆したので，全部読むのは結構大変です．そのため，もし私の講義を受けた学生が利用する場合には，定理の証明などの難しそうなところは飛ばしながら，定義・定理の主張・注意・計算例・応用例を取捨選択しつつ読み進める方がよいと思います．索引はありませんが，**節を細かく分けているので学生が参考にしたい部分を探しやすくはしているつもり**です．数学科向けに言うと，実数の構成に関する部分以降，つまり上限定理を認めた後は初等関数の定義以外ほぼ厳密な議論をしています．

微積分が苦手な学生は，まず「計算例」と書かれた節の例題とその解答をしっかり読み込んでください．手を動かして計算を追いつつ，用語や記号の意味および式変形の説明を随時補ってみるのもよいと思います．もし解答が理解できなければ，その前の節に戻って理解していない定義や用語・定理や公式がないかを見直してください．解答に必要な定理や公式は覚えていても，問題文に現れる記号の定義を理解していなかったために『問題を見ても何をすればよいかわからなかった』から解けなかったということはよくあります．

例題の解答が理解できた（と思う）場合には，少し間を空けてから解答を隠して例題を解いてみてください． 数学では**『解答を読んで理解すること』と『何も見ずに自力で論理を組み立てて解答を作成できること』には大きなギャップがあります．** 解答を読んで納得しても，いざ解答を作成する立場になって初めて「なぜこう考えるのか？」という疑問を抱いたり，意味を勘違いしている概念や公式があったりと，自分が復習すべき箇所に気付くことも少なくありません．

苦手な学生は「自分で計算練習しておくように」と言われると，まず例題の解説を読んでからその下の練習問題に取り組み，答え合わせをしても略解しかないため結局よくわからない…仕方ないから試験前に解答を丸暗記するか…となりがちです．まずは完全な解答がある例題の理解に努め，何も見ずに誰かに解説できるくらいまで理解した内容を少しずつでも増やしていけば，いずれ全体を見渡せるようになるはずです．そうすれば，最初はわからなかった解答例でも，どのような論理に基づいて考えられたものかわかると思います．

本文中の練習問題の答えは特に用意していないので，各自で考えてください．特に難しい問題は発展問題としています．ただ，発展問題のいくつかはそこから後の本文中にヒントまたは答えそのものがあります．

ちなみに月に数回程度数ページずつこっそり更新されます．**この下の最終更新日と3ページ目の更新内容には注意してください．** 講義で用いていた時より定理の証明や発展的な内容をかなり充実させたので，「微分積分学入門」というのはタイトル詐欺になりつつあります．本ごとに記号や用語が微妙に違うことがあるので，発展事項でも講義内容から通して勉強しやすいようにとの配慮からでしたが … ただ，物理系や工学系で今後必要となる可能性が高い代表的・有名な例や応用例はそれなりに盛り込んであります．参考文献を挙げてあるので，より詳しく学習したい内容についてはそちらを参照してください．

（2020.4.22）

急遽オンライン講義に対応する必要が出てきました．図書館なども利用できないため，受講生が参考資料として自学自習できるように説明を追加する予定です．最初に書いた項目は2009年作成なので，前期の内容（数列の極限，1変数関数の微分法，多変数関数の微分法）については構成は変更しませんが，これまでの教育経験を生かして少し例題の追加や説明の仕方の変更などあるかもしれません．通常は黒板に図をたくさん描いて説明するのですが，その部分は動画で補っていきます．

北海道大学 大学院理学研究院 数学部門

黒田 紘敏

最終更新日：2025年5月17日

（記号）

集合や写像については，本文および北海道大学理学部数学教室の『大学数学のための準備』

https://www2.sci.hokudai.ac.jp/dept/math/wp/wp-content/uploads/2020/01/GUIDE.pdf

も参照してください．また

$$A \coloneqq B$$

で A を B で定義するということを表します．例えば

$$S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_k$$

で，記号 S_n を $\sum_{k=1}^{n} a_k$ で定めるという意味です．

まだ追加・修正したい内容

・第 9 章（ベクトル値関数の微分，陰関数定理）

・第 9 章（3 変数以上の関数の条件付き極値問題）

・第 10 章（重積分の理論部分）

最近の更新履歴（2008〜2021.3 までは省略）

助詞など日本語の軽微な誤字脱字などは特に修正を載せないと思います．

2021/4/19	ロピタルの定理の説明と解答例を省略しない正確なものに変更
2021/6/27	多変数関数の合成関数の微分法を一部丁寧な解答例に修正
2021/9/21	広義積分の収束・発散の判定法の説明をより丁寧なものに更新
2022/10/21	第 6 章 2 節の証明の表現をわかりやすいものに修正（本質的な変更は無し）
2022/10/23	第 6 章 6 節で広義積分の収束・発散の例題（比較判定法）を追加
2022/11/4	第 6 章 7 節で定義 6.27 の誤植（低位の無限大→低位の無限小）を修正
2022/11/29	第 10 章を全体的に見やすく修正（内容は変更なし）
	無いよりはわかりやすいかと思い手書きの図を追加
2023/7/14	第 1 章から順に体裁を修正
2023/10/15	tex のコマンドが古かったので，全体的に体裁を修正．内容を変えずに記号や文末などを統一
	第 10 章 6 節の記述を見直して，説明が十分ではないものを削除および修正
2023/11/29	第 6 章 6 節命題 6.26 の解説を追加
2024/2/23	第 9 章 6 節以降で，ヘッセ行列の記号を一般的なものに変更
2024/4/14	講義開始に合わせて第 5 章と第 8 章の内容は変えずにコマンドや体裁を修正
	ニュートン法を最後に移動．平均値の定理まわりに図を追加
	これまで高校数学に寄せていた箇所を変更（n 次導関数→ n 階導関数など）
2024/4/15	第 4 章と第 9 章の 7 節までを内容は変えずにコマンドや体裁を修正
2024/4/17	第 2 章と第 9 章を内容は変えずにコマンドや体裁を修正
2024/4/20	第 3 章の内容は変えずにコマンドや体裁を修正．第 3 章 6.4 節を修正
2024/4/21	第 1 章のコマンドや体裁を修正．関数の話題を第 2 章へ移動
2024/4/30	第 6 章のコマンドや体裁を修正
2024/5/1	第 10 章のコマンドや体裁を修正
2024/5/3	第 7 章のコマンドや体裁，一部表現を修正
2024/9/5	第 6 章の広義積分における置換積分を初学者向けの丁寧な説明に修正
2024/10/20	第 9 章の練習問題 6.3(3) を修正（$3y^2$ を $3y^3$ に）
2024/12/26	参考文献を追加，第 6 章命題 7.8 の証明を修正
2025/1/4	参考文献を追加，第 10 章例題 4.13 の誤植を修正

（以下は一個人の意見で，学生に無関係な前書きです．2024.9.28）

極限については**数列の極限・1 変数関数の極限・多変数関数の極限すべてについてイプシロン・デルタ論法を用いて定義し，種々の性質について厳密な証明を与えています**．その理由は，数学への理解を深めて実社会の課題へ応用を考える際に必要となるからです．

2000 年前後？からイプシロン・デルタ論法を扱わない微分積分学の参考書が増えてきていました．それらは定理の証明（広義積分が収束するための十分条件，収束半径に関するダランベールの判定法など）が中途半端な記述になっているものがほとんどです．無理に厳密さを抜いて平易な言葉で説明を試みた結果，逆に記述が難しくなっているものも見受けられます．確かに高校数学までは『極限値を計算して求めること』がゴールなため,『極限値とは限りなく近づく値』という理解でも十分です．しかし，**ある極限値をとるという性質を基点として理論展開を始める場合には，“どの程度近いのか”という定量的な評価が必要**となります．また，現在ではプログラムによる数値計算分野において，**誤差を定量的に評価し記述できる言葉を知っておくこと**の重要性が増しています．ただ“限りなく近い”と述べても，その基準は主観的で不正確な要素を含みうるため，それを避けるためにもイプシロン・デルタ論法を採用しました．イプシロン・デルタ論法のような『言葉』を知ることは学生にとって必ずプラスと考えます．大雑把に述べてしまえば『与えられた許容誤差を満足するためには最低何ステップ計算を繰り返せばよいか』を表すものであり，この論法を理解することは確かに簡単ではありませんが，決して不可能ではないというのが講義経験による私の考えです．過去の講義でも工学部で定期試験に出題した証明問題の正解率はかなりのものでした．

数学以外の分野でイプシロン・デルタ論法は不要なのでは主張している教員がたまに見られます．その根拠として「理解するのが難しいから」とか「定理の証明に使うだけだから」や「無くても困らない」といったものが挙げられますが，論点がずれていると思います．**イプシロン・デルタ論法を学ぶ目的は，ものごとを説明する方法の一つ（特に三角不等式などを利用した誤差の見積もりが議論できるようになることなど）を習得することだからです**．いくつかの定理の証明を行うことは理解を助けるための手段であって，証明それ自身を記憶することが目的なのではありません．また，この論法のような未知のものに触れることで極限を見つめ直す機会となり，極限をとることと代入の違いを理解できたという意見もあります．もっとも，数学教員においてもその必要性について『高校で曖昧だった定理が厳密に証明できる』ことのみを前面に出しすぎているケースもあるとは感じます．

上で述べたような極限およびその論法に対する理解の不十分さが，特に理論物理系の文献・学術論文で正しいとは言えない計算（特に極限の交換・無限和・広義積分やスペクトル理論など）が少なからず見られる原因だと私自身は感じています．以前私の講義を受けた学生から「数学は論理展開がはっきりしていてわかりやすいが，物理の講義がわからない」と相談を受けました．話を聞いてみると，どうやら物理の講義中の計算がわからず教員に質問したところ，その教員から満足いく回答を得られなかったらしく，何かと思い聞いてみれば近似計算や極限まわりの計算が数学的には危ないものでした．例えばテイラー展開は数学者は剰余項をつけますが，物理では $\fallingdotseq$ 記号すら使わずにすべて $=$ で式をつないでいくことが普通です．誤解を招かないように述べておくと，私はそのような近似計算が悪いとは思いません．すべて厳密な論理展開だけではなく，さまざまな計算を展開していくことが新しいものを生み出すのは事実です．

ここで問題にしたいのは，いざ学生に「これはイコールではないのでは？」などと質問された際に「君の疑問はもっともで，これは本当は近似計算であり必要な次数までを計算しているだけ」とか「そのような極限操作の交換ができることは仮定している」などと十分に説明できない応用系の教員です．上記の学生は担当教員から「極限と積分を入れ替えることに何か問題があるのですか？」と答えられており，およそ信じられない状況です．他には，無限次元でも線形作用素はすべて無限次の行列のようなものなのだから，いつも指数の肩に乗せられるし，作用素のスペクトルはすべて固有値になりますと講義で説明されたようです．おそらく学生の頃から実は近似計算であることやそれは種々の仮定の上で成り立つ計算という事実を習っていないために，形式的なものに過ぎない計算に疑問を抱かなかったのでしょう．学生が物理数学の科目のレポート課題の質問に来たときには，その問題の不備の多さに閉口したこともあります．その際はやはり本質的に間違いを含む解説を向こうでされてしまい，私の講義内できちんと時間を確保して正しい説明をしました．形式的な計算が絶対正しいのではなく,「ここは近似的な計算だから，この極限操作は危ないかもしれないから数学的に理論改良の余地があるのかもしれない」と認識するだけでも応用系の研究者と数学の研究者の意思疎通が図りやすくなるというのが，私の経験に基づいた意見です．

特に，近年では極限が関係する研究も重要度が増しています.『物理は近似を扱うので，数学的な厳密さは気にしなくてよい』という主張をよく見かけるようになってきましたが，そもそも論理的視点からその近似が妥当なのかが疑問視されているのではないかと思います．あるパラメータに関して極限を考える場合のみでなく，微分や

積分も極限で定義されている概念です．極限を考えることにより，無視できる誤差を取り除いて簡単に表現したり計算したりしているわけですが，2 つの極限操作の順序交換は無条件ではできません．これは結構微妙な問題を含んでおり，2 つの極限操作が一見形式的にはできそうだが交換できない例も自身の研究分野でありました．簡単な例としては

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{m}{m+n}\right),\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+n}\right)$$

を考えてみると，この 2 個の極限値は異なることがわかります．複数の極限があるときに，誤差を評価して近似を正当化し，極限操作の順序を変える（自由なパラメータの順番で誤差をカットしていく）ことは，意外と大変なこともあります．

以前は数学的に厳密でなくても，実験事実を説明できるということで理論や計算の妥当性を担保されていたと思います．ただ，最近は実験をせずに，数式や数値シミュレーションのみで説明された物理分野の結果も散見されます．そうなってくると，計算だけで論理性を担保するなら数学的には正しくあるべきですが，前述の極限操作の他にも，微分方程式の解の存在や一意性および初期値などパラメータ連続依存性などへの言及はまずなく，数値シミュレーションの計算法が適切であることを議論しているものも見かけません．そもそも計算プログラムの説明もなく，自身が欲しいグラフや図が現れるように，裏で微分方程式を直していたり計算プログラムに修正を加えているものもあるように思います．そうなってくると，数理モデルの妥当性や得られたシミュレーション結果も，当人の主観の域を出ないのではないでしょうか．近年は数学と他分野との共同研究も盛んになってきており，観察された現象に即した設定の下でモデルを立て，数学的に厳密な研究結果も少なくありません．もちろん実験が困難な内容も多いのでしょうが，過去に所属した研究プロジェクトでは，同一の内容に対して物理系の複数の論文で異なる公式が提示されており，さらにどれも数学的な正しさが担保されないという経験もあるため，どうしても懐疑的に見てしまいます．また，化学系や工学系の方から，物理が理論や数値シミュレーションに寄っていって実験をあまりしなくなった（から自分たちで実験している）と聞くことも何度かありました．

2010 年代後半から，一貫してイプシロン・デルタ論法で記述された微分積分の教科書が多く出版されるようになってきました．説明が分かりやすいものも多く，良い傾向だと思います．また，これまで共同研究で化学・生物系や工学系，医学系，および海外の物理系などの多くの方々と接点がありましたが，抽象的な議論に基づいた理論展開による精度保証をはじめとして数学の重要性を理解されていることが多かったです．特に関数空間を駆使して現象をモデリングし，そのモデルの解の存在や一意性および漸近挙動を検討したいという相談も増えてきました．数値シミュレーションやデータサイエンス，AI などの進展に伴って，数学を取り巻く環境が変化しつつあるのかもしれません．

目 次

関連図書

[1] 足立 俊明，数学レクチャーノート入門編 1 微分積分学 I，培風館，1997.

[2] 足立 俊明，数学レクチャーノート入門編 2 微分積分学 II，培風館，1998.

[3] 金子 晃，ライブラリ理工新数学 T1 数理系のための基礎と応用 微分積分 I ー理論を中心にー，サイエンス社，2000.

[4] 金子 晃，ライブラリ理工新数学 T2 数理系のための基礎と応用 微分積分 II ー理論を中心にー，サイエンス社，2001.

[5] 宮島 静雄，微分積分学 I ー 1 変数の微分積分ー，共立出版，2003.

[6] 宮島 静雄，微分積分学 II ー多変数の微分積分ー，共立出版，2003.

[7] 杉浦 光夫，基礎数学 2 解析入門 I，東京大学出版会，1980.

[8] 杉浦 光夫，基礎数学 3 解析入門 II，東京大学出版会，1985.

[9] 笠原 晧司，復刊 対話・微分積分学 数学解析へのいざない，現代科学社，2006.

[10] 野村 隆昭，微分積分学講義，共立出版，2013.

[11] 藤岡 敦，手を動かしてまなぶ 微分積分，裳華房，2019.

[12] 田村 篤史・猪股 俊光，はじめて学ぶ集合と位相 ーデータサイエンスへの応用を目指してー，共立出版，2024.

[13] 鈴木 晋一，ライブラリ新数学大系 E1 集合と位相への入門 ーユークリッド空間の位相ー，サイエンス社，2003.

[14] 鈴木 晋一，ライブラリ演習新数学大系 S1 理工基礎 演習 集合と位相，サイエンス社，2005.

[15] 金子 晃，ライブラリ数理・情報系の数学講義 1 数理基礎論講義 ー論理・集合・位相ー，サイエンス社，2010.

[16] 原 惟行・松永 秀章，イプシロン・デルタ論法 完全攻略，共立出版，2011.

[17] 宮島 静雄，大学数学スポットライト・シリーズ 第 11 巻 $\varepsilon-\delta$ 論法と数学の基礎　『原論』の時代から 20 世紀まで，近代科学社，2024.

[18] 杉浦 光夫 他，基礎数学 7 解析演習，東京大学出版会，1989.

[19] 福田 安蔵 他，詳解 微積分学演習 I，共立出版，1960.

[20] 福田 安蔵 他，詳解 微積分学演習 II，共立出版，1963.

[21] 壟江 誠夫，詳説演習 微分積分学，培風館，1979.

[22] 寺田 文行・坂田 ひろし，新版 演習数学ライブラリ 2 新版 演習微分積分，サイエンス社，2009.

[23] 金子 晃，ライブラリ数理・情報系の数学講義-別巻 2 基礎演習 微分積分，サイエンス社，2012.

[24] 千葉 逸人，工学部で学ぶ数学 新装版，プレアデス出版，2009.

[25] 新井 朝雄，現代ベクトル解析の原理と応用，共立出版，2006.

[26] 笠原 晧司，改訂増補 線型代数と固有値問題 ースペクトル分解を中心にー，現代科学社，2004.

[27] 壁谷 喜継・川上 竜樹，ベクトル解析入門 ー初歩からテンソルまでー，共立出版，2019.

[28] 神永 正博,「超」入門 微分積分 (ブルーバックス)，講談社，2012.

[29] 佐々木 淳，図解 かけ算とわり算で面白いほどわかる微分積分，ソーテック社，2020.

[30] 川添 充・岡本 真彦，思考ツールとしての数学 第 2 版，共立出版，2021.

[31] 古賀 真輝，数学の世界地図，KADOKAWA，2023.

[32] 溝口 宣夫 他，理工系の微分・積分，学術図書出版社，1998.

[33] 微分・積分の要点と演習，室蘭工業大学数理科学講座，2009.

[34] 数見 哲也 他，理工系新課程 微分積分 改訂版，培風館，2011.

[35] 三宅 敏恒，入門微分積分，培風館，1992.

自分が所有している参考図書を紹介します.

[1]〜[10]

総合的な微分積分学の教科書で，いずれもイプシロン・デルタ論法に基づいた記述がされています.

[1, 2] は薄い本ながら図も多く説明も丁寧で読みやすくまとまっています．n 変数の極値問題や逆関数定理のみでなく，関数項級数や項別微分・項別積分まで扱っているので，講義内容を発展させた内容を把握するのに適した本だと思います.

[3, 4] は分かりやすい言葉で新しい概念の導入の説明がされており，講義中の冗談のようなものも交えながら印象に残る説明をしているのが特徴です．n 変数の極値問題や一様収束性，線積分と面積分に節を割いており，また Mathematica を用いた計算演習までまで扱っているので，こちらも講義内容を発展させた内容を把握するのに勧めます．この手の本にしては演習問題の解答が詳しく述べてあり，また著者の HP で誤植訂正が定期的に更新されているので自習にはかなり適していると言えます.

[5, 6] は多変数関数の全微分をフレシェ微分として捉え，n 変数関数の極値問題や複数個の拘束条件下でのラグランジュの未定乗数法を解説しています．また，実数の構成法を述べたり，多重積分の変数変換の証明に約 20 ページを割いて厳密な証明を与えているのも特徴です．ただ，単純な計算例は少ないので，ある程度理論を理解した学生向きです.

[7, 8] はかなり分厚い本で，これに書いてあることが理解できればもう微分積分で困ることはないというくらい多くの話題を扱っています．そのため数学科以外の学生は最初からきっちり読むと息切れするかもしれないので，必要な部分を辞典のように使うのも良いかもしれません.

[9] はそのタイトルの通り対話形式の本で，学生が疑問に思うようなことを丁寧に解説しています．口語体の文章で本質をうまく説明しているので,「講義では誤魔化されたところが気になる」とか「なぜそのような概念を定義し，それについて考察するのか知りたい」といった，数学に興味がある学生にはお勧めです.

[10] は新しめの本で手に入れやすく，集合の記法やイプシロン・デルタ論法から説明し 1 冊にまとめてある本で価格的にもお手頃です．特に 3 変数関数で 2 個の条件がある場合の条件付き極値問題など陰関数定理の周辺の記述が特に丁寧です．計算例も結構載っているので，問題集とセットなら 1 冊でかなりの範囲がカバーできると思います．ただ，重積分の応用としての体積や曲面積の単元などは手薄です.

[11]

豊富な計算例と解答をもとに自習できる教科書かつ演習書です．理論を理解するためにも，基本的な計算を実際に実行できることは必要です．一通り内容を理解して計算できるようになるための入門書として適切なので，省略された証明を理解するために並行して他に挙げた本を用いるのもよいかと思います.

[12]〜[17]

講義ではあまり時間を割けないが，基礎を理解するために必要な内容を補うのに適切な本です．

[12] は新しめの本で，集合と写像や位相の基礎を扱っています．あまり複雑な箇所は避けて基礎部分を理解するのに向いています．実数の連続性に深入りせずに微分積分学の応用を深く理解するには，これで内容を押さえられるかと思います．書名から想像されるよりもデータサイエンスに関する応用は少なめですが，位相に関する概要を把握するならこれで十分かもしれません．

[13, 14] は実数の構成から $\mathbb{R}^n$ の開集合・閉集合までを詳しく解説し，さらに発展的な内容として距離空間・位相空間まで説明してある参考書と演習書です．いずれの練習問題にも解説がついているので，自学自習するのに適切だと思います．集合論の基礎を厳密に扱い，通常の講義では証明まで扱わない定理（連続関数に関する中間値の定理や最大値・最小値の定理など）にも正確な証明を与えているので，手元にあると理解が深まると思います．

[15] も集合論や位相空間について解説してある本です．これらに加えて論理学についても解説されており，一冊で盛りだくさんの内容を扱っています．とりあえず数学科以外の学生ならばこの一冊があれば大丈夫かもしれません．

[16] はイプシロン・デルタ論法に内容を絞って解説してある本です．多くの具体的な例題について完全な証明や学生が陥りやすい誤答例を挙げながら解説してあります．イプシロン・デルタ論法は講義を聞いたり本を眺めたりするだけでは身に付きません．この本を横に実際に手を動かして読み進めれば，その理解の助けになると思います．

[17] はイプシロン・デルタ論法の歴史から考え方までをまとめてある本です．学部 1 年生にはやや重いですが，数学科の学生が読んでみるのもよいかと思います．

[18]〜[23]

総合的な微分積分学の演習書で，多くの計算問題・証明問題を扱っています．

[22] は最近改訂された 2 色刷りの演習書で見やすいため，解説の内容が丁寧なので何か一冊通して演習したいなら向いているかもしれません．ただし，2 変数関数の極限の部分の内容に重大な誤りを含むので注意してください．

[23] も最近改訂された 2 色刷りの演習書で見やすいです．ちょっと重積分の単元が薄いのが難点ですが，こちらも何か一冊通して演習したい学生に向いています．

[24]〜[27]

微分積分学に限らず，数学全体あるいは各テーマに沿った，読みやすく有用だと私自身が思う参考書です．

[24] は微分積分や線形代数に限らず，微分方程式やフーリエ・ラプラス変換など工学部で必要となる数学をまとめたもので，2 年以降に学ぶ内容もほぼ網羅されています．自学自習できるよう丁寧に書かれているので，大学院への進学を考えている人はいずれ読んでみることを勧めます．ただし，1 年で習う微分積分は巻末にまとまってはいますが，すでに理解しているという前提で書かれているので注意してください．

[25] は線形数学の知識と微分積分学の知識をうまく融合してベクトル解析の分野を解説してある本です．この著者による本はすべて説明が丁寧なのが特徴です．

[26] はタイトルの通り固有値問題とその応用についてかなり詳しく扱っています．この本が読めれば工学部などの応用系において線形代数で困ることはもうありません．極値問題と実対称行列の関係など応用面の話題を多く扱っています．

[27] はタイトルの通りベクトル解析とその応用について扱っています．線積分や面積分に加えて，微分形式やテンソルについても述べられています．やや抽象的な議論への慣れも必要ですが，理論的な内容をまとめてあります．

[28]〜[31]

工学部や文系，あるいはもっと一般向けに数学の概念や数学がどのように応用されるかを概説してある参考書です．もちろん厳密性を犠牲にしている部分はありますが，微分積分に限らず数学全般の考え方とその応用について概観できるので，導入としていずれの本も適していると思います．もし数学に苦手意識をもっていたり，計算はできるけど式の意味は正直よく分かっていないと感じているなどの場合には特にお勧めです．

[32]〜**[35]**

これまでの講義で使用した教科書および演習書です.

第1章　高校で学習した重要事項の復習

1　絶対値

定義 1.1. （絶対値）

実数 x の絶対値 $|x|$ を

$$|x| := \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

と定義する．

絶対値の定義から，任意の実数 x と y に対して

$$|x| \geqq 0, \qquad |-x| = |x|, \qquad |x|^2 = x^2, \qquad |x||y| = |xy|, \qquad -|x| \leqq x \leqq |x|$$

などが成り立つことが確かめられる．また，特に重要な性質は次の不等式である．

命題 1.2. （三角不等式）

任意の実数 a と b に対して，不等式

$$|\,a+b\,| \leqq |a| + |b|$$

が成り立つ．等号成立は $ab \geqq 0$ のときである．

証明.　両辺とも 0 以上であるから，2 乗して考えると

$$\begin{aligned}
(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 &= (|a|+|b|)^2 - |\,a+b\,|^2 \\
&= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\
&= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\
&= 2\bigl(|ab| - ab\bigr) \geqq 0
\end{aligned}$$

となる．よって，求める不等式が成り立つ．　□

練習問題 1.1.　次の方程式・不等式を解け．

(1) $|\,x+2\,| = 4$　　(2) $|\,2x-5\,| > 3$　　(3) $|\,3x+5\,| \leqq 4$

(4) $|\,2x+1\,| = 3x$　　(5) $|\,2x-4\,| \leqq x$　　(6) $|\,x+1\,| + |\,2x-3\,| < 6$

練習問題 1.2. （三角不等式）

任意の実数 a と b に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\bigl|\,|a| - |b|\,\bigr| \leqq |\,a+b\,| \tag{1.1}$$

2　和の公式と二項定理

ここでは高校数学で学習した和の公式と二項定理について述べておく．証明は繰り返さないので，高校の教科書を参照すること．

命題 2.1.　任意の自然数 n に対して，次の等式が成り立つ．ただし，$r \fallingdotseq 1$ とする

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n, \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{r^n - 1}{r-1}$$

命題 2.2.（二項定理）
実数 a と b および自然数 n に対して，次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k} b^k \\ &= {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} a b^{n-1} + {}_nC_n b^n\end{aligned}$$

ここで，${}_nC_k \coloneqq \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ を**二項係数**という．ただし

$$0! = 1, \qquad n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 \quad (n \geqq 1)$$

である．

注意 2.3.　階乗の記号において，$0! = 0$ と勘違いしやすいので注意すること．

二項係数に関しては次の公式が有名である．

命題 2.4.　二項係数 ${}_nC_k$ について，次が成り立つ．ただし，$n \geqq 2,\ k \geqq 1$ とする．

(1) $k {}_nC_k = n {}_{n-1}C_{k-1}$　　(2) ${}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1} = {}_nC_k$

証明.

(1)　二項係数の意味からもわかるが，直接計算すれば

$$k {}_n\mathrm{C}_k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!} = n {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

となる．

(2)　パスカルの三角形からもわかるが，直接計算すれば

$$\begin{aligned}{}_{n-1}\mathrm{C}_k + {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k)\cdot(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = {}_n\mathrm{C}_k\end{aligned}$$

となる．

□

高校では学習していないが，知っていると便利な記号なのでここで紹介する．

定義 2.5. （二重階乗）

0 以上の整数 n に対して，記号 $n!!$ を

$$0!! = 1!! = 1, \qquad (n+2)!! = n!!(n+2) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

で定義する．n が偶数のときと奇数のときに場合分けすれば

$$(2n)!! = (2n)\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdot\cdots\cdot 6\cdot 4\cdot 2$$

$$(2n+1)!! = (2n+1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1$$

となる．

二重階乗は一見難しそうな記号であるが，簡単にいえば 1 個とばしの階乗なので，奇数だけまたは偶数だけの掛け算となる．便宜上 $0!! = 1!! = 1$ と記号を約束するので間違えないこと．$(-1)!! = 1$ と約束することもある．

練習問題 2.1. 次の和を求めよ．ただし，n は 2 以上の自然数とする．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k$ (2) $\displaystyle\sum_{k=4}^{7} k^2$ (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+3)$ (4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4\cdot 5^k$ (5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$ (6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2$

練習問題 2.2. 次の値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(1) ${}_4C_2$ (2) ${}_6C_3$ (3) ${}_3C_0$ (4) ${}_nC_n$ (5) ${}_nC_1$

練習問題 2.3. 次の式を展開せよ．

(1) $(x-3)^5$ (2) $(2x+5)^4$ (3) $(3x-2)^4$

練習問題 2.4. 次の式を展開したときの指定された項の係数を求めよ．

(1) $(x+2)^9$ の x^6 の係数 (2) $(3x-4)^5$ の x^2 の係数

練習問題 2.5. 次の等式が成り立つことを示せ．ただし，n は自然数とする．

(1) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ (2) ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$

発展問題 2.6. 次の和を求めよ．ただし，n は 2 以上の自然数とする．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^k$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{4^{k-1}}$ (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k$

発展問題 2.7. n を自然数とするとき，次の手順に従って和の公式を作れ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{k^5 - (k-1)^5\} = n^5$ となることを示せ．

(2) 自然数 k に対して，$k^5 - (k-1)^5$ を計算せよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を n の式で表せ．

3　部分分数分解

部分分数分解は級数の和や積分の計算で必須の事項となる．とにかくパターンが決まっているので，以下の例を確認しておくこと．もし分数式の分子の次数が分母の次数より大きい場合には，まず多項式の除法を用いて分子の次数が小さくなるようにしておく．

分母が 1 次式の積のときには，単に分子を定数としたもので分解できる．

例題 3.1.　次の関数を部分分数分解せよ．

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(2x+1)}$　　(2) $\dfrac{2x^2+x-4}{x(x+1)(x+2)}$

（解答）

(1)　$\dfrac{1}{(x+1)(2x+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{2x+1}$ とおくと，分母をはらえば

$$\begin{aligned} 1 &= a(2x+1) + b(x+1) \\ &= (2a+b)x + a + b \end{aligned}$$

となる．これが x についての恒等式になればよいので，係数を比較して

$$\begin{cases} 2a+b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \qquad \therefore\ a=-1,\ b=2$$

である．よって

$$\frac{1}{(x+1)(2x+1)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x+1}$$

が成り立つ．

(2)　$\dfrac{2x^2+x-4}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$ とおくと，分母をはらえば

$$\begin{aligned} 2x^2+x-4 &= a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1) \\ &= (a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a \end{aligned}$$

となる．これが x についての恒等式になればよいので，係数を比較して

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 3a+2b+c=1 \\ 2a=-4 \end{cases} \qquad \therefore\ a=-2,\ b=3,\ c=1$$

である．よって

$$\frac{2x^2+x-4}{x(x+1)(x+2)} = -\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$

が成り立つ．

（解答終）

ここでは『係数比較法』と呼ばれる方法で解答したが，必要な個数だけ具体的な x の値を代入してすべての係数を決定する『数値代入法』と呼ばれる方法で解答してもよい．その場合は特定の x で成り立つだけなので必要条件に過ぎないように感じるが，複素数係数の多項式どうしの比較の場合には少し進んだ内容を学習すれば，逆の確認は不要である（つまり恒等的に成り立つ）ことがわかる．

練習問題 3.1.　次の式を部分分数分解せよ．

(1) $\dfrac{2x+1}{(x+1)(x-2)}$　　(2) $\dfrac{1}{4x^2-1}$　　(3) $\dfrac{x^2+x-1}{x(x+1)(x+2)}$

分母に実数係数では因数分解できない2次式がある場合には，その項の分子は1次式にする．

例題 3.2.　次の関数を部分分数分解せよ．

(1) $\dfrac{x^2+6x+4}{(x+2)(x^2+2x+2)}$　　(2) $\dfrac{5x^3-12x^2+6x+17}{(2x^2-4x+3)(x^2+4x+7)}$

（解答）

(1) $\dfrac{x^2+6x+4}{(x+2)(x^2+2x+2)} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{bx+c}{x^2+2x+2}$ とおくと，分母をはらえば

$$\begin{aligned} x^2+6x+4 &= a(x^2+2x+2)+(bx+c)(x+2) \\ &= (a+b)x^2+(2a+2b+c)x+2a+2c \end{aligned}$$

となる．これが x についての恒等式になればよいので，係数を比較して

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+2b+c=6 \\ 2a+2c=4 \end{cases} \qquad \therefore\ a=-2,\ b=3,\ c=4$$

である．よって

$$\frac{x^2+6x+4}{(x+2)(x^2+2x+2)} = -\frac{2}{x+2} + \frac{3x+4}{x^2+2x+2}$$

が成り立つ．

(2) $\dfrac{5x^3-12x^2+6x+17}{(2x^2-4x+3)(x^2+4x+7)} = \dfrac{ax+b}{2x^2-4x+3} + \dfrac{cx+d}{x^2+4x+7}$ とおくと，分母をはらえば

$$\begin{aligned} 5x^3-12x^2+6x+17 &= (ax+b)(x^2+4x+7)+(cx+d)(2x^2-4x+3) \\ &= (a+2c)x^3+(4a+b-4c+2d)x+(7a+4b+3c-4d)x+7b+3d \end{aligned}$$

となる．これが x についての恒等式になればよいので，係数を比較して

$$\begin{cases} a+2c=5 \\ 4a+b-4c+2d=-12 \\ 7a+4b+3c-4d=6 \\ 7b+3d=17 \end{cases} \qquad \therefore\ a=-1,\ b=2,\ c=3,\ d=1$$

である．よって

$$\frac{5x^3-12x^2+6x+17}{(2x^2-4x+3)(x^2+4x+7)} = \frac{-x+2}{2x^2-4x+3} + \frac{3x+1}{x^2+4x+7}$$

が成り立つ．

（解答終）

複雑な連立1次方程式を解く際には，行列を用いるのも1つの方法である．詳細は線形代数学の講義を参照のこと．

練習問題 3.2.　次の式を部分分数分解せよ．

(1) $\dfrac{x^2+5x+4}{(x+2)(x^2+2x+2)}$　　(2) $\dfrac{(x-1)^2}{(x^2+1)(x^2+2)}$　　(3) $\dfrac{1}{x(x+2)(x^2+1)}$

1 次式の 2 乗や実数係数で因数分解できない 2 次式の 2 乗などがあるときには，以下のように分子は同じで 1 乗からの和を作る．分母に釣られて分子の次数を増やしたくなるが，分子の次数は前までのルールと同じで定数か 1 次式である．3 乗の場合も同様である．

例題 3.3. 次の関数を部分分数分解せよ．

(1) $\dfrac{1}{x(x+1)^2}$ (2) $\dfrac{x^3+4x^2+2x+16}{(x^2+4)^2}$

（解答）

(1) $\dfrac{1}{x(x+1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}$ とおくと，分母をはらえば

$$\begin{aligned}1&=a(x+1)^2+bx(x+1)+cx\\&=(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a\end{aligned}$$

となる．これが x についての恒等式になればよいので，係数を比較して

$$\begin{cases}a+b=0\\2a+b+c=0\\a=1\end{cases}\qquad\therefore\ a=1,\ b=-1,\ c=-1$$

である．よって

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

が成り立つ．

(2) $\dfrac{x^3+4x^2+2x+16}{(x^2+4)^2}=\dfrac{ax+b}{x^2+4}+\dfrac{cx+d}{(x^2+4)^2}$ とおくと，分母をはらえば

$$\begin{aligned}x^3+4x^2+2x+16&=(ax+b)(x^2+4)+cx+d\\&=ax^3+bx^2+(4a+c)x+4b+d\end{aligned}$$

となる．これが x についての恒等式になればよいので，係数を比較して

$$\begin{cases}a=1\\b=4\\4a+c=2\\4b+d=16\end{cases}\qquad\therefore\ a=1,\ b=4,\ c=-2,\ d=0$$

である．よって

$$\frac{x^3+4x^2+2x+16}{(x^2+4)^2}=\frac{x+4}{x^2+4}-\frac{2x}{(x^2+4)^2}$$

が成り立つ．

（解答終）

練習問題 3.3. 次の式を部分分数分解せよ．

(1) $\dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$ (2) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$ (3) $\dfrac{1}{(x+1)(x^4-1)}$

4　ガウス記号

定義 4.1. （ガウス記号）
　実数 x に対して，x をこえない最大の整数を $[x]$ で表す．この $[\cdot]$ をガウス記号という．

　ガウス記号 $[x]$ は文章だとややわかりにくいので，以下の例で確かめること．特に x が整数や負の数のときに注意すること．

例 4.2.

$$[3] = 3, \quad [-2] = -2, \quad [1.4] = 1, \quad [\pi] = 3, \quad [-3.5] = -4, \quad [1-\sqrt{3}] = -1$$

　ガウス記号の定義から，次が得られる

命題 4.3. 　任意の実数 x に対して

$$x - 1 < [x] \leqq x$$

が成り立つ．これは

$$[x] \leqq x < [x] + 1$$

とも表せる．

練習問題 4.1. 　次の値を求めよ．

(1) $[0]$　　(2) $\left[\dfrac{7}{3}\right]$　　(3) $\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}\right]$

(4) $[-2.3]$　　(5) $\left[-\dfrac{4}{3}-\sqrt{2}\right]$　　(6) $[2+\sqrt{3}]+[2-\sqrt{3}]$

練習問題 4.2. 　関数 $y = [x] \quad (-3 \leqq x \leqq 3)$ のグラフを描け．

練習問題 4.3. 　次の方程式・不等式を解け．

(1) $[x] = 1$　　(2) $-1 < [x] \leqq 2$

発展問題 4.4. 　次の不等式を解け．

$$[x]^2 - [x] - \frac{5}{4} < 0$$

5　有名な不等式

命題 5.1. （相加相乗平均）
　0 以上の任意の実数 a と b に対して
$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$
が成り立つ．等号が成立するのは $a=b$ のときである．

証明.　両辺とも 0 以上であるから，2 乗して考えると
$$\begin{aligned}(\text{左辺})^2-(\text{右辺})^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2 \\ &= \frac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4} \geqq 0\end{aligned}$$
となる．よって，求める不等式が成り立つ．等号が成立するのは $a-b=0$，つまり $a=b$ のときである．　□

　相加相乗平均の不等式において，$a=x^2$, $b=y^2$ とおけば，すべての実数 x と y に対して
$$\frac{x^2+y^2}{2} \geqq |xy|$$
とも表せる．この形もよく用いられる．

命題 5.2. （シュワルツの不等式）
　任意の実数 a, b, x, y に対して
$$|\,ax+by\,| \leqq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$$
が成り立つ．等号が成立するのは $ay=bx$ のときである．

証明.　両辺とも 0 以上であるから，2 乗して考えると
$$\begin{aligned}(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2 &= \{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}\}^2-|\,ax+by\,|^2 \\ &= (a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2 \\ &= (a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2)-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2) \\ &= a^2y^2-2abxy+b^2x^2 \\ &= (ay-bx)^2 \geqq 0\end{aligned}$$
となる．よって，求める不等式が成り立つ．等号が成立するのは $ay-bx=0$ のときである．　□

　高校数学で習ったベクトルの内容を既知とすると，シュワルツの不等式は次のようにも証明できる．こちらの方が不等式の意味をイメージしやすいかもしれない．

証明.　$\overrightarrow{u}=(a,b)$, $\overrightarrow{v}=(x,y)$ とおくと，これらのなす角を θ とおけば
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta$$
であるから，$|\cos\theta| \leqq 1$ より
$$|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}||\cos\theta| \leqq |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|$$
となる．これに成分計算の結果を代入すると
$$|\,ax+by\,| \leqq \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{x^2+y^2}$$
が得られる．等号が成り立つのは $|\cos\theta|=1$ のときなので，$\theta=0, \pi$ となる．これは 2 つのベクトル $\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ が平行であることを意味しているので，その条件は $ay-bx=0$ となる．　□

6　集合の記法

ここでは集合に関する各種概念と記号について紹介する．これらは数学における基本的な言語なので，必ず正しく使えるようにすること．なお，高校数学では記号の説明が主で深く突っ込んだ議論をしていないので，自信がある者も復習で一読することを勧める．

定義 6.1. （集合）
それに含まれる「もの」がはっきりしているような,「もの」の集まりを**集合**という．集合に含まれている 1 つ 1 つの「もの」を，その集合の**要素**または**元**という．a が集合 A の要素であることを

$$a \in A$$

で表し，**a は A に属する**という．b が A に属さないことは

$$b \notin A$$

で表す.

簡単にいえば，集合とはそれに含まれるかどうかがきちんと客観的に判断できるものである．条件 $P(x)$ をみたす x 全体の集合を $\{\, x \mid P(x) \,\}$ で表す．例えば

$$X = \{\, x \mid x \text{ は 12 の正の約数} \,\}, \qquad Y = \{\, x \mid x \text{ は自然数} \,\}$$

は集合であり，要素を書き並べて

$$X = \{\, 1, 2, 3, 4, 6, 12 \,\}, \qquad Y = \{\, 1, 2, 3, 4, \ldots \,\}$$

と書き表すこともある．ただし，Y のように無限個の要素を含む場合には，よほど規則性がない限りは列挙するのではなく $Y = \{\, x \mid x \text{ は自然数} \,\}$ のように表すこと．例えば，次の集合

$$P = \{\, n \mid n \text{ は正の素数} \,\}$$

をその要素を書き並べて

$$P = \{\, 2, 3, 5, 7, \ldots \,\}$$

と表してしまうと，これでは素数を並べたのかも？ぐらいのことしかわからず確証がもてない．なお，集合を規定する部分の変数は積分変数と同じような扱いなのでどの文字を用いてもよい．具体例で述べれば

$$P = \{\, n \mid n \text{ は正の素数} \,\} = \{\, x \mid x \text{ は正の素数} \,\} = \{\, y \mid y \text{ は正の素数} \,\}$$

となる．

また，集合の要素については

$$2 \in X, \qquad 5 \notin X$$

のように記号を用いる．また，次のような

$$Z = \{\, x \mid x \text{ は大きな数} \,\}$$

は「大きな数」という基準が人によってあいまいなので，これは集合ではない．

定義 6.2. （空集合）
要素を一つも含まない集合を**空集合**といい，$\emptyset$ という記号で表す.

例えば

$$A = \{\, x \mid x \text{ は実数で } x^2 < 0 \,\}$$

とおくと，A の要素は 1 つもないので $A = \emptyset$ である．

定義 6.3. （部分集合）

A と B を集合とする．B の任意の要素が A にも属するとき，B は A の**部分集合**といい

$$B \subset A$$

で表す．また，空集合 $\emptyset$ は任意の集合の部分集合であると約束する．B が A の部分集合でないときには

$$B \not\subset A$$

と表す．

例えば

$$X = \{\, x \mid x \text{ は } 12 \text{ の正の約数} \,\}, \qquad Y = \{\, x \mid x \text{ は自然数} \,\}$$

とすれば，$X \subset Y$ である．また，他にも

$$\{\, 2, 4 \,\} \subset X, \qquad \{\, 1, 3, 5 \,\} \not\subset X$$

である．記号を混同しないように注意すること．$\in$ は要素と集合の関係，$\subset$ は集合と集合の関係なので

$$2 \subset \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}, \qquad \{\, 2 \,\} \in \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}$$

と書くと，言いたいことは何となく伝わるが誤りである．また，$\subset$ は不等号で言うと $\leqq$ のようなものなので，$X \subset X$ のように両辺が同じ集合でもよい．

なお，2 個の異なる実数 x と y に対しては必ず $x < y$ または $y < x$ のどちらか一方が成り立つ．しかし，2 個の異なる集合 X と Y に対しては，$X \subset Y$ と $Y \subset X$ のどちらも成り立たないことがあるので注意すること．例えば

$$X = \{\, 1, 2, 3 \,\}, \qquad Y = \{\, 0, 1, 2 \,\}$$

とすれば

$$3 \in X, \quad 3 \notin Y \quad \Longrightarrow \quad X \not\subset Y, \qquad\qquad 0 \in Y, \quad 0 \notin X \quad \Longrightarrow \quad Y \not\subset X$$

となる．このように，集合については包含関係に関して必ず大小関係が比較できるわけではない．

集合 A と B に対して $A \subset B$ であることを示すには，任意の $x \in A$ に対して $x \in B$ であることを示せばよい．また，$A = B$ であることを示すには $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であることを示せばよい．実際，これが集合が等しいことの定義である．

例題 6.4. x は実数を表すとする．次の集合 X と Y に対して，$X \subset Y$ であることを示せ．

$$X = \{\, x \mid x^2 + x - 2 \leqq 0 \,\}, \qquad Y = \{\, x \mid x^2 - x - 12 < 0 \,\}$$

（解答） 不等式を解けば

$$X = \{\, x \mid -2 \leqq x \leqq 1 \,\}, \qquad Y = \{\, x \mid -3 < x < 4 \,\}$$

であるから，$X \subset Y$ が成り立つ．

（解答終）

定義 6.5. （和集合・共通部分）
A と B を集合とするとき

$$A \cup B := \{\, x \mid x \in A \text{ または } x \in B \,\}, \qquad A \cap B := \{\, x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \,\}$$

とおき，$A \cup B$ を A と B の**和集合**と，$A \cap B$ を A と B の**共通部分**という．

これらは文字通り A と B のうち少なくともどちらかに属するもの全体の集合を $A \cup B$，A と B の両方に属するもの全体の集合を $A \cap B$ とおいたものである．

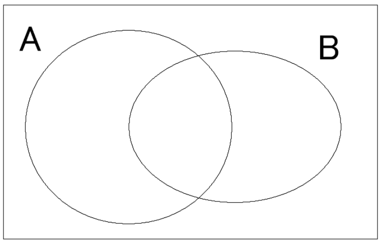


図 1.1: A, B

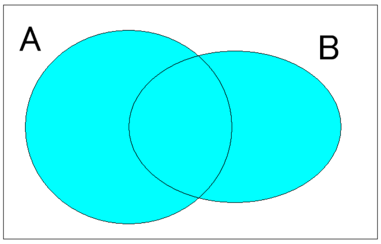


図 1.2: $A \cup B$

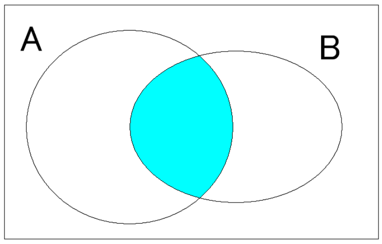


図 1.3: $A \cap B$

例えば

$$X = \{\, 1, 2, 3, 4, 6, 12 \,\}, \qquad Y = \{\, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \,\}$$

とおけば

$$X \cup Y = \{\, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \,\}, \qquad X \cap Y = \{\, 2, 4, 6, 12 \,\}$$

となる．他には

$$A = \{\, x \mid x \text{ は正の奇数} \,\}, \qquad B = \{\, x \mid x \text{ は正の偶数} \,\}$$

とおけば

$$A \cup B = \{\, x \mid x \text{ は自然数} \,\}, \qquad A \cap B = \emptyset$$

となる．このように共通部分が空集合となることもある．

また，記号の約束からいつも

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B, \qquad A \cap B \subset B \subset A \cup B$$

が成り立つ．

例題 6.6. x は実数を表すとする．次の集合 X と Y に対して，$X \cap Y$ と $X \cup Y$ を求めよ．

$$X = \{\, x \mid x^2 - x - 6 < 0 \,\}, \qquad Y = \{\, x \mid x^2 - 5x + 4 \geqq 0 \,\}$$

（解答） $X = \{x \mid -2 < x < 3\}$, $Y = \{x \mid x \leqq 1 \text{ または } 4 \leqq x\}$ であるから

$$X \cap Y = \{x \mid -2 < x \leqq 1\}, \qquad X \cup Y = \{x \mid x < 3 \text{ または } 4 \leqq x\}$$

となる．

（解答終）

例題 6.7. 集合 A と B に対して，$A \cap B = A$ であるための必要十分条件は $A \subset B$ であることを示せ．

（解答） $A \cap B = A$ とする．任意の $x \in A$ をとる．このとき，仮定より $A = A \cap B$ となるから $x \in A \cap B$ なので，$x \in B$ である．よって，$A \subset B$ が成り立つ．

逆に $A \subset B$ とする．$A \cap B \subset A$ は常に成り立つから，逆向きの包含関係を示せばよい．そこで，任意の $x \in A$ をとる．このとき，仮定より $A \subset B$ であるから $x \in B$ となる．よって，$x \in A \cap B$ となるから，$A \subset A \cap B$ となる．ゆえに，$A \cap B \subset A$ かつ $A \subset A \cap B$ より，$A \cap B = A$ が成り立つ．

（解答終）

定義 6.8. （全体集合・補集合）
議論している対象の要素全体の集合を**全体集合**または**普遍集合**という．U を全体集合，A を U の部分集合とするとき

$$A^c = \{\, x \in U \mid x \notin A \,\}$$

を A の**補集合**という．

注意 6.9. 高校数学では補集合を $\overline{A}$ で表すことになっているが，数学の世界では $\overline{A}$ という記号は断りがなければ A の閉包を表すことが多い．そのため補集合の記号は complement の頭文字をとって A^c で表すのが普通である．高校で標準的なものから外れた記号を用いることになった経緯はよくは知らない．

例えば全体集合を実数全体の集合とすると

$$X = \{\, x \mid x \text{ は有理数} \,\}, \qquad Y = \{\, x \mid -1 \leqq x < 2 \,\}$$

とおけば

$$X^c = \{\, x \mid x \text{ は無理数} \,\}, \qquad Y^c = \{\, x \mid x < -1 \text{ または } 2 \leqq x \,\}$$

となる．もちろん全体集合が決まっていない場合には補集合を考えることができない．例えば A を男子高校生全体の集合とすれば，全体集合 U_1 が高校生全体の集合ならば A の補集合 A^c は女子高校生全体の集合である．一方，全体集合 U_2 を人間全体の集合とすれば，A の補集合 A^c は女性であるかまたは高校生でない人全体の集合となる．このように全体集合をどう決めるかによって補集合が変わってしまうからである．ただし，通常は実数全体の集合など各場面での自然な全体集合を選ぶことが多いので，その場合には「全体集合を実数全体の集合とする」などの記述を省略することもある．

定理 6.10. （ド・モルガンの法則）
U を全体集合とし，その部分集合 A と B に対して

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

が成り立つ．

証明. $x \in U$ に対して

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c \quad &\iff \quad x \notin A \cup B \\ &\iff \quad x \notin A \text{ かつ } x \notin B \\ &\iff \quad x \in A^c \text{ かつ } x \in B^c \quad \iff \quad x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

であるから，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ が成り立つ．同様に

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c \quad &\iff \quad x \notin A \cap B \\ &\iff \quad x \notin A \text{ または } x \notin B \\ &\iff \quad x \in A^c \text{ または } x \in B^c \quad \iff \quad x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

であるから，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ が成り立つ． □

この定理の主張は上のような証明よりもベン図を書いて確認した方がわかりやすいかもしれない．ポイントは補集合をとると「または」と「かつ」がひっくり返ることである．

7　数学的帰納法

次の不等式は簡単に直接証明できるが，**数学的帰納法**の復習として証明しておく．

補題 7.1.　すべての自然数 n に対して，不等式 $n! \geqq 2^{n-1}$ が成り立つ．

証明.　求める不等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n = 1$ のとき

$$\text{（左辺）} = 1! = 1, \qquad \text{（右辺）} = 2^0 = 1$$

よって，$n = 1$ のとき成り立つ．

(ii) $n = k$ $(k \geqq 1)$ のときに不等式

$$k! \geqq 2^{k-1}$$

が成り立つと仮定する．このとき

$$\begin{aligned}(k+1)! - 2^k &= (k+1) \cdot k! - 2 \cdot 2^{k-1} \\ &\geqq (k+1) \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 2^{k-1} = (k-1)2^{k-1} \geqq 0 \qquad (\because\ k \geqq 1)\end{aligned}$$

となる．よって

$$(k+1)! \geqq 2^k$$

が成り立つから，$n = k+1$ のときも成り立つ．

(i),(ii) より，すべての自然数 n に対して，不等式 $n! \geqq 2^{n-1}$ が成り立つ．　□

練習問題 7.1.　任意の自然数 n に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot 3^{k-1} = \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{4}$

練習問題 7.2.　n が 5 以上の自然数ならば，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$2^n > n^2$$

練習問題 7.3.　任意の自然数 n に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

練習問題 7.4.　任意の自然数 n に対して，$3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 で割り切れることを示せ．

練習問題 7.5.　次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それが正しいことを数学的帰納法で示せ．

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

第2章　実数の集合

この章では実数の性質について簡単に説明する．いろいろな新しい概念が出てくるが，大学数学の議論に慣れるため練習と思って，順番に理解しておくこと．

1　区間と近傍

以後，実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で，自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す．つまり,『$x \in \mathbb{R}$ とする』とは『x を実数とする』という意味である．

定義 1.1. （区間）
$a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ に対して，次の形の集合を**区間**という．

（開区間）

$$(a,b) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}, \quad (a,\infty) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \,\}, \quad (-\infty,b) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < b \,\}$$

（閉区間）

$$[a,b] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b \,\}, \quad [a,\infty) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \,\}, \quad (-\infty,b] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leqq b \,\}$$

（半開区間）

$$[a,b) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b \,\}, \qquad (a,b] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b \,\}$$

ただし，$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ は開区間でもあり閉区間でもあると考えることにする．

参考書によっては，端点が $\pm\infty$ でない (a,b) のみを開区間，$[a,b]$ のみを閉区間ということもある．

例 1.2.　次の集合

$$\begin{aligned}
X_1 &= (0,1) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \,\} \\
X_2 &= [0,1] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqq x \leqq 1 \,\} \\
X_3 &= [0,1) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqq x < 1 \,\} \\
X_4 &= [0,\infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0 \,\}
\end{aligned}$$

は区間である．特に X_1 は開区間，X_2 と X_4 は閉区間である．X_3 は開区間でも閉区間でもないが区間ではある．なお，開区間の記号と座標の記法を混同しないこと．また，次の集合

$$X_5 = (0,1) \cup (2,3) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ または } 2 < x < 3 \,\}, \qquad X_6 = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \text{ は整数} \,\}$$

は区間ではない．

定義 1.3. （近傍）
$\varepsilon > 0,\ a \in \mathbb{R}$ に対して

$$U_\varepsilon(a) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon \,\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

とおく．この開区間 $U_\varepsilon(a)$ を点 a の ε **近傍**（または単に**近傍**）という．

2　上限・下限

この節において，集合 $X \subset \mathbb{R}$ は空集合でないとする．

定義 2.1. （上界・下界）

(1) $a \in \mathbb{R}$ が X の**上界**であるとは，すべての $x \in X$ に対して，$x \leqq a$ をみたすことである．また，X の上界が存在することを X は**上に有界**であるという．

(2) $a \in \mathbb{R}$ が X の**下界**であるとは，すべての $x \in X$ に対して，$x \geqq a$ をみたすことである．また，X の下界が存在することを X は**下に有界**であるという．

(3) X が上にも下にも有界であるとき，X は**有界**であるという．

定義 2.2. （最大値・最小値）

(1) $a \in \mathbb{R}$ が X の上界かつ $a \in X$ をみたすとき，a を X の**最大値**といい，$\max X$ で表す．

(2) $a \in \mathbb{R}$ が X の下界かつ $a \in X$ をみたすとき，a を X の**最小値**といい，$\min X$ で表す．

よく知っているように，X の最大値・最小値は常に存在するとは限らない．

定義 2.3. （上限・下限）

(1) X の上界が空集合でないとき，上界の最小値を X の**上限**といい，$\sup X$ で表す．上界が空集合の場合には上限はないという．このことを $\sup X = \infty$ と表すこともある．

(2) X の下界が空集合でないとき，下界の最大値を X の**下限**といい，$\inf X$ で表す．下界が空集合の場合には下限はないという．このことを $\inf X = -\infty$ と表すこともある．

例 2.4.　具体的な集合 X について，その上限・下限を求めてみる．

(1) $X = (1, 2]$ とすると

$$\max X = 2, \qquad \sup X = 2, \qquad \min X \text{ は存在しない}, \qquad \inf X = 1$$

である．よって，X は有界である．

(2) $X = [1, \infty)$ とすると

$$\max X, \sup X \text{ は存在しない}, \qquad \min X = 1, \qquad \inf X = 1$$

である．よって，X は下に有界であるが上に有界ではない．

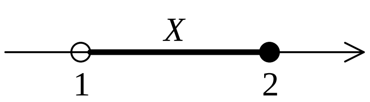


図 2.1: $X = (1, 2]$

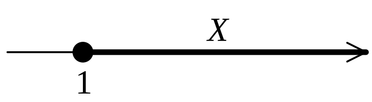


図 2.2: $X = [1, \infty)$

最初のうちは，例 2.4(1) では X を数直線に図示したときに『1 は X の左端だけど白丸だから最小値ではない』ので，代わりに下限と呼ぶということだと思ってよい．また，X の最大値が存在すれば，X の最大値と X の上限は必ず一致する．最小値と下限の関係についても同様である．

次に数列に対しても同様に上限・下限を定義する．

定義 2.5. （数列の上限・下限）

数列 $\{a_n\}$ に対して，それを並べた集合 X を $X = \{\, a_1, a_2, a_3, \dots \}$ により定める．

(1) 集合 X の上界を数列 $\{a_n\}$ の**上界**という．同様に，集合 X の下界，上限，下限をそれぞれ数列 $\{a_n\}$ の**下界**，**上限**，**下限**という．数列 $\{a_n\}$ の上限を $\sup a_n$ で，下限を $\inf a_n$ で表す．

(2) 集合 X が有界であるとき，数列 $\{a_n\}$ は**有界**であるという．同様に，集合 X が上に有界，下に有界であるとき，数列 $\{a_n\}$ は**上に有界**，**下に有界**であるという．

(3) 集合 X が最大値をもつとき，その値を数列 $\{a_n\}$ の最大値といい，$\max a_n$ で表す．同様に，集合 X が最小値をもつとき，その値を数列 $\{a_n\}$ の最小値といい，$\min a_n$ で表す．

数列 $\{a_n\}$ が有界であることを言いかえると

n に無関係なある定数 M が存在して，すべての自然数 n に対して $|a_n| \leqq M$ となること

である．この表現が今後よく用いられる．同様に，数列 $\{a_n\}$ が上に有界であるとは『ある定数 M が存在して，すべての自然数 n に対して $a_n \leqq M$ となること』である．

例 2.6. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ とおくと，すべての自然数 n に対して

$$|a_n| = \frac{1}{n} \leqq 1$$

であるから，数列 $\{a_n\}$ は有界である．

また，$b_n = n$ とおくと，b_n はいくらでも大きくなるから，すべての自然数 n について $|b_n| \leqq M$ となるような定数 M は存在しない．よって，数列 $\{b_n\}$ は有界ではない（下には有界である）．

例 2.7. 具体的な例を挙げるので，用語の定義と照らしわせて確認すること．

(1) $a_n = 3n + 2$ は下に有界で，$\max a_n$ と $\sup a_n$ は存在せず，$\min a_n = \inf a_n = 5$ である．

(2) $b_n = \dfrac{1}{2^n}$ は有界で，$\max b_n = \sup b_n = \dfrac{1}{2}$，$\inf b_n = 0$ である．また，$\min b_n$ は存在しない．

(3) $c_n = (-1)^n n^2$ は上にも下にも有界でない．

練習問題 2.1. 次の各数列に対して，その上限，下限，最大値，最小値が存在するかを調べ，存在するものはその値を求めよ．

(1) $a_n = -5n + 9$　　(2) $b_n = \left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$　　(3) $c_n = \dfrac{n-1}{n}$

3　実数の連続性

高校までに四則演算について学習し，有理数どうしの四則演算の結果はまた有理数であることなどを学んだ．そこで，その集合内で演算が完結する（演算結果がまたその集合内にある）場合に，**演算が閉じている**と呼ぶことにする．例えば，有理数全体のなす集合を $\mathbb{Q}$ とおけば，$\mathbb{Q}$ は四則演算で閉じている．一方，整数全体のなす集合を $\mathbb{Z}$ とおけば，$\mathbb{Z}$ は和・差・積では閉じているが，整数どうしの商は整数とは限らないから商については閉じていない．

自然数 $\mathbb{N}$，整数 $\mathbb{Z}$，有理数 $\mathbb{Q}$，実数 $\mathbb{R}$ に対して，四則演算が閉じているならば ◯，閉じていなければ $\times$ として表をまとめると以下のようになる．

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
和・積	◯	◯	◯	◯
差	$\times$	◯	◯	◯
商	$\times$	$\times$	◯	◯

このように四則演算が可能なように数の世界が広がる様子を確認できるが，有理数と実数の違いは四則演算で閉じているかどうかには現れない．ここで，実数については，次の重要な性質が知られている．

公理 3.1.（実数の連続性）

(1) 空でない集合が上に有界な集合ならば，その集合の上限が存在する．

(2) 空でない集合が下に有界な集合ならば，その集合の下限が存在する．

これは証明すべきものではなく，ここから議論を始めるための土台である．とりあえずこの公理が何を述べているかがぼんやりとでも感じとれれば，ここでは問題ない．

上記の公理は大雑把にいえば『数直線に穴はなくつながっている』ということである．例えば

$$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$$

であるから，$\sqrt{2}$ の小数第 n 位までの数列を a_n，つまり

$$a_1 = 1.4, \quad a_2 = 1.41, \quad a_3 = 1.414, \quad a_4 = 1.4142, \quad a_5 = 1.41421, \quad \cdots$$

とおけば，a_n は有限小数なので有理数である．しかし，$\sqrt{2}$ は無理数であり，a_n は $\sqrt{2}$ に n を大きくすると限りなく近づいていく．高校の記号で説明すれば

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$$

ということである．このことから，有理数だけを並べると a_n はすべてその上にあるのに，極限値である $\sqrt{2}$ は有理数ではないからはみでてしまう．実は有理数だけを全部並べても穴だらけであることが知られている．しかし，実数列の極限値が存在した場合にはその値は必ず実数であって，虚数となるようなことはない．

このように実数を並べると直線上にぎっしりつまっていて，もしその部分集合が上に有界ならばその限界である上限も実数であるということを主張するのが公理 3.1 であり，その主張から「上限定理」と呼ばれることもある．これがすべての実数のなす集合 $\mathbb{R}$ の最大の特徴である．

なお，もしこの上限定理を証明しようと考えたら，実数とは何かという本質まで戻らなければならない．デデキントの切断による実数の構成法まで遡ることは数学科以外にはほぼメリットがないと思われるので，ここでは上限定理は認めることにする．

次に非常に当たり前のことに感じられる次の主張を公理 3.1 を用いて証明する．

命題 3.2. （アルキメデスの公理）
任意の正の実数 a と b に対して，$b < na$ となる自然数 n が存在する．

証明． 背理法で証明する．
すべての自然数 n に対して $na \leqq b$ であると仮定する．このとき，$X = \{\, na \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ とおけば，X は上に有界な集合となる．よって，公理 3.1 より X の上限 $c = \sup X$ が存在する．

このとき，$c - a$ は c より小さい数なので X の上界ではないから，ある自然数 m で

$$c - a < ma$$

となるものが存在する．これより

$$c < (m+1)a$$

となるが，$(m+1)a \in X$ であるから，c が X の上限であることに矛盾する．ゆえに，$b < na$ となる自然数 n が存在する． □

この命題を大雑把にまとめてしまうと，任意の正の実数 b に対して，正の実数 a をとってきて

$$a, \quad 2a, \quad 3a, \quad 4a, \quad 5a, \quad 6a, \quad \ldots, \quad na, \quad \ldots$$

と並べると，いつかは b より大きくなるということである．

私自身も学生の頃に最初はこの命題の意味はわからなかった．最初この命題を見たとき，自然数 n を $\dfrac{b}{a}$ より大きくとったら終わりなのでは？と考えたが，どうやら問題は『任意の実数を 1 つとってきたとき，それより大きな自然数があるか？』ということらしい．次に，それは『その実数の整数部分に 1 を足した自然数でよいのでは？』とも思うが，そのためにはすべての実数が具体的に無限小数表示できないといけない．有理数のような有限小数・循環小数はともかく，無理数もすべて無限小数表示できることを証明しろと言われても困ってしまう．いずれも当たり前の事実に感じるが，明確に証明しようと思ってもできないのである．

実は上限定理とそれから導かれるアルキメデスの公理から，次の事実

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n = \infty$
- すべての実数は 10 進法によって（本質的に 1 通りに）無限小数表示できる．
- 実数のガウス記号（整数部分）が定義できる．

が証明できることが知られている．裏を返せばこの節で紹介した内容を知らなければ証明できないのである．ここで本質的に 1 通りと書いたのは

$$0.999999\cdots = 1$$

のように，9 だけが続けて無限個並ぶ場合を除くということである．

このように重要な内容ではあるが，やっぱり初見では違和感があるのも当然なので，当たり前のことを念のため強調したんだなくらいで捉えておけば大丈夫である．理論的な部分に関心がある場合には，抽象的な議論がもちろん多くなるが，まずは実数の構成方法から実数全体の集合というものを捉え直してみるのもよいと思う．

4　関数

4.1　関数に関する用語と概念

定義 4.1. （関数）

X を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．

(1) 写像 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ を**関数**といい，f によって $x \in X$ に対応する実数を $f(x)$ と表す．このとき，X を f の**定義域**といい，$f(X) = \{\, f(x) \mid x \in X \,\}$ を f の X における**値域**という．

(2) 関数を $y = f(x)$ と表したとき，x を f の**独立変数**，y を f の**従属変数**という．

(3) 値域 $f(X)$ の最大値，最小値が存在するとき，それらを関数 f の**最大値**，**最小値**という．

本来は関数は f で表し，その x での値を $f(x)$ で表すので，これらは区別されるべきものである．しかし，普段から独立変数を明示した方がわかりやすいことが多いので，以下では f と $f(x)$ を特に区別せずに『関数 $f(x)$』のように表すことにする．

定義 4.2. （単調関数）

$f(x)$ を区間 I 上で定義された関数とする．

(1) 任意の $a_1, a_2 \in I$ に対し
$$a_1 < a_2 \quad \Longrightarrow \quad f(a_1) \leqq f(a_2)$$
であるとき，$f(x)$ は I で**単調増加**であるという．さらに
$$a_1 < a_2 \quad \Longrightarrow \quad f(a_1) < f(a_2)$$
であるとき，$f(x)$ は I で**狭義単調増加**であるという．

(2) 任意の $a_1, a_2 \in I$ に対し
$$a_1 < a_2 \quad \Longrightarrow \quad f(a_1) \geqq f(a_2)$$
であるとき，$f(x)$ は I で**単調減少**であるという．さらに
$$a_1 < a_2 \quad \Longrightarrow \quad f(a_1) > f(a_2)$$
であるとき，$f(x)$ は I で**狭義単調減少**であるという．

例 4.3.　以下で例を挙げるので，各自でグラフを描いて定義の意味を視覚的に確認すること．

(1) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ とすると，定義域は $\mathbb{R}$，値域は $[0, \infty)$ である．また $f(x)$ は単調関数ではない．

(2) $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R},\ X = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \fallingdotseq 1 \,\}$ を $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ とすると，定義域は X，値域は $\{\, y \in \mathbb{R} \mid y \fallingdotseq 2 \,\}$ である．また，$g(x)$ は定義域において狭義単調増加となる．

(3) $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $h(x) = 1$ とすると，定義域は $\mathbb{R}$，値域は $\{1\}$ である．また，$h(x)$ は定義域において単調増加であるが，狭義単調増加ではない．

上の例でもあるように『単調増加』は常に増加しているというよりは，常に減少していないという意味で捉える方が適切である．そのため，これを単調非減少と呼び，常に増加している狭義単調増加関数の方を単調増加と呼ぶ流儀もある．本によって用語の使い方が異なる場合もあるので注意すること．

4.2　三角関数

定義 4.4.（弧度法）
半径 1 の円において，弧の長さが 1 となる扇形の中心角を 1 ラジアン（1 rad）という．

この定義より $180° = \pi$ ラジアンとなる．

定義 4.5.（三角関数）
座標平面上において x 軸の正の部分を始線にとり，始線から角 θ だけ回転した位置にある動径 OP と，原点 O を中心とする半径 1 の円（これは単位円と呼ばれる）との交点の座標を (x, y) とする．このとき，x, y, y/x は角 θ のみによって定まるので

$$\cos\theta = x, \qquad \sin\theta = y, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定める．ただし，整数 n に対して $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ では動径 OP が y 軸の一部となり，交点の座標が $x = 0$ となるから，$\tan\theta$ の値は定義しない．これらをまとめて**三角関数**といい，それぞれは**正弦関数**（サイン/sine）・**余弦関数**（コサイン/cosine）・**正接関数**（タンジェント/tangent）と呼ばれる．
また，他に

$$\operatorname{cosec}\theta = \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

とおき，それぞれ余割関数（コセカント/cosecant）・正割関数（セカント/secant）・余接関数（コタンジェント/cotangent）と呼び，まとめて割三角関数（かつさんかくかんすう）という．ただし，本書ではこれらの記号は用いない．

定義から単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点について $-1 \leqq x \leqq 1$, $-1 \leqq y \leqq 1$ であるから

$$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1, \qquad -1 \leqq \sin\theta \leqq 1, \qquad -\infty < \tan\theta < +\infty$$

であることがわかる．

命題 4.6.（三角関数の基本的性質）
tan が含まれる公式については θ は意味をもつ角度とする．

(1) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \qquad \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad 1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

(2) $\cos(-\theta) = \cos\theta, \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta, \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$

(3) $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta, \qquad \sin(\pi - \theta) = \sin\theta, \qquad \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

(4) n を整数とすると

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta, \qquad \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta, \qquad \tan(\theta + n\pi) = \tan\theta$$

証明.　点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ は $x^2 + y^2 = 1$ 上にあることと $\tan\theta$ の定義より

$$x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

が成り立つ．また，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割れば

$$1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}, \qquad \therefore\ 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

となる．他の性質も定義より得られる．　□

命題 4.7. （加法定理とその応用）

$\tan$ が含まれる公式については θ などは意味をもつ角度とする．

(1) （加法定理）以下の式は複号同順

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

(2) （2 倍角の公式）

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \qquad \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

(3) （半角の公式）

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}, \qquad \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}, \qquad \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

(4) （和積の公式）

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(5) （積和の公式）

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right\}, \quad \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\}, \quad \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right\}$$

(6) （三角関数の合成）

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$$

ここで，α は

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となる角度である．

証明. いずれも 1 つだけを証明するので，残りは各自で同様の方法で確認すること．

(1) やや長いので高校数学 II の教科書を参照．単位円で三角形に着目し，余弦定理を用いればよい．

(2) 加法定理で $\alpha = \beta = \theta$ とおけば

$$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

(3) 2 倍角の公式 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ において，$2\alpha = \theta$ とおけば

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \qquad \therefore\ \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

(4)　$\sin(A+B)$ と $\sin(A-B)$ の加法定理の公式を加えると

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$$

となる．よって，$\alpha=A+B,\ \beta=A-B$ とおけば，$A=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$B=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ なので

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(5)　$\sin(\alpha+\beta)$ と $\sin(\alpha-\beta)$ の加法定理の公式を加えると

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\therefore\ \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

(6)　命題のような角度 α をとれば

$$\begin{aligned}a\sin\theta+b\cos\theta&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

□

練習問題 4.1.　命題 4.6, 4.7 の残りを証明せよ．

練習問題 4.2.　次の関数の周期を調べて，そのグラフをかけ．

(1) $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)$　(2) $y=-\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{5}\right)$　(3) $y=\tan x$

練習問題 4.3.　次の値を求めよ．

(1) $\sin\dfrac{7}{6}\pi$　(2) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$　(3) $\sin\dfrac{7}{12}\pi$　(4) $\cos\dfrac{\pi}{12}$　(5) $\tan\dfrac{8}{3}\pi$

練習問題 4.4.　次の関数の最大値と最小値を求めよ．そのときの θ の値は求めなくてもよい．

(1) $y=\cos 2\theta+\sin\theta$　(2) $y=3\sin\theta-2\cos\theta$

練習問題 4.5.　次の 3 倍角の公式を証明せよ．

(1) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$　(2) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$　(1) $\tan 3\theta=\dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$

第3章　数列の極限

高校数学においては，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限とは次のようなものであった。

定義？　n を限りなく大きくするとき a_n が一定の値 α に限りなく近づくならば，α を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値という．

ここで，次の数列

$$a_n = \begin{cases} n^{-100} & (n \neq 2^k,\ k = 1, 2, 3, \ldots) \\ 1 & (n = 2^k,\ k = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ について考えてみる．$a_n \neq n^{-100}$ となる n を列挙すれば

$$n = 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ 2048,\ 4096,\ 8192,\ 16384,\ 32768,\ 65536,\ 131072,\ \ldots$$

となり，現れる頻度は急激に低くなる．例えば $n = 16777216$ の次は $n = 33554432$ まで出てこない．そのため，n が大きくなればほとんど $a_n = n^{-100}$ であるから，a_n は 0 に限りなく近づくと思えばよいかもしれない．しかし一方，たまにしか現れないとはいっても a_n は 0 と 1 の間を振動しているから，$\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在しないのかもしれない．

このような問題が起こるのは上の数列の極限の定義が個人の主観に基づいたものだからである．例えば「近い」という表現1つをとっても，あるものが近いと感じるか近くないと感じるかは個々の考え方や置かれた状況によって異なる．そのために上の数列の極限の問題は個人の感じ方によって答えが変わりうるが，それでは困ってしまう．そこで，数列の極限を数学的に厳密に，つまり個人の主観の入る余地のない定義をイプシロン・デルタ論法を用いて与え，議論を展開することにする．高校数学では極限に関するさまざまな性質

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

などは証明なしに認めてきた．それは上で述べた定義では「証明できない」からである．そこで，数列の極限の厳密な定義を与えることにより，これらの性質の証明を与える．また，この定義に基づいた議論により新たに証明できる多くの定理についても学習する．上で述べた定理は当たり前と思うかもしれないが，他にも

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$$

のような定理もあり，これらを正しく理解するにはイプシロン・デルタ論法による極限の定義が必要となる．

また，$a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ とすると，どちらも n を大きくしていくと 0 に近づく．ここで具体的に書き並べれば

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}: \quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{10},\ \ldots,\ \frac{1}{100},\ \ldots$$

$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}: \quad 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{36},\ \frac{1}{49},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{81},\ \frac{1}{100},\ \ldots,\ \frac{1}{10000},\ \ldots$$

となり，a_n よりも b_n の方がより速く小さくなっているようである．高校までの定義だと『限りなく近づく』というだけで定量的な情報が何もないために，厳密な論証や誤差評価などの面で非常に扱いづらい（近似値を提示するならば「有効数字〜桁」や「$a \pm 0.01$」のように誤差に関する記述をセットでつけなければ意味がなく，単に「近い」というだけでは実際の設計などで有用ではない）．さらに，単に数列の極限値を求めるだけではなく，その『収束の速さ』も議論できるようになることも目標である．この『収束の速さ』はパソコンを使った数値計算の分野でも必要な計算回数などに関係する重要な事項である．

そして最後に，与えられた漸化式から定まる数列について，単調増加（減少）というある特別な性質をみたす数列に対しては一般項がわからない場合でも極限を求める方法を学習する．

1　数列の極限の定義

1.1　イプシロン・デルタ論法の気持ち

まず $\varepsilon - \delta$ 論法の感覚を掴むために，次の命題を考えてみる．

命題 1.1.　$a, b \in \mathbb{R}$ とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|a-b| < \varepsilon$$

が成り立つならば，$a = b$ である．

この命題は実はものすごく当たり前のことを述べているだけである．実際，具体的な a と b の値に関して，命題の仮定『$|a-b| < \varepsilon$』が成り立つ $\varepsilon > 0$ の範囲を考えると

- $a = 1,\ b = 2$ のときは，$1 = |a-b| < \varepsilon$ より，$\varepsilon > 1$
- $a = 1,\ b = 1.5$ のときは，$0.5 = |a-b| < \varepsilon$ より，$\varepsilon > 0.5$
- $a = 1,\ b = 1.01$ のときは，$0.01 = |a-b| < \varepsilon$ より，$\varepsilon > 0.01$
- $a = 1,\ b = 1.001$ のときは，$0.001 = |a-b| < \varepsilon$ より，$\varepsilon > 0.001$

となる．つまり a と b が近ければ近いほど，命題の仮定をみたす $\varepsilon > 0$ の範囲は大きくなる．ただし，a と b がどんなに近くても，a と b が異なる限りは “すべての正の数 ε” について命題の仮定『$|a-b| < \varepsilon$』がみたされることはない．これを踏まえて証明は以下のようになる．

証明.　$a \fallingdotseq b$ と仮定すると，$\varepsilon_0 = \dfrac{|a-b|}{2}$ とおけば，これは正の数である．よって，命題の仮定より

$$|a-b| < \varepsilon_0 = \frac{|a-b|}{2}$$

が成り立つことになるが，これを変形すると $|a-b| < 0$ となるから，これは絶対値が 0 以上の値であることに矛盾する．ゆえに，$a = b$ が成り立つ．　□

この命題のポイントは，命題の主張やその証明の中のどこにも “無限大” や “極限的操作” を用いずに，有限な数 $\varepsilon > 0$ のみを用いて $a = b$ となるための条件を表せていることである．このような考え方を元にして，次節では「限りなく近づく」という条件を有限な正の数 ε に関する条件に翻訳する．これがイプシロン・デルタ論法と呼ばれるものである．無限大を厳密に直接扱うことは難しいが，有限な数に関する条件は確認しやすいことがこの論法の利点である．もし高校で習った極限操作を用いたとすれば

$$0 \leqq |a-b| < \varepsilon \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (\varepsilon \to +0)$$

から，はさみうちの原理より $a = b$ が成り立つことになるが，逆にこの命題の考え方を基礎として極限を再定義し性質を導いていくことにする．

なお，命題の仮定を『任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|a-b| \leqq \varepsilon$$

が成り立つ』としたり,『任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|a-b| < 2\varepsilon$$

が成り立つ』としても，同様な証明により $a = b$ が成り立つことがわかる．ε としてすべての正の数を考えるから，等号の有無や右辺の定数倍は議論の本質に影響を与えないのである．

1.2　イプシロン・デルタ論法による極限の定義

次に $\varepsilon - \delta$ 論法（数列の場合には $\varepsilon - N$ 論法）と呼ばれる概念により，厳密な数列の極限の定義を述べる．

定義 1.2. （数列の極限）

(1)　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数 α が『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して，$n \geqq N(\varepsilon)$ をみたす任意の自然数 n について $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ をみたす』とき，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限値**は α であるといい

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \text{または} \qquad a_n \longrightarrow \alpha \qquad (n \to \infty)$$

で表す．このとき，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に**収束**するという．

(2)　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がどのような実数 α にも収束しないとき**発散**するという．さらに『任意の $K > 0$ に対して，ある自然数 $N(K)$ が存在して，$n \geqq N(K)$ をみたす任意の自然数 n について $a_n > K$ をみたす』とき，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ∞ に発散するといい

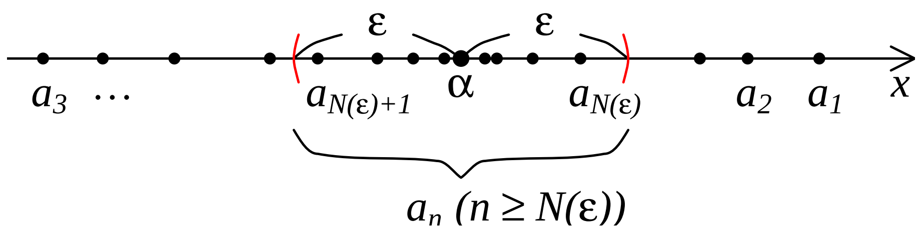
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

で表す．また『任意の $K < 0$ に対して，ある自然数 $N(K)$ が存在して，$n \geqq N(K)$ をみたす任意の自然数 n について $a_n < K$ をみたす』とき，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $-\infty$ に発散するといい

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

で表す．

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束するということは，a_n が α に近づいていくこと，つまり『n が十分大きければ，a_n と α の誤差 $|a_n - \alpha|$ をいくらでも一様に小さくできること』であると考えられる．それを数式で表現したのが上の定義である．



この定義を簡単に述べれば，先にどんな小さな許容誤差 $\varepsilon > 0$ を設定しても，その後から適切に（ε に対応して十分大きな）番号 $N(\varepsilon)$ を決めれば，その番号から先 $(n \geqq N(\varepsilon))$ では誤差 $|a_n - \alpha|$ が常に ε より小さくできるということである．定義において自然数を $N(\varepsilon)$ と書いているのは，許容誤差 $\varepsilon > 0$ に依存して決まることを強調するためで，参考書によっては単に N や n_0 のように書かれていることもある.「限りなく近い」という状況を無限大といった概念や「近づく」といった曖昧な表現を用いずに，有限の値 ε と $N(\varepsilon)$ を用いた条件でうまく表したものがこの定義である．最初はとっつきにくいと思うので，具体的な数列の場合に当てはめて考えてみてほしい．

なお，ε は非常に小さな正の数というイメージなので，例えば任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geqq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < 2\varepsilon$$

が成り立てば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となる．また，定義において『$n \geqq N(\varepsilon)$』の部分は『$n > N(\varepsilon)$』としても同値な条件となる．このあたりの定義は参考書によって微妙に異なるが，本質的な差異はない．

命題 1.3. （極限の一意性）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するならば，極限値は一意的である．

証明. 収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，実数 α と β が定義 1.2 の極限値の条件をみたすとする．

任意の $\varepsilon > 0$ をとる．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるから，ある自然数 $N_1(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geqq N_1(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |\, a_n - \alpha \,| < \varepsilon$$

となる．また，$\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$ であるから，ある自然数 $N_2(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geqq N_2(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |\, a_n - \beta \,| < \varepsilon$$

となる．そこで，$N(\varepsilon) = \max\{\, N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon) \,\}$ とおけば，$n \geqq N(\varepsilon)$ ならば，三角不等式より

$$|\, \alpha - \beta \,| = |\, (\alpha - a_n) + (a_n - \beta) \,| \leqq |\, \alpha - a_n \,| + |\, a_n - \beta \,| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

が成り立つ．$\varepsilon > 0$ は任意なので，命題 1.1 より $\alpha = \beta$ となるから，極限値は存在すれば一意的である． □

これより極限値は存在すればただ一つという当たり前の事実が確認できた．

この章の最初に述べた数列

$$a_n = \begin{cases} n^{-100} & (n \neq 2^k,\ k = 1, 2, 3, \ldots) \\ 1 & (n = 2^k,\ k = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

について，その収束・発散を調べてみる．もし $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば，どのように $\varepsilon > 0$ を選んでも，適切に自然数 $N(\varepsilon)$ を決めれば

$$n \geqq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |a_n - 0| < \varepsilon \tag{1.1}$$

とできなければならない．そこで，許容誤差を $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ と設定してみる．このとき，どのように自然数 N を決めて固定しても，必ず $2^k \geqq N$ となる自然数 k があり

$$|a_{2^k} - 0| = |\, 1 - 0 \,| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

となる．よって，$\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ のときに (1.1)をみたす自然数 $N\left(\dfrac{1}{2}\right)$ は存在しない．ゆえに，$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ である．このように，限りなく近づくという概念を厳密に定式化することにより，あいまいな議論を排除することができる．なお，この数列は発散することがわかるので，その証明についてこの節を読み終えた後に各自で考えてみよ．

例題 1.4. 次の数列の極限が成り立つことを示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

（解答）

(1) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，自然数 $N(\varepsilon)$ を $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ と決める．このとき

$$N(\varepsilon)>\frac{1}{\varepsilon} \tag{1.2}$$

である．よって，$n\geqq N(\varepsilon)$ となる任意の自然数 n に対して

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{N(\varepsilon)}<\varepsilon$$

が成り立つから，極限の定義より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ である．

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，自然数 $N(\varepsilon)$ を $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+1$ と決める．このとき

$$N(\varepsilon)>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{1.3}$$

である．よって，$n\geqq N(\varepsilon)$ となる任意の自然数 n に対して

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}\leqq\frac{1}{N(\varepsilon)^2}<\varepsilon$$

が成り立つから，極限の定義より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ である．

（解答終）

上の例題において，任意の $\varepsilon>0$ に対して，自然数 $N(\varepsilon)$ をガウス記号を用いて定義したが，証明の中身を読めば実際には (1) では (1.2)を，(2) では (1.3)をみたすように決めれば何でもよいことがわかる．証明を考える際には先に条件 (1.2)などが頭にあって，それをみたすように後から $N(\varepsilon)$ を 1 つ決めたのであるなお，条件 (1.2)をみたす自然数 $N(\varepsilon)$ が存在するのは第 2 章命題 3.2（アルキメデスの公理）が成り立つからであるが，最初のうちは特に気にしなくてよい．

例えば $\varepsilon=10^{-1}$ とすると

$$(1) \text{ では } N(10^{-1})\geqq 11,\qquad (2) \text{ では } N(10^{-1})\geqq 4$$

をみたすように $N(10^{-1})$ を 1 つ決めればよく，$\varepsilon=10^{-2}$ とすると

$$(1) \text{ では } N(10^{-2})\geqq 101,\qquad (2) \text{ では } N(10^{-2})\geqq 11$$

をみたすように $N(10^{-2})$ を 1 つ決めればよい．このことより，与えられた許容誤差 $\varepsilon>0$ に対して，それを満足することを保証する自然数 $N(\varepsilon)$ を比較することにより，$\dfrac{1}{n}$ よりも $\dfrac{1}{n^2}$ の方がより速く 0 に近づいていることが数式的にわかる．

例題 1.5. 数列の極限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{n+1}=3$ が成り立つことを示せ．

（解答） $\varepsilon>0$ に対して

$$\left|\frac{3n+5}{n+1}-3\right|=\frac{2}{n+1}<\varepsilon$$

とすると，これは $n>\dfrac{2}{\varepsilon}-1$ ならば成り立つ．

そこで，任意の $0<\varepsilon<2$ に対して，自然数 $N(\varepsilon)$ を $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$ とすれば

$$N(\varepsilon)>\frac{2}{\varepsilon}-1$$

である．よって，$n\geqq N(\varepsilon)$ となる任意の自然数 n に対して

$$\left|\frac{3n+5}{n+1}-3\right|=\frac{2}{n+1}\leqq\frac{2}{N(\varepsilon)+1}<\varepsilon$$

が成り立つ．よって，極限の定義より $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{n+1}=3$ である．

（解答終）

上の例題の解答では $0<\varepsilon<2$ の場合しか考えていないが（そうしないと $N(\varepsilon)$ が自然数にならないので），別に $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$ とおけばそのような制限はいらない．ただし，この論法では $\varepsilon>0$ が小さい場合が問題であるから，このように最初から ε は小さいとしてもよい．実際，上の例題では常に $\left|\dfrac{3n+5}{n+1}-3\right|=\dfrac{2}{n+1}\leqq 1$ であるから，大きい許容誤差 ε についてはすでに不等式が成り立っているので，考える必要がないのである．

練習問題 1.1. 次の数列

$$a_n=\frac{1}{n^3},\qquad b_n=\frac{1}{2^n},\qquad c_n=-\frac{1}{n^2+1}$$

はすべて 0 に収束する．そこで，次の各 $\varepsilon>0$ に対して，定義 1.2 の条件をみたすような自然数 $N(\varepsilon)$ のうち最小のものをそれぞれの数列について求めよ．

(1) $\varepsilon=0.1$　　(2) $\varepsilon=0.01$　　(3) $\varepsilon=0.001$

練習問題 1.2. 次の数列の極限が成り立つことを示せ．ただし，a を実数とする．

(1) $\lim_{n\to\infty}a=a$　　(2) $\lim_{n\to\infty}(2n+1)=\infty$　　(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+5}{n+1}=2$

練習問題 1.3. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束し，その極限値を $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ とする．このとき

$$b_n=a_{n+1}\qquad(n=1,2,3,\dots)$$

とおけば，$\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$ であることを定義 1.2 に基づいて証明せよ．

発展問題 1.4. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束し，その極限値を $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ とする．このとき，数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有限個の自然数 n を除いて $a_n=b_n$ をみたすとすれば，$\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$ となることを示せ．

2　数列の極限の性質

ここでは高校数学で直感的に認めてきた極限に関する種々の定理について，極限の正確な定義に基づいた証明を与える．この節の内容をより深く理解したい場合には関連図書 [15] を参照すること．

よく知られているように，数列の和および実数倍の極限については次が成り立つ．最初はこの証明を完全に理解しようとせず流し読みをして，次ページの解説と注意を読んでからもう一度証明を読み進めてみることを勧める．

定理 2.1. （数列の和の極限）
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がともに収束するとし，$c \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束し，次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$

証明. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおく．

(1)　任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なので，$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ に対して，ある自然数 $N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ が存在して

$$n \geqq N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \implies |\,a_n - \alpha\,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ より，$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ に対して，ある自然数 $N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ が存在して

$$n \geqq N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \implies |\,b_n - \beta\,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

も成り立つ．そこで，$N(\varepsilon) = \max\left\{N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$ とおけば

$$n \geqq N(\varepsilon) \implies |\,a_n - \alpha\,| < \frac{\varepsilon}{2},\quad |\,b_n - \beta\,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる．よって，$n \geqq N(\varepsilon)$ ならば，三角不等式より

$$|\,(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)\,| = |\,(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)\,| \leqq |\,a_n - \alpha\,| + |\,b_n - \beta\,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が得られる．ゆえに，数列 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$ が成り立つ．

(2)　$c = 0$ のときは両辺とも 0 となり明らかなので，$c \fallingdotseq 0$ とする．

任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なので，$\dfrac{\varepsilon}{|c|} > 0$ に対して，ある自然数 $N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{|c|}\right)$ が存在して

$$n \geqq N_1\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right) \implies |\,a_n - \alpha\,| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

が成り立つ．よって，$N(\varepsilon) = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{|c|}\right)$ とおけば，$n \geqq N(\varepsilon)$ ならば

$$|\,ca_n - c\alpha\,| = |\,c(a_n - \alpha)\,| = |c|\,|\,a_n - \alpha\,| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

が得られる．ゆえに，数列 $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$ が成り立つ．

□

定理 2.1 の意味を考えてみる．(1) についてはどんな小さな許容誤差 $\varepsilon > 0$ を与えられても，それに応じて適切に自然数 $N(\varepsilon)$ をうまく決めれば

$$n \geqq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

とできることを示せばよい．つまり $a_n + b_n$ と $\alpha + \beta$ の誤差を十分大きな番号について一様に ε 未満にできればよいことになる．ここで，a_n と α の誤差および b_n と β の誤差が番号 n を大きくすればいくらでも小さくできることを利用したいが，もし a_n と α，b_n と β の誤差を ε 未満にしてみてもうまくいかない．実際，同じ許容誤差 $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N_1(\varepsilon)$ と $N_2(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geqq N_1(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon, \qquad n \geqq N_2(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |b_n - \beta| < \varepsilon$$

が成り立つ．この両方の不等式を利用したいから，$n \geqq N_1(\varepsilon)$ かつ $n \geqq N_2(\varepsilon)$ とすれば，三角不等式より

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となるが，これでは右辺が最初に設定した許容誤差 ε を超えてしまう．

これは当たり前の話で，誤差は各項ごとに加算・累積されるからである．$a_n + b_n$ と $\alpha + \beta$ **の誤差を見積もるには，a_n と α の誤差と b_n と β の誤差を加えればよい**はずであるから，a_n と α の誤差および b_n と β の誤差を，設定した許容誤差 ε の半分未満に評価しておけばうまくいくと考えられる．そこで，a_n については許容誤差を $\dfrac{\varepsilon}{2}$ として，これに対して自然数 $N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ を

$$n \geqq N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるように選んでおけばよい．b_n についても同様にすれば，a_n と α の誤差および b_n と β の誤差が $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 未満であるから，これらを加えても $a_n + b_n$ と $\alpha + \beta$ の誤差は高々ε となり，証明が上手くいく．これが前ページの証明の背景である．

(2) についても，ca_n と $c\alpha$ **の誤差を見積もるには，a_n と α の誤差を $|c|$ 倍すればよい**（$c > 0$ とは限らないから，絶対値であることに注意）．そこで上と同様の考察を踏まえたものが証明となる．ここまでの解説を読んだ上でもう一度証明を見直してみること．**この内容を理解せずに証明を丸暗記することには何の意味もないので，**数式で表現しようとしている内容に目を向けてそれを把握することを目指すこと．

注意 2.2. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ のどちらかが発散するときには

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

が<u>成り立つとは限らない</u>．例えば

- $a_n = n,\ b_n = 1 - n$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \infty + (-\infty)$$

- $a_n = n^2,\ b_n = -n$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \infty + (-\infty)$$

- $a_n = n,\ b_n = -n^2$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n} - 1\right) = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \infty + (-\infty)$$

となり，右辺は形式的にはすべて $\infty - \infty$ となるが，左辺はいろいろな可能性がある．これより，∞ を文字式のように考えて $\infty - \infty = 0$ と計算してはいけないことがわかる．

定理 2.3. （はさみうちの定理）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立ち，さらに $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

であるとする．このとき，$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束し

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

が成り立つ．

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なので，ある自然数 $N_1(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geqq N_1(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon \qquad\qquad \therefore\ \alpha - a_n < \varepsilon$$

が成り立つ．また，$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ より，ある自然数 $N_2(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geqq N_2(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |b_n - \alpha| < \varepsilon \qquad\qquad \therefore\ b_n - \alpha < \varepsilon$$

も成り立つ．そこで，$N(\varepsilon) = \max\{\, N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon) \,\}$ とおけば

$$n \geqq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad a_n > \alpha - \varepsilon, \quad b_n < \alpha + \varepsilon$$

となる．

よって，$n \geqq N(\varepsilon)$ ならば

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leqq c_n \leqq b_n < \alpha + \varepsilon$$

より

$$-\varepsilon < c_n - \alpha < \varepsilon$$

つまり，$|c_n - \alpha| < \varepsilon$ が得られる．ゆえに，数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し，$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ が成り立つ． □

注意 2.4. 定理の証明からわかるように，ある自然数 n_0 で

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n \qquad (n \geqq n_0)$$

となるものが存在すれば，はさみうち法は適用できる（例えば n が 5 以上なら $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ である場合など）．つまり，必ずしもすべての自然数 n に対して $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ である必要はない．なお，証明についてはその途中で $N(\varepsilon) = \max\{\, N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), n_0 \,\}$ と修正すれば，他の部分は全く同じである．

（余談）

この定理は日本では「はさみうちの原理」と呼ばれることが多い．どうやら高校数学において「証明できないが用いてよい事実と認められている」から“原理”と呼ばれているようである．ただし，英語では squeeze theorem（または pinching theorem や the sandwich theorem）であり，“定理”と呼ばれるのが普通である．第 1 章定義 6.8 でも述べたように，大学数学では（日本に限らず世界的に）補集合の記号で $\overline{A}$ を用いることはまずない．$\overline{A}$ は位相空間論においては A の閉包を，統計学においては A の平均を表す．高校数学の常識が世界的に標準的なものから外れていることはいくつかあるので，そのような事項は必要に応じて新しく知識を上書きしていくこと．

定理 2.5. （数列の極限と大小関係）
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに収束し，さらに

$$a_n \leqq b_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立つとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$$

が成り立つ．

証明. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおき，背理法で証明するため $\alpha > \beta$ であると仮定する．

このとき，正の数を $\varepsilon = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ とおくと，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より，ある自然数 $N_1 = N_1\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ が存在して

$$n \geqq N_1 \quad\Longrightarrow\quad |a_n - \alpha| < \frac{\alpha-\beta}{2}$$

が成り立つ．よって，$n \geqq N_1$ ならば

$$|a_n - \alpha| < \frac{\alpha-\beta}{2} \quad\Longrightarrow\quad \alpha - a_n < \frac{\alpha-\beta}{2} \quad\Longrightarrow\quad a_n > \frac{\alpha+\beta}{2}$$

となる．また，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ より，ある自然数 $N_2 = N_2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ が存在して

$$n \geqq N_2 \quad\Longrightarrow\quad |b_n - \beta| < \frac{\alpha-\beta}{2}$$

が成り立つ．よって，$n \geqq N_2$ ならば

$$|b_n - \beta| < \frac{\alpha-\beta}{2} \quad\Longrightarrow\quad b_n - \beta < \frac{\alpha-\beta}{2} \quad\Longrightarrow\quad b_n < \frac{\alpha+\beta}{2}$$

も成り立つ．そこで，$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおけば，$n \geqq N$ ならば

$$a_n > \frac{\alpha+\beta}{2} > b_n$$

となるが，これは与えられた条件 $a_n \leqq b_n$ に矛盾する．ゆえに，$\alpha \leqq \beta$ が成り立つ． □

注意 2.6. 一見正しそうな次の命題

$$a_n < b_n \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$$

は成り立つとは限らない．むしろ，普通は成り立たないと思っていてもよい．これは簡単な具体例で確認できる．実際，$a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{2}{n}$ とすると，すべての自然数 n に対して $a_n < b_n$ であるが，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$ となる．この例のように，$a_n < b_n$ であるとしても，一般には $\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$ であることしか主張できない．このことからも，極限の議論を直感的なものだけに頼っていると危険なことがわかる．与えられた条件に単純に $\lim_{n\to\infty}$ の記号をつけたものも正しいとは限らないということである．

また，定理の証明からもわかるように，ある自然数 n_0 で

$$a_n \leqq b_n \qquad (n \geqq n_0)$$

となるものが存在すれば，上の定理は適用できる．つまり，必ずしもすべての自然数 n に対して $a_n \leqq b_n$ である必要はない．なお，証明についてはその途中で $N = \max\{N_1, N_2, n_0\}$ と修正すれば，他の部分は全く同じである．

定理 2.7. （数列の積の極限）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がともに収束するならば，数列 $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束し

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

が成り立つ．

証明. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおく．

任意の $\varepsilon > 0$ をとる．極限を考えるので，$0 < \varepsilon < 1 + |\alpha| + |\beta|$ としてもよい．そこで

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|}$$

とおけば，$0 < \varepsilon^* < 1$ である．仮定より，この $\varepsilon^* > 0$ に対して，ある自然数 $N_1(\varepsilon^*)$ と $N_2(\varepsilon^*)$ が存在して

$$n \geqq N_1(\varepsilon^*) \quad \Longrightarrow \quad |\,a_n - \alpha\,| < \varepsilon^*, \qquad n \geqq N_2(\varepsilon^*) \quad \Longrightarrow \quad |\,b_n - \beta\,| < \varepsilon^*$$

が成り立つ．そこで，$N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\}$ とおけば

$$a_nb_n - \alpha\beta = \beta(a_n - \alpha) + \alpha(b_n - \beta) + (a_n - \alpha)(b_n - \beta) \tag{2.1}$$

であるから，$n \geqq N(\varepsilon)$ ならば，三角不等式と $0 < \varepsilon^* < 1$ より

$$\begin{aligned} |\,a_nb_n - \alpha\beta\,| &\leqq |\beta|\,|\,a_n - \alpha\,| + |\alpha|\,|\,b_n - \beta\,| + |\,a_n - \alpha\,|\,|\,b_n - \beta\,| \\ &< |\beta|\,\varepsilon^* + |\alpha|\,\varepsilon^* + {\varepsilon^*}^2 = (|\alpha| + |\beta| + \varepsilon^*)\varepsilon^* < (|\alpha| + |\beta| + 1)\varepsilon^* = \varepsilon \end{aligned}$$

が得られる．ゆえに，数列 $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し，$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \alpha\beta$ が成り立つ． □

積の誤差を見積もるときには注意すること．a_n と α の誤差および b_n と β の誤差が ε 未満だからといって，a_nb_n と $\alpha\beta$ の誤差が高々ε^2 になるとは限らない．上の証明における等式 (2.1)からわかるとおり，a_nb_n と $\alpha\beta$ の誤差は高々$|\alpha|\,\varepsilon + |\beta|\,\varepsilon + \varepsilon^2$ となる．これを踏まえて，最初に許容誤差を $\varepsilon > 0$ としたときに，a_n と b_n の許容誤差を ε^* としたのである．${\varepsilon^*}^2$ の項を上手く処理するために $0 < \varepsilon^* < 1$ となるように設定したが，これは技巧的な部分であり証明の本質には関係ない．

注意 2.8. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ のどちらかが発散するときには

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

が<u>成り立つとは限らない</u>．例えば

- $a_n = n,\ b_n = \dfrac{1}{n}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \cdot 0$$

- $a_n = n^2,\ b_n = \dfrac{1}{n}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \cdot 0$$

- $a_n = n,\ b_n = \dfrac{1}{n^2}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \cdot 0$$

となり，右辺は形式的にはすべて $\infty \cdot 0$ となるが，左辺はいろいろな可能性がある．これより，∞ を文字式のように考えて $\infty \cdot 0 = 0$ や $\infty \cdot 0 = \infty$ と計算してはいけないことがわかる．

定理 2.9. （数列の商の極限）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がともに収束し，さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ とする．このとき，数列 $\displaystyle\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ も収束し

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n}$$

が成り立つ．

証明. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\ (\neq 0)$ とおき，まず $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$ であることを証明する．

任意の $\varepsilon > 0$ をとる．

$$\varepsilon^* = \frac{|\alpha|^2\varepsilon}{1+|\alpha|\varepsilon}$$

とおけば，$\varepsilon^* > 0$ である．仮定より，この $\varepsilon^* > 0$ に対して，ある自然数 $N_1(\varepsilon^*)$ が存在して

$$n \geqq N_1(\varepsilon^*) \quad\Longrightarrow\quad |\,a_n - \alpha\,| < \varepsilon^*$$

が成り立つ．よって，$n \geqq N_1(\varepsilon^*)$ ならば

$$|\alpha| - |a_n| \leqq |\,\alpha - a_n\,| < \varepsilon^* \quad\Longrightarrow\quad |a_n| > |\alpha| - \varepsilon^* = \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|\varepsilon} > 0$$

となる．ゆえに，$N(\varepsilon) = N_1(\varepsilon^*)$ とおけば，$n \geqq N(\varepsilon)$ ならば，$a_n \neq 0$ であり

$$\left|\,\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\,\right| = \left|\,\frac{\alpha - a_n}{a_n\alpha}\,\right| = \frac{|\,\alpha - a_n\,|}{|a_n|\,|\alpha|} < \frac{\varepsilon^*}{\dfrac{|\alpha|}{1+|\alpha|\varepsilon}\,|\alpha|} = \frac{\dfrac{|\alpha|^2\varepsilon}{1+|\alpha|\varepsilon}}{\dfrac{|\alpha|^2}{1+|\alpha|\varepsilon}} = \varepsilon$$

が得られる．ゆえに，数列 $\displaystyle\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$ が成り立つ．

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおけば，定理 2.7 より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\cdot b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\cdot\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{\alpha}\cdot\beta = \frac{\beta}{\alpha}$$

が成り立つ． □

商の場合の誤差評価は複雑である．ここまでの証明と同様に，どのようにして ε^* を決めたかを考えてみよ．

注意 2.10. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ のどちらかが発散するときには

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n}$$

が成り立つとは限らない．例えば，$a_n = n,\ b_n = 2n$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2, \qquad \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{\infty}{\infty}$$

となり，等しくならない．∞ を文字式のように考えて $\dfrac{\infty}{\infty} = 1$ と計算してはいけないことがわかる．

収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は n が十分大きければ極限値の近くに集まっているから，a_n の値がいくらでも大きくなるようなことはないはずである．よって，収束する数列は有界であることが期待され，実際にそれは正しい．ただし，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であるとは，第 2 章定義 2.5 で述べたように，n によらない正の定数 M が存在して

$$|a_n| \leqq M$$

がすべての自然数 n に対して成り立つことである．

定理 2.11. （収束列の有界性）
収束する数列は有界である．

証明. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする．このとき，$\varepsilon = 1$ と選べば，ある自然数 $N = N(1)$ で

$$n \geqq N \quad \Longrightarrow \quad |\, a_n - \alpha\,| < 1$$

となるものが存在する．そこで，n に無関係な正の定数 M を

$$M = \max\{\,|a_1|,\, |a_2|,\, |a_3|,\, \cdots,\, |a_N|,\, |\alpha| + 1\,\}$$

で定める．まず，M の決め方より

$$1 \leqq n \leqq N \quad \Longrightarrow \quad |a_n| \leqq M$$

となる．また，$n \geqq N$ のときは

$$|a_n| = |\,(a_n - \alpha) + \alpha\,| \leqq |\,a_n - \alpha\,| + |\alpha| < 1 + |\alpha| \leqq M$$

が成り立つ．

よって，すべての自然数 n に対して $|a_n| \leqq M$ が成り立つので，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である． □

注意 2.12. 定理 2.11 の証明中で $\varepsilon = 1$ と選んだが，必ずこうしなければならないわけではない．$\varepsilon = 2$ でも $\varepsilon = 0.3$ でも，何か正の数を 1 つ選び固定すればよい．その理由を考えてみよ．

また，定理 2.11 の逆である『数列が有界ならば収束する』という命題は一般に成り立たない．実際，$a_n = (-1)^n$ とすると，$|a_n| \leqq 1$ であるから有界だが，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は振動し発散する．次の例 2.14 を参照せよ．

命題 2.13. α を実数とするとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となるための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$$

となることである．これは $\alpha = \pm\infty$ の場合にも成り立つ．

証明． α が実数の場合を証明する．$\alpha = \pm\infty$ の場合も同様なので，各自で確かめよ．

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geqq N(\varepsilon) \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．そこで，自然数 $N_1(\varepsilon)$ を $N_1(\varepsilon) \geqq \dfrac{N(\varepsilon)+1}{2}$ となるように一つ決める．このとき

$$n \geqq N_1(\varepsilon) \implies 2n-1 \geqq 2N_1(\varepsilon)-1 \geqq N(\varepsilon) \implies |a_{2n-1} - \alpha| < \varepsilon$$

となるので，数列の極限の定義より，$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \alpha$ が成り立つ．また，同様にして

$$n \geqq N_1(\varepsilon) \implies 2n \geqq 2N_1(\varepsilon) \geqq N(\varepsilon) \implies |a_{2n} - \alpha| < \varepsilon$$

となるので，数列の極限の定義より，$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$ も成り立つ．

逆に，$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$ であるとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N_1(\varepsilon)$ と $N_2(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geqq N_1(\varepsilon) \implies |a_{2n-1} - \alpha| < \varepsilon, \qquad n \geqq N_2(\varepsilon) \implies |a_{2n} - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．そこで，$N(\varepsilon) = \max\{\, 2N_1(\varepsilon)-1,\, 2N_2(\varepsilon)\,\}$ とおく．$n \geqq N(\varepsilon)$ とすると，n が奇数，つまり $n = 2k-1$ と表せるときは

$$n = 2k-1 \geqq N(\varepsilon) \geqq 2N_1(\varepsilon)-1 \implies k \geqq N_1(\varepsilon) \implies |a_n - \alpha| = |a_{2k-1} - \alpha| < \varepsilon$$

また，n が偶数，つまり $n = 2k$ と表せるときは

$$n = 2k \geqq N(\varepsilon) \geqq 2N_2(\varepsilon) \implies k \geqq N_2(\varepsilon) \implies |a_n - \alpha| = |a_{2k} - \alpha| < \varepsilon$$

よって，n の偶奇によらず

$$n \geqq N(\varepsilon) \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つから，数列の極限の定義より，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ である． □

これにより，高校で事実だけ習った「ある数列の偶数番目と奇数番目が同じ値 α に収束すれば，その数列は α に収束すること」が証明できた．また，対偶を考えることにより,「ある数列の偶数番目と奇数番目が異なる値に収束（またはどちらかが発散）すれば，その数列は発散する」こともわかる．この事実は具体的な数列の収束・発散の判定に役に立つことがある．

例 2.14. 数列 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ は振動して発散する．

証明． $a_n = (-1)^n$ とおけば，n が偶数と奇数の場合に分けて考えれば

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1$$

となる．よって，命題 2.13 より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は振動して発散する． □

定理 2.15. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限について，次が成り立つ．ただし，$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である必要十分条件は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ である．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ である必要十分条件は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\,a_n - \alpha\,| = 0$ である．

証明.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geqq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |\,a_n - \alpha\,| < \varepsilon$$

が成り立つ．ここで，$n \geqq N(\varepsilon)$ ならば

$$|a_n| = |\,(a_n - \alpha) + \alpha\,| \leqq |\,a_n - \alpha\,| + |\alpha| < \varepsilon + |\alpha|$$

より，$|a_n| - |\alpha| < \varepsilon$ となる．また

$$|\alpha| = |\,(\alpha - a_n) + a_n\,| \leqq |\,\alpha - a_n\,| + |a_n| < \varepsilon + |a_n|$$

より，$|\alpha| - |a_n| < \varepsilon$ も成り立つ．よって

$$n \geqq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |\,|a_n| - |\alpha|\,| < \varepsilon$$

が得られたので，極限の定義より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ となる．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ であることの定義は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geqq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |\,|a_n| - 0\,| < \varepsilon$$

が成り立つことである．ここで，この条件式は

$$|\,|a_n| - 0\,| = |a_n| = |\,a_n - 0\,|$$

より

$$n \geqq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |\,a_n - 0\,| < \varepsilon$$

と同値である．これは $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることの定義だから，結局

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

が成り立つ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，定理 2.1 より $\{a_n - \alpha\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - \alpha) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} \alpha = \alpha - \alpha = 0$$

であるから，(2) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\,a_n - \alpha\,| = 0$ となる．

逆に，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\,a_n - \alpha\,| = 0$ とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n - \alpha) = 0$ である．ここで $a_n = (a_n - \alpha) + \alpha$ であるから，定理 2.1 より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \{(a_n - \alpha) + \alpha\} = \lim_{n\to\infty} (a_n - \alpha) + \lim_{n\to\infty} \alpha = 0 + \alpha = \alpha$$

である．

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |\,a_n - \alpha\,| = 0$ が成り立つ．

□

定理 2.16. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$ である．

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ なので，$\dfrac{1}{\varepsilon} > 0$ に対して，ある自然数 $N_1\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ が存在して

$$n \geqq N_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Longrightarrow \quad a_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

が成り立つ．このとき，$\varepsilon > 0$ より $a_n > 0$ である．よって，$N(\varepsilon) = N_1\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ とおけば，$n \geqq N(\varepsilon)$ ならば

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

が成り立つ．ゆえに，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$ である． □

定理 2.17. 任意の n について $a_n > 0$ を満たし，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$ である．

証明. 任意の $K > 0$ をとる．$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ なので，$\dfrac{1}{K} > 0$ に対して，ある自然数 $N_1\left(\dfrac{1}{K}\right)$ が存在して

$$n \geqq N_1\left(\frac{1}{K}\right) \quad \Longrightarrow \quad 0 < a_n < \frac{1}{K}$$

が成り立つ．よって，$N(K) = N_1\left(\dfrac{1}{K}\right)$ とおけば，$n \geqq N(K)$ ならば

$$\frac{1}{a_n} > K$$

が成り立つ．ゆえに，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$ である． □

定理 2.18. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ とする．

(1) $a_n \leqq b_n \quad (n \in \mathbb{N})$ ならば，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ である．

(2) ある定数 C で $b_n \geqq C$ となるものが存在すれば，$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$ である．

(3) ある正の定数 C で $b_n \geqq C$ となるものが存在すれば，$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$ である．

証明. (1) だけ証明する．他についても同様である．
$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ なので，任意の $K > 0$ に対して，ある自然数 $N(K)$ が存在して，

$$n \geqq N(K) \quad \Longrightarrow \quad a_n > K$$

が成り立つ．$n \geqq N(K)$ ならば

$$b_n \geqq a_n > K$$

となるから，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ である． □

練習問題 2.1. 定理 2.18 (2), (3) を証明せよ．

発展問題 2.2. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a_n \geqq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ をみたすならば

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$$

となることを証明せよ．

3　数列の極限の計算例

3.1　等比数列の極限

命題 3.1. （等比数列の極限）

$a \in \mathbb{R}$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & (a > 1) \\ 1 & (a = 1) \\ 0 & (-1 < a < 1) \end{cases}$$

が成り立つ．また，$a \leqq -1$ のとき，極限 $\lim_{n\to\infty} a^n$ は存在しない．

証明.　場合分けをして証明する（実際にはもっとまとめられるが，丁寧に述べる）．

(i) $a = 0, 1$ のとき

それぞれ $0^n = 0,\ 1^n = 1$ なので，主張は明らかに成り立つ．

(ii) $a > 1$ のとき

$h = a - 1$ とおくと，$h > 0$ である．このとき，二項定理よりすべての自然数 n に対して

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k 1^{n-k} h^k = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k h^k \geqq 1 + {}_n\mathrm{C}_1 h = 1 + nh$$

が成り立つ．さらに，$h > 0$ なので，$\lim_{n\to\infty}(1+nh) = \infty$ から，$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ である．

(iii) $0 < |a| < 1$ のとき

$r = \dfrac{1}{|a|}$ とおくと，$r > 1$ だから (ii) より $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ なので

$$\lim_{n\to\infty} |a^n| = \lim_{n\to\infty} |a|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} = 0$$

となる．よって，$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ である．

(iv) $a = -1$ のとき

$a^n = (-1)^n$ なので，例 2.14 より振動して $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ は存在しない．

(v) $a < -1$ のとき

$R = -a$ とおくと，$R > 1$ であり，(ii) より

$$\lim_{n\to\infty} a^{2n} = \lim_{n\to\infty} (-R)^{2n} = \lim_{n\to\infty} R^{2n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (-R)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (-R^{2n-1}) = -\infty$$

となるので，$\lim_{n\to\infty} a^n$ は存在しない．

□

3.2　高校で既習である数列の極限の復習

以下では高校の数学 III で学習した極限の計算例を紹介する．それぞれの極限を計算するために『なぜそのような式変形を行うのか？』を意識しながら解答例を読むこと．各ケースのテクニックを個別に暗記するだけでは，極限を本質的に理解し計算できるようになるのは難しい．

なお，ε, N を用いた議論は定理の証明などの精密なことには向いているが，具体的な数列の極限を調べるのには不向きである．ここまでに習った定理を自在に適用できるようになるまで練習すること．

例題 3.2.　次の数列の極限を調べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^3-7n^2-9n-4)$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+3n+5}}{n+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2}{2^n+1}$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}+3^n}{4^{n+1}+2^{n+1}}$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,)$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

（解答）

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^3-7n^2-9n-4)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(2-\frac{7}{n}-\frac{9}{n^2}-\frac{4}{n^3}\right)=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}=\frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+3n+5}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}}{1+\dfrac{1}{n}}=\sqrt{2}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(1+\dfrac{2}{3^n}\right)}{2^n\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{1+\dfrac{2}{3^n}}{1+\dfrac{1}{2^n}}=\infty$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}+3^n}{4^{n+1}+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^{n+1}+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{4+2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}=\frac{1}{4}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\,)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

(7)　すべての自然数 n に対して

$$-\frac{1}{n}\leqq\frac{(-1)^n}{n}\leqq\frac{1}{n}$$

が成り立つ．よって，はさみうち法と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

（別解）（0 に収束すると予想できるので）絶対値をとると

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}\quad\longrightarrow\quad 0\qquad(n\to\infty)$$

なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

（解答終）

直接求めるのが難しい場合はある程度極限値の見当をつけてはさみうち法を利用する．

例題 3.3.　次の数列の極限を調べよ．

(1) $\lim_{n\to\infty}(2^n+1)^{1/n}$　(2) $\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{1/n}$　(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

（解答）

(1)　$2^n < 2^n+1 < 2^n+2^n = 2\cdot 2^n$ の両辺の n 乗根をとれば

$$2 < (2^n+1)^{1/n} < 2\cdot 2^{1/n}$$

となる．ここで，$\lim_{n\to\infty} 2\cdot 2^{1/n} = 2$ であるから，はさみうちの定理より $\lim_{n\to\infty}(2^n+1)^{1/n} = 2$ である．

(2)　$3^n < 2^n+3^n < 3^n+3^n = 2\cdot 3^n$ の両辺の n 乗根をとれば

$$3 < (2^n+3^n)^{1/n} < 3\cdot 2^{1/n}$$

となる．ここで，$\lim_{n\to\infty} 3\cdot 2^{1/n} = 3$ であるから，はさみうち法の定理より $\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{1/n} = 3$ である．

(3)　項を書き並べてみると

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n} \leqq \frac{1}{n}$$

となる．よって，はさみうちの定理より $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n} = 0$ である．

（解答終）

例題 3.4.　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-4}{a_n+3} = 1$ をみたすとき，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を調べよ．

（解答）　$b_n = \dfrac{2a_n-4}{a_n+3}$ とおけば，仮定より $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ である．また

$$a_n = \frac{3b_n+4}{2-b_n}$$

であるから，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3b_n+4}{2-b_n} = \frac{3\cdot 1+4}{2-1} = 7$$

となる．

（解答終）

練習問題 3.1.　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty}(2n+3)a_n = 5$ をみたすとき，以下の数列の極限を調べよ．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n$　(2) $\lim_{n\to\infty} na_n$

例題 3.5.　次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を調べよ．

(1) $a_1 = c,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + 1$　　(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$

（解答）

(1)　まず $\alpha = \dfrac{\alpha}{2} + 1$ を解くと，$\alpha = 2$ であるから，漸化式は

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}\left(a_n - 2\right)$$

と変形できる．よって，数列 $\{a_n - 2\}_{n=1}^{\infty}$ は初項 $c-2$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．ゆえに

$$a_n - 2 = (c-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

より，$a_n = \dfrac{c-2}{2^{n-1}} + 2$ となる．したがって，求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{c-2}{2^{n-1}} + 2\right) = 2$$

である．

(2)　まず $\alpha = 2\alpha + 1$ を解くと，$\alpha = -1$ であるから，漸化式は

$$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

と変形できる．よって，数列 $\{a_n + 1\}_{n=1}^{\infty}$ は初項 3，公比 2 の等比数列である．ゆえに

$$a_n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$$

より，$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ となる．したがって，求める極限は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(3 \cdot 2^{n-1} - 1\right) = \infty$$

である．

（解答終）

一般項 a_n を求めることなく，a_n と a_{n+1} を同じ文字でおいた方程式の解を極限値とすることはできない．例えば上の例題 3.5(2) において，以下のような解答は誤りである．

（典型的誤答例）

極限値を $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ とおけば，漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ において $n \to \infty$ として

$$a = 2a + 1$$

となる．これを解いて $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ である．

（誤答例終）

3.3　漸化式から一般項を求めるのが困難な数列の極限　その１

例題 3.6.　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定める．

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = 3 + \frac{4}{a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

このとき，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

（解答）　極限値 $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すると仮定する．このとき，漸化式で $n \to \infty$ として

$$a = 3 + \frac{4}{a}$$

この方程式を解くと

$$a^2 - 3a - 4 = 0 \qquad \therefore\ a = 4,\ -1 \tag{3.1}$$

となる．

ここで，$a_1 = 3 > 0$ と漸化式から $a_n > 0$ は明らかであるが，これは厳密には数学的帰納法を用いて以下のように証明される．

(i) $n = 1$ のとき

$$a_1 = 3 > 0$$

よって，$n = 1$ のとき成り立つ．

(ii) $n = k$ $(k \geqq 1)$ のときに不等式

$$a_k > 0$$

が成り立つと仮定する．このとき

$$a_{k+1} = 3 + \frac{4}{a_k} > 3$$

となる．よって

$$a_{k+1} > 0$$

が成り立つから，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

(i),(ii) より，すべての自然数 n に対して，不等式 $a_n > 0$ が成り立つ．

よって，極限が存在するならば，$a = \lim_{n\to\infty} a_n \geqq 0$ がいえる．ゆえに (3.1) より，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値が存在するならば，その値は $a = 4$ となるしかない．

そこで，$\lim_{n\to\infty} a_n = 4$ であることを証明する．示すべきことは

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - 4| = 0$$

であるから，$a_n - 4$ について考えてみると

$$a_{n+1} - 4 = \left(3 + \frac{4}{a_n}\right) - 4 = \frac{4}{a_n} - 1 = \frac{4 - a_n}{a_n} = -\frac{1}{a_n}(a_n - 4)$$

となり，$a_n > 0$ だから

$$|a_{n+1} - 4| = \frac{1}{a_n}|a_n - 4| \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.2}$$

が成り立つ．

また，$a_n > 0$ より

$$a_{n+1} = 3 + \frac{4}{a_n} > 3 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

であるから，$a_n > 3$ $(n \geqq 2)$ である．ゆえに，$a_1 = 3$ と合わせて

$$a_n \geqq 3 \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.3}$$

となる．

よって，(3.2)，(3.3) より，すべての自然数 n に対して

$$|\,a_{n+1} - 4\,| \leqq \frac{1}{3}\,|\,a_n - 4\,|$$

が成り立つ．この不等式を繰り返し用いると

$$|\,a_n - 4\,| \leqq \frac{1}{3}\,|\,a_{n-1} - 4\,| \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^2 |\,a_{n-2} - 4\,| \leqq \cdots \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} |\,a_1 - 4\,| = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

また，絶対値は 0 以上だから

$$0 \leqq |\,a_n - 4\,| \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

となる．ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうち法より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\,a_n - 4\,| = 0$ となる．したがって，求める極限値は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 4$ である．

（解答終）

一般項のわからない数列の極限値を求めるには，まずその値を予想することが重要となる．そのためには，**とりあえず極限が存在すると仮定して**候補を決定すればよい．このときには a_n と a_{n+1} を a とおいた方程式を解くことになる．

次に、上で解いた方程式の解（例題では $a = 4$ のこと）はまだ極限値の候補に過ぎないので，極限が実際にその値となることを証明する必要がある．ここでは一般項 a_n が求まっていないので，極限を調べる際の基本的な道具のはさみうち法の利用を考える．そこで，まずは

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |\,a_n - a\,| = 0$$

であることを思い出すと，$|\,a_n - 4\,|$ を 1 つのかたまりとみて，$|\,a_{n+1} - 4\,|$ と $|\,a_n - 4\,|$ の関係を調べればよいことになる．$a_n - 4$ ではなく $|\,a_n - 4\,|$ を考えるのは，絶対値は常に 0 以上なので，はさむものの片方がすぐわかるからである．また，符号を気にせず議論できるという利点もある．

なお，求めた極限値の候補がいつも極限値となるとは限らない．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が ∞ に発散する，振動して極限値をもたないなどの例も多く存在する．『数列は普通は収束するはずだ』という考えや思い込みはもたないこと．

本筋とは関係ないが一応補足しておくと，実はこの例題の一般項は

$$a_n = \frac{4^{n+1} + (-1)^n}{4^n - (-1)^n} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

と求めることができる．詳細は省略するが，適切な定数 a と b に対して $y_n = \dfrac{a_n - a}{a_n - b}$ とおき，y_n のみたす漸化式を考えれよい．ここでは $a = 4,\ b = -1$（またはこの逆）とすれば，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が等比数列となりうまくいくことがわかる．この a や b の値はもちろん (3.1) で求めたものである．

3.4 多項式，指数関数，階乗などの増加速度の比較

一般項が次で与えられる数列

$$n, \quad n^2, \quad n^3, \quad \sqrt{n}, \quad 2^n, \quad 3^n, \quad n!$$

などはすべて $n \to \infty$ で ∞ に発散する．その増加速度を比較する方法を知っておけば，$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形の極限が求めやすくなる．

例題 3.7. 次の数列の極限を調べよ．ただし，$r > 1$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{r^n}$

（解答）

(1) $n \geqq 4$ ならば

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{2}{n} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{n} = \frac{4}{n} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (n\to\infty)$$

なので，はさみうち法より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$ となる．

(2) $h = r - 1$ とおけば，$h > 0$ である．よって，$n \geqq 2$ ならば

$$r^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k h^k > {}_n\mathrm{C}_2 h^2 = \frac{n(n-1)}{2}\,h^2$$

より

$$0 < \frac{n}{r^n} < \frac{2}{(n-1)h^2}$$

が成り立つ．ゆえに，はさみうち法より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{r^n} = 0$ が成り立つ．

（解答終）

毎回このようにはさみうち法で考えるのは大変だが，次の定理が知られている．

定理 3.8. $0 \leqq a < 1$ とするとき，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$ を満たすならば

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

が成り立つ．

証明． $\gamma = \dfrac{a+1}{2}$ とおくと，$a < 1$ より $0 \leqq a < \gamma < 1$ である．よって，正の数 $\varepsilon = \gamma - a$ に対して，ある自然数 $N = N(\gamma - a)$ が存在して

$$n \geqq N \quad \Longrightarrow \quad \left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - a\right| < \gamma - a$$

が成り立つ．ここで，$n \geqq N$ ならば

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - a \leqq \left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - a\right| < \gamma - a \quad \Longrightarrow \quad |a_{n+1}| < \gamma|a_n|$$

となる．ゆえに，$n > N$ のときにこの不等式を繰り返し用いて

$$0 \leqq |a_n| < \gamma|a_{n-1}| < \gamma^2|a_{n-2}| < \cdots < \gamma^{n-N}|a_N|$$

であり，$0 < \gamma < 1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\gamma^{n-N}|a_N| = 0$ となるから，はさみうちの定理より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

が得られる． □

例題 3.9. $a \in \mathbb{R},\ r > 1,\ \alpha > 0$ とすると，次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{r^n} = 0$$

（解答） $a = 0$ ならば明らかだから，$a \neq 0$ とする．$a_n = \dfrac{a^n}{n!}$ とおくと

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|a|^n} = \frac{|a|}{n+1} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (n \to \infty)$$

であるから，定理 3.8 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

同様に $b_n = \dfrac{n^\alpha}{r^n}$ とおくと，$b_n > 0$ であり

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{r^{n+1}} \cdot \frac{r^n}{n^\alpha} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{r} \qquad (n \to \infty)$$

となるから，$0 < \dfrac{1}{r} < 1$ と定理 3.8 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ である．

（解答終）

これより，増加速度に関しては多項式，指数関数，階乗の順番で速くなることがわかる．ただし，これらは一般的な話であって，より複雑な極限については定理 3.8 などを用いればよい．

例題 3.10. 次の数列の極限を調べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^{10}}{3^n + n^{10}}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n!}{3^n + n!}$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$

（解答）

(1) 例題 3.9 より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{3^n} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^{10}}{3^n + n^{10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{n^{10}}{3^n}}{1 + \dfrac{n^{10}}{3^n}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

となる．

(2) 例題 3.9 より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n!}{3^n + n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^n}{n!} + 1}{\dfrac{3^n}{n!} + 1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

となる．

(3) $a_n = \dfrac{n!}{2^{n^2}}$ とおけば，$a_n > 0$ である．また，例題 3.9 より

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{n!} = \frac{n+1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{4^n} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (n \to \infty)$$

なので，定理 3.8 より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^{n^2}} = 0$ である．

（解答終）

4　級数

定義 4.1. （級数）

(1)　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各項を形式的に $+$ でつないだ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のつくる級数といい，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と表す．

(2)　第 n 項までの和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を第 n **部分和**という．数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するか発散するかに応じて，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束**するまたは**発散**するという．部分和が収束する場合に $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ を級数の**和**といい，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ と書く．また，$\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ となる場合にも，それぞれ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$ で表す．

注意 4.2.　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ という記号は『形式的な和』と『収束級数の和の値』と 2 つの意味をもちうる．

命題 4.3. （無限等比級数）　$a \neq 0$ とする．

(1) $|r| < 1$ のとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は収束し，その和は $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}$ である．

(2) $|r| \geqq 1$ のとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は発散する．

証明.　第 n 部分和 S_n を計算すれば

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \\ an & (r = 1) \end{cases}$$

である．よって，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための必要十分条件は「$r \neq 1$ かつ極限値 $\lim_{n\to\infty} r^n$ が存在する」ことである．ゆえに，$|r| < 1$ のときに級数は収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

□

定理 4.4. （収束する級数の和）

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するならば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ も収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

が成り立つ．

証明.　$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,\ T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ とおく．第 n 部分和をそれぞれ S_n および T_n とおけば

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha S_n + \beta T_n \quad \longrightarrow \quad \alpha S + \beta T \qquad (n \to \infty)$$

であるから，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ は収束し，その和は $\alpha S + \beta T$ である．　□

例題 4.5.　次の級数の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$　　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^{2n}}$

（解答）

(1)　第 n 部分和を $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ とおく．

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
 & S_n = & \frac{1}{2} & + & \frac{2}{2^2} & + & \frac{3}{2^3} & + & \cdots & + & \frac{n}{2^n} & & \\
-) & \frac{1}{2}S_n = & & & \frac{1}{2^2} & + & \frac{2}{2^3} & + & \cdots & + & \frac{n-1}{2^n} & + & \frac{n}{2^{n+1}} \\
\hline
 & \frac{1}{2}S_n = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2^2} & + & \frac{1}{2^3} & + & \cdots & + & \frac{1}{2^n} & - & \frac{n}{2^{n+1}}
\end{array}
$$

であるから

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$$

より，$S_n = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$ となる．ここで，$a_n = \dfrac{n+2}{2^n}$ とおけば，$a_n > 0$ で

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+3}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n+2} = \frac{n+3}{2(n+2)} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} \qquad (n \to \infty)$$

となる．よって，定理 3.8 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるから，級数は収束する．その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (2 - a_n) = 2$$

である．

(2)　第 n 部分和を $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{4^k}$ とおく．$n \geqq 2$ ならば

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
 & S_n = & \frac{2}{4} & + & \frac{5}{4^2} & + & \frac{8}{4^3} & + & \cdots & + & \frac{3n-1}{4^n} & & \\
-) & \frac{1}{4}S_n = & & & \frac{2}{4^2} & + & \frac{5}{4^3} & + & \cdots & + & \frac{3n-4}{4^n} & + & \frac{3n-1}{4^{n+1}} \\
\hline
 & \frac{3}{4}S_n = & \frac{2}{4} & + & \frac{3}{4^2} & + & \frac{3}{4^3} & + & \cdots & + & \frac{3}{4^n} & - & \frac{3n-1}{4^{n+1}}
\end{array}
$$

であるから

$$\frac{3}{4}S_n = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{16}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{4}} - \frac{3n-1}{4^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4^n} - \frac{3n-1}{4^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{3n+3}{4^{n+1}}$$

より，$S_n = 1 - \dfrac{n+1}{4^n}$ となる．ここで，$a_n = \dfrac{n+1}{4^n}$ とおけば，$a_n > 0$ で

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n+1} = \frac{n+2}{4(n+1)} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{4} \qquad (n \to \infty)$$

となる．よって，定理 3.8 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるから，級数は収束する．その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^{2n}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 - a_n) = 1$$

である．

（解答終）

例題 4.6.　次の級数の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$　　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3}$

（解答）

(1)　部分分数分解すれば

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

であるから，第 n 部分和 S_n は

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

となる．よって，級数は収束して，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

である．

(2)　部分分数分解すれば

$$\frac{1}{4n^2+4n-3}=\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

であるから，第 n 部分和 S_n は $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+3}\right)\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\cancel{\frac{1}{2n-5}}-\cancel{\frac{1}{2n-1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2n-3}}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)\end{aligned}$$

となる．よって，級数は収束して，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)\right\}=\frac{1}{3}$$

である．

（解答終）

級数の和を計算するだけなら，部分和 S_n を整理する必要は特にない．例えば (2) では

$$S_n=\frac{1}{3}-\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)}$$

となるが，極限値が最も明確なのは解答の形である．

収束する級数については次が成り立つ．

定理 4.7. **（級数が収束する必要条件）**

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば， $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束しないならば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

証明. (2) は (1) の対偶命題であるから，(1) を示せばよい．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとし，その第 n 部分和を S_n，級数の和を S とおけば

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

が成り立つ． □

例題 4.8. 次の級数の収束・発散を調べよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{n^3+1}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

（解答）

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n^3}} = 2\ (\fallingdotseq 0)$ であるから， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{n^3+1}$ は発散する．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$ は存在しないから， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ は発散する．

(3) 分母を有理化すれば

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

であるから，第 n 部分和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \sqrt{n+1}-1$$

となる．よって，級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-1) = \infty$$

より発散する．

（解答終）

注意 4.9. **（定理 1.2 の逆について）**

定理 1.2 の逆の命題『$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する』は偽である．例題 4.8(3) の級数の第 n 項については

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0$$

である．よって，これは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ だが，級数は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ と発散する例の 1 つである．

級数の和を求める際には，うまく階差の形に変形することが必要なことが多い．

例題 4.10.　次の級数の和を求めよ．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

（解答）

(1)　第 n 項を変形すると

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

と分解できるから，第 n 部分和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right) + \cdots + \left\{ \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

となる．よって，級数は収束して，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)!} \right\} = 1$$

である．

(2)　第 n 項を変形すると

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

と分解できるから，第 n 部分和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

となる．よって，級数は収束して，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1$$

である．

（解答終）

練習問題 4.1.　$a_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$ とおく．

(1) すべての自然数 n に対して，$a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$ が成り立つことを示せ．

(2) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$ の値を求めよ．

5　有界な単調数列

これまでは主に一般項を求めることができる数列の極限を扱ってきた．しかし，応用上は漸化式から一般項の具体的な形を求めることは困難なことが多い．そこでここでは，ある特別な性質を満たす数列に対して一般項を求めることなく極限を求める方法を扱う．その手法において最も重要なことは，いかにして極限が収束することを証明するかということである．その際に，以前出てきた『実数の連続性』がキーポイントとなる．

5.1　単調数列の定義

定義 5.1.（単調数列）

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**単調増加**であるとは，すべての自然数 n に対して，

$$a_n \leqq a_{n+1}$$

が成り立つことである．特に，すべての自然数 n に対して，

$$a_n < a_{n+1}$$

が成り立つとき，**狭義単調増加**であるともいう．

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**単調減少**であるとは，すべての自然数 n に対して，

$$a_n \geqq a_{n+1}$$

が成り立つことである．特に，すべての自然数 n に対して，

$$a_n > a_{n+1}$$

が成り立つとき，**狭義単調減少**であるともいう．

(3) 単調増加または単調減少な数列をまとめて**単調数列**という．

注意 5.2.　用語の使い方は本によって異なるので注意すること．

- $a_n < a_{n+1}$ の場合を単調増加と呼び，$a_n \leqq a_{n+1}$ の場合を広義単調増加と呼ぶこともある．
- $a_n < a_{n+1}$ の場合を単調増加と呼び，$a_n \leqq a_{n+1}$ の場合を単調非減少と呼ぶこともある．

例 5.3.　単調数列であることは強い特徴である．ほとんどの数列は単調増加でも単調減少でもない．例えば

$$a_n = 2n+5, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}, \qquad c_n = (-3)^n, \qquad d_n = 2$$

とおくと

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は狭義単調増加である．
- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は狭義単調減少である．
- $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調数列ではない．
- $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ は定義から単調増加であり，かつ単調減少でもあるが，狭義単調増加・狭義単調減少ではない．

練習問題 5.1.　次の各数列は単調数列であるかどうか調べよ．

$$a_n = -2n+3, \qquad b_n = n^2+4n-3, \qquad c_n = (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right), \qquad d_n = 3\cdot 2^n - 1$$

5.2　有界な単調数列の収束性

次の定理がこの章において最も重要な定理である．

定理 5.4. （有界な単調数列の収束性）

(1) 上に有界な単調増加数列は収束する．

(2) 下に有界な単調減少数列は収束する．

証明.　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界な単調増加数列の場合を証明する．下に有界な単調減少数列についても証明は同様である．

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界だから，公理 3.1（実数の連続性）より上限が存在するので，それを α とおく．上限は上界の一つなので，すべての自然数 n に対して $a_n \leqq \alpha$ となる．

任意の $\varepsilon > 0$ をとる．上限は上界の最小値であるから $\alpha - \varepsilon$ は α より小さいので，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界ではない．よって，ある自然数 $N(\varepsilon)$ で

$$\alpha - \varepsilon < a_{N(\varepsilon)}$$

となるものが存在する．ゆえに，$n \geqq N(\varepsilon)$ ならば，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加なことも用いると

$$\alpha - \varepsilon < a_{N(\varepsilon)} \leqq a_n \leqq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

より，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．よって，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し，$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ となる．□

この定理の証明により，上に有界な単調増加数列はその上限に収束することがわかる．ただ，一般項のわからない数列の上限を求めることは，極限を求めることよりも難しいので，応用上はその事実を使う機会はほとんどない．とにかく上に有界な単調増加数列は収束するという保証が大事なのである．また，この定理は極限値があることは主張しているが，その具体的な求め方については一切言及していない．そこで，次にこの定理を応用した極限の求め方について例を挙げておく．

なお，定理の証明からわかるように必ずしもすべての自然数 n に対して $a_n \leqq a_{n+1}$ とならなくてもよい．例えば，ある自然数 n_0 で

$$a_n \leqq a_{n+1} \qquad (n \geqq n_0)$$

となるものが存在すれば，この定理は適用できる．つまり，ある番号から先で単調数列ならばよい．

例題 5.5. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とおくとき，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する．

証明. 二項定理より

$$\begin{aligned} a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．

ここで，括弧の中はすべて 1 より小さいから

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

であり，さらに第 1 章補題 7.1 より，$n! \geqq 2^{n-1}$ が成り立つから

$$a_n \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

よって，$a_n < 3$ がすべての自然数 n に対して成り立つので，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である．

また，$0 < 1 - \dfrac{j}{n} < 1 - \dfrac{j}{n+1}$ $(1 \leqq j \leqq n-1)$ であるから

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ &< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\ &< 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) = a_{n+1} \end{aligned}$$

より，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は狭義単調増加数列である．

したがって，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列なので収束する． □

定義 5.6. **（Napier 数）**

例題 5.5 の極限値を

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

とおき，これを **Napier 数（ネイピア数）** という．上記の議論と $a_1 = 2$ から $2 < e \leqq 3$ であることがわかるが，その近似値は

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \fallingdotseq 2.718281828$$

であることが知られている．第 5 章では微分法を用いて，この事実を確認する．

ネイピア数は利子の複利計算において，離散的な量から極限をとって連続量としたときに現れる．歴史的な経緯はさまざまな資料に記載されているので，なぜ上のような a_n を考えるのか気になる場合は調べてみるとよい．

例題 5.7.　次の数列の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

（解答）

(1)　$m=2n$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m/2}=\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^{1/2}=e^{1/2}=\sqrt{e}$$

(2)　$n\geqq 2$ に対して

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

と変形できる．そこで，$m=n-1$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right)=e\cdot 1=e$$

である．よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$ となる．

(3)　数列の一般項は

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\left(\frac{n+2}{n}\right)^n=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

と変形できる．そこで，$m=n+1$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-1}=e\cdot 1=e$$

である．よって

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\cdot e=e^2$$

（解答終）

（注意）上の例題で (2) で $m=-n$ とおいて

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\lim_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e$$

とすることは（現段階では）できない．なぜならば，これは $m\to-\infty$ だから e の定義 $e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ と異なることによる．(3) で $m=\dfrac{n}{2}$ とおいて

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m}=e^2$$

とすることも（現段階では）できない．なぜならば，$n=1,2,3,4,5,6,\ldots$ のときに，$m=\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2},2,\dfrac{5}{2},3,\ldots$ と変化するから，これは通常の数列の極限とはならず，$e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が適用できないからである．

練習問題 5.2.　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

発展問題 5.3.　定理 5.4 のみを用いて，アルキメデスの公理（第 2 章命題 3.2）を直接証明せよ．

5.3　漸化式から一般項を求めるのが困難な数列の極限　その２

例題 5.8.　次の漸化式で定義された数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある．

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

この数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束・発散について調べ，収束するときはその極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(解説)　この漸化式から一般項 a_n を求めることはできない．このような場合にはまず極限値の候補について考える必要がある．まずは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束すると仮定してみると，漸化式で $n \to \infty$ として

$$\alpha = \sqrt{\alpha + 6} \qquad \therefore\ \alpha = 3$$

であるから，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ の候補は 3 となる．ただし，これはまだ候補に過ぎないので,『数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束すること』を示す必要がある．そこで，定理 5.4 の利用を考える．これは『上に有界な単調増加数列は収束する』または『下に有界である単調減少数列は収束する』という主張であるから，実際に数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がこの仮定をみたすことを示せば，収束することが証明できたことになる．そうすれば，最初に述べた計算が正当化され，求める極限値の候補だった 3 が答えとなる．しかし，例えば数列が上に有界であることを示すためには，定数 M で

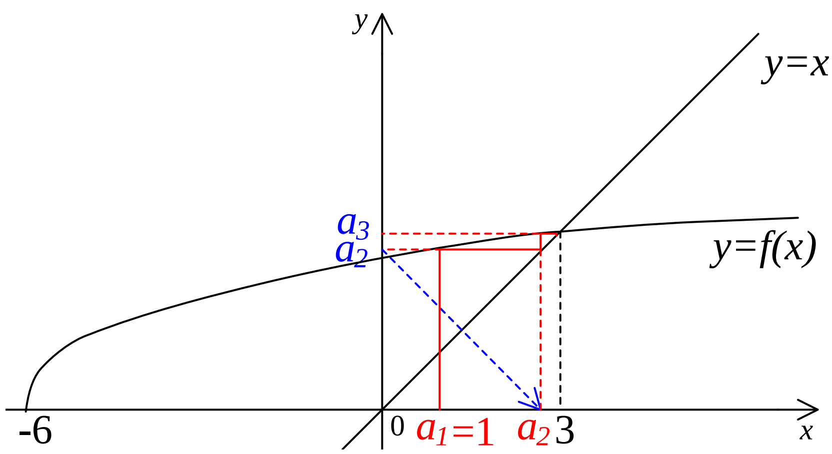
$$a_n \leqq M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

となるものを見つけなければならず，これを漸化式から推察するのは難しい．

そこで，次に

$$f(x) = \sqrt{x + 6}$$

とおけば，$a_{n+1} = f(a_n)$ であることに注目する．このことを利用して，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の様子を調べる．



まず $a_1 = 1$ であるから，$a_2 = f(a_1)$ より，a_2 の y 軸上の位置は上図のようになる．これを直線 $y = x$ に関して折り返せば，青色の矢印のように a_2 は x 軸上に移る．次に $a_3 = f(a_2)$ であるから，a_3 の y 軸上の位置は上図のようになる．これを繰り返せば，a_n は赤線のように動いていくことになる．これより，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加で，さらに $a_n \leqq 3$ であり，最終的に 3 に収束すると考えられる．

そこで，上の考察を式にまとめると次の解答のようになる．

（解答）　数学的帰納法を用いて，$a_n \leqq 3$ であることを証明する．

(i) $n=1$ のとき，$a_1 = 1 \leqq 3$ であるから成り立つ．

(ii) $n=k$ $(k \geqq 1)$ のときに，不等式
$$a_k \leqq 3$$
が成り立つと仮定する．このとき，漸化式と関数 $y=\sqrt{x+6}$ の単調増加性より
$$a_{k+1} = \sqrt{a_k+6} \leqq \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$$
が成り立つから，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i),(ii) より，すべての自然数 n について，$a_n \leqq 3$ が成り立つ．よって，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である．

次に，すべての自然数 n に対して
$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n+6} - a_n = \frac{a_n+6-{a_n}^2}{\sqrt{a_n+6}+a_n} = -\frac{(a_n+2)(a_n-3)}{\sqrt{a_n+6}+a_n}$$
となる．ここで，$a_1 = 1 > 0$ と $a_{n+1} = \sqrt{a_n+6}$ より，帰納的に $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ となるから，前の結果と合わせて
$$0 < a_n \leqq 3 \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$
である．よって
$$a_n + 2 > 0, \qquad 3 - a_n \geqq 0, \qquad \sqrt{a_n+6}+a_n > 0$$
となるので
$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n+2)(3-a_n)}{\sqrt{a_n+6}+a_n} \geqq 0$$
が成り立つ．ゆえに，すべての自然数 n に対して
$$a_n \leqq a_{n+1}$$
が成り立つから，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である．

以上より，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列なので収束する．そこで，極限値を $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とおくと，$a_1 \leqq a_n \leqq 3$ より，$1 \leqq \alpha \leqq 3$ である．このとき，漸化式
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n+6}$$
において，$n \to \infty$ とすると
$$\alpha = \sqrt{\alpha+6}$$
となる．この両辺を 2 乗すると
$$\alpha^2 = \alpha + 6 \qquad \therefore\ (\alpha-3)(\alpha+2) = 0$$
よって，$1 \leqq \alpha \leqq 3$ より，$\alpha = 3$ である．したがって，求める極限値は $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ となる．

（解答終）

例題 5.9. 次の漸化式で定義された数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある．

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 3\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

この数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束・発散について調べ，収束するときはその極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

（解説） この漸化式から一般項 a_n を求めることはできないので，まず極限値の候補をさがしてみる．そこで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束すると仮定してみると，漸化式で $n \to \infty$ として

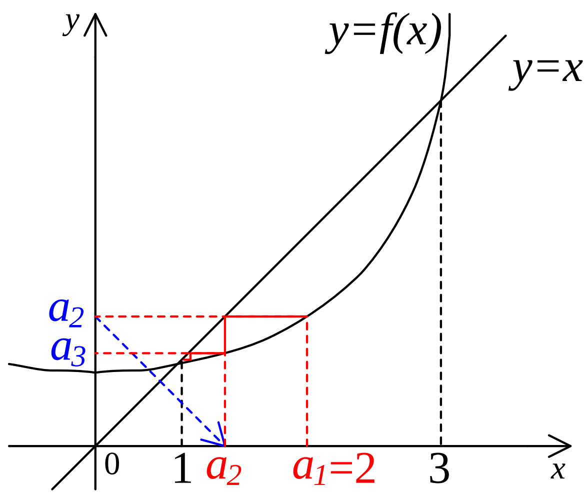
$$\alpha = \frac{\alpha^2 + 3}{4} \qquad \therefore\ (\alpha - 1)(\alpha - 3) = 0$$

であるから，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ の候補は 1 または 3 となる．この段階ではまだどちらが極限値となるかはわからないし，これはまだ候補に過ぎないから,『数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束すること』を示す必要がある．

そこで，次に

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{4}$$

とおけば，$a_{n+1} = f(a_n)$ であることに注目する．このことを利用して，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の様子を調べる．



まず $a_1 = 2$ であるから，$a_2 = f(a_1)$ より，a_2 の y 軸上の位置は上図のようになる．これを直線 $y = x$ に関して折り返せば，青色の矢印のように a_2 は x 軸上に移る．次に $a_3 = f(a_2)$ であるから，a_3 の y 軸上の位置は上図のようになる．これを繰り返せば，a_n は赤線のように動いていくことになる．これより，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少，かつ $a_n \geqq 1$ であり，最終的に 1 に収束すると考えられる．

上の考察はグラフを用いた直観的なものだから数式で示さなければならない．もし $a_n \geqq 1$ が示されたとして，単調減少を示そうとしてみると

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 3}{4} - a_n = \frac{1}{4}\left(a_n^2 - 4a_n + 3\right) = \frac{1}{4}(a_n - 1)(a_n - 3)$$

となる．ここで，$a_n \geqq 1$ を示しておけば $a_n - 1 \geqq 0$ であるが，$a_n - 3$ の符号がわからない．ここでグラフでの考察を振り返ると $a_n \leqq 3$ となりそうだから，まとめて $1 \leqq a_n \leqq 3$ を最初から示しておけばうまくいきそうである．

そこで，上の考察を式にまとめると次の解答のようになる．

（解答）　数学的帰納法を用いて，$1 \leqq a_n \leqq 3$ であることを証明する．

(i) $n=1$ のとき，$a_1=2$ より，$1 \leqq a_1 \leqq 3$ であるから成り立つ．

(ii) $n=k\ (k \geqq 1)$ のときに，不等式

$$1 \leqq a_k \leqq 3$$

が成り立つと仮定する．このとき，漸化式と関数 $y=\dfrac{x^2+3}{4}$ の $x \geqq 0$ での単調増加性より

$$a_{k+1}=\frac{a_k^2+3}{4} \geqq \frac{1^2+3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$a_{k+1}=\frac{a_k^2+3}{4} \leqq \frac{3^2+3}{4}=\frac{12}{4}=3$$

より $1 \leqq a_{k+1} \leqq 3$ が成り立つから，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i),(ii) より，すべての自然数 n について，$1 \leqq a_n \leqq 3$ が成り立つ．よって，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である．

次に，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^2+3}{4}-a_n=\frac{1}{4}\left(a_n^2-4a_n+3\right)=\frac{1}{4}\left(a_n-1\right)\left(a_n-3\right)$$

となる．ここで，前の結果より

$$1 \leqq a_n \leqq 3$$

であるから

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}\left(a_n-1\right)\left(a_n-3\right) \leqq 0$$

が成り立つ．ゆえに，すべての自然数 n に対して

$$a_n \geqq a_{n+1}$$

が成り立つから，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少である．

以上より，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列なので収束する．そこで，極限値を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ とおくと，$1 \leqq a_n \leqq a_1$ より，$1 \leqq \alpha \leqq 2$ である．このとき，漸化式

$$a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(a_n^2+3\right)$$

において，$n \to \infty$ とすると

$$\alpha=\frac{\alpha^2+3}{4} \qquad \therefore\ (\alpha-1)(\alpha-3)=0$$

よって，$1 \leqq \alpha \leqq 2$ より，$\alpha=1$ である．したがって，求める極限値は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=1$ となる．

（解答終）

もちろんすべての数列が単調数列というわけではないから，この手法でいつも解決できるわけではない．その場合には例題 3.6 のようにはさみうち法で考えることになる．

そこでこの例題 5.8 の別解の概略を挙げておく．

（別解）　極限値 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すると仮定する．このとき，漸化式

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$$

で $n \to \infty$ として

$$\alpha = \sqrt{\alpha + 6} \qquad \therefore\ \alpha = 3$$

なので，極限値の候補は 3 である．

以下，$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ であることを証明する．

$$a_{n+1} - 3 = \sqrt{a_n + 6} - 3 = \frac{(a_n + 6) - 9}{\sqrt{a_n + 6} + 3} = \frac{a_n - 3}{\sqrt{a_n + 6} + 3}$$

より，$\sqrt{a_n + 6} + 3 \geqq 3$ だから

$$|\,a_{n+1} - 3\,| = \frac{|\,a_n - 3\,|}{\sqrt{a_n + 6} + 3} \leqq \frac{1}{3}\,|\,a_n - 3\,|$$

となる．この不等式を繰り返し用いると

$$|\,a_n - 3\,| \leqq \frac{1}{3}\,|\,a_{n-1} - 3\,| \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^2 |\,a_{n-2} - 3\,| \leqq \cdots \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} |\,a_1 - 3\,| = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

より

$$0 \leqq |\,a_n - 3\,| \leqq 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

が成り立つ．ゆえに，はさみうち法より

$$\lim_{n\to\infty} |\,a_n - 3\,| = 0$$

であるから，求める極限値は $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ となる．

（別解終）

この解法は簡単そうに見えるが，もし極限値 $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在したと仮定したときに，漸化式で $n \to \infty$ として得られる a についての方程式が複数個解をもつと，そのうちのどれが適するかの判定が難しいことがある．もし複数個の解をもつならば，実数の連続性を利用した前の解答のようにグラフを描いて考察することになる．

例題 5.10. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は以下の条件を満たすとする．

$$0 < b_1 < a_1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

このとき，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに収束し，その極限値は等しいことを示せ．

（解答） まず，$0 < b_1 < a_1$ と漸化式から，数学的帰納法により

$$a_n > 0, \qquad b_n > 0$$

である．よって，相加相乗平均より

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geqq \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1}$$

となり，$a_n \geqq b_n$ がすべての自然数 n について成り立つ．ゆえに，すべての自然数 n に対して

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a_n - b_n}{2} \geqq 0$$

より，$a_n \geqq a_{n+1}$ が成り立つから，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少である．また，$a_n \geqq 0$ であるから，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界である．

したがって，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列なので収束する．そこで，その極限値を $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とおくと，漸化式より $b_n = 2a_{n+1} - a_n$ だから

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (2a_{n+1} - a_n) = 2\alpha - \alpha = \alpha$$

が得られる．よって，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は同じ値に収束する．

（解答終）

この問題では極限値の具体的な予想ができないので,『有界な単調数列は収束する』という事実に頼るしかない．このような抽象的な論法に慣れておくと，直感的に正しそうなことを数学的に厳密に議論できるようになる．

練習問題 5.4. 次の漸化式で定まる数列の極限を求めよ．

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 8} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

練習問題 5.5. 次の漸化式で定まる数列の極限を求めよ．

$$a_1 = \frac{3}{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^3 + 6}{7} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

練習問題 5.6. 次の漸化式で定まる数列の極限を求めよ．

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{4a_n - {a_n}^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

発展問題 5.7. 次の漸化式で定まる数列の極限を求めよ．

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

5.4　区間縮小法

実数の連続性に関する性質として，次の定理が成り立つ．

定理 5.11. （区間縮小法）
閉区間の列 $I_n = [a_n, b_n]$ が $I_{n+1} \subset I_n$ $(n \in \mathbb{N})$ をみたすならば，すべての I_n に含まれる実数が存在する．つまり，I_n の共通部分を

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \text{すべての自然数}\, n \,\text{に対して}\, x \in I_n \,\}$$

とおけば，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

が成り立つ．さらに，$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ をみたすならば，共通部分は

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$$

とただ 1 点からなり，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ である．

証明.　条件 $I_{n+1} \subset I_n$ より，$a_n \leqq a_{n+1} < b_{n+1} \leqq b_n$ となるので

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1} < b_{n+1} \leqq b_n \leqq \cdots \leqq b_2 \leqq b_1$$

が成り立つ．よって，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列なので，定理 5.4 よりこれらは収束する．そこで

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

とおくと，任意の自然数 n に対して $a_n < b_n$ なので，定理 2.5 より

$$a \leqq b$$

が成り立つ．さらに，$a = \sup a_n$，$b = \inf b_n$ であるから

$$a_n \leqq a \leqq b \leqq b_n$$

となるので，$X = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b \,\}$ とおけば，$X \subset I_n$ が任意の自然数 n に対して成り立つから

$$\emptyset \neq X \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

が成り立つ．

さらに条件 $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ が成り立つとすると，まず $a = b$ である．また，c を $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ の任意の元とすると，すべての自然数 n に対して

$$a_n \leqq c \leqq b_n$$

となるから，はさみうち法より，$a = b = c$ となる．ゆえに

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

が成り立つ．　□

6　数列に関する発展的内容

6.1　数列の極限に関するさまざまな公式

ここでは数列の極限に関するさまざまな公式を紹介する．

定理 6.1. （チェザロ平均）
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束し，その極限値を $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とするとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

が成り立つ．これは $a = \pm\infty$ の場合にも成り立つ．

証明． 任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より，正の数 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ に対して，ある自然数 $N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ が存在して

$$n \geqq N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．また，三角不等式より，$n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &= \left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right| \\
&\leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k - a| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1(\varepsilon/2)} |a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1(\varepsilon/2)+1}^{n} |a_k - a| \\
&< \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1(\varepsilon/2)} |a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1(\varepsilon/2)+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1(\varepsilon/2)} |a_k - a| + \frac{n - N_1(\varepsilon/2)}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1(\varepsilon/2)} |a_k - a| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

となる．ここで，$M_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N_1(\varepsilon/2)} |a_k - a|$ とおけば，これは ε には依存するが n にはよらない定数である．よって

$$N(\varepsilon) = \max\left\{ N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \left[\frac{2M_\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1 \right\}$$

とおけば，$n > N(\varepsilon)$ ならば，上で示した不等式より

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| < \frac{M_\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

が成り立つ． □

この定理 6.1 の逆である

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

は一般には成り立たない．そのことを示す代表例は $a_n = (-1)^n$ であり，実際

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0$$

であるが，$\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在しない．これは，数列 $a_n = (-1)^n$ は発散するが，その "平均" は 0 であることを意味していると考えられる．

$\sqrt[n]{n}$ のように ∞^0 の形の不定形については次が知られている．

命題 6.2. （有名な極限公式）

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

証明. $h_n = \sqrt[n]{n} - 1$ とおくと，$n \geqq 2$ のとき，$h_n > 0$ である．また，二項定理より

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, h_n^k \geqq {}_n\mathrm{C}_2\, h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\, h_n^2$$

より

$$0 < h_n \leqq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

が成り立つので，はさみうち法より $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ となる．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + h_n) = 1$$

が成り立つ． □

例題 6.3. 極限値 $\lim_{n\to\infty} (n^2 + 1)^{1/n}$ を求めよ．

（解答） $1 < n^2 + 1 \leqq n^2 + n^2 = 2n^2$ の両辺の n 乗根をとれば

$$1 < (n^2 + 1)^{1/n} \leqq (2n^2)^{1/n} = 2^{1/n}\, \sqrt[n]{n}^{\,2}$$

となる．ここで

$$\lim_{n\to\infty} 2^{1/n}\, \sqrt[n]{n}^{\,2} = 1 \cdot 1^2 = 1$$

であるから，はさみうち法より $\lim_{n\to\infty} (n^2 + 1)^{1/n} = 1$ となる．

（解答終）

定理 6.4. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束し，その極限値を $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とするとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{1 + 2 + 3 + \cdots + n} = a$$

が成り立つ．

証明. 証明は演習問題とする．ポイントとなる不等式は

$$\left| \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{1 + 2 + 3 + \cdots + n} - a \right| = \left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + n(a_n - a)}{1 + 2 + 3 + \cdots + n} \right| \leqq \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k|a_k - a|$$

である． □

発展問題 6.1. 定理 6.1 を利用して，次が成り立つことを示せ．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = a$ を満たすならば，次が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a$$

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a_n > 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ であるならば

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$$

が成り立つ．これは $a = \infty$ の場合にも成り立つ．

発展問題 6.2. 定理 6.4 を証明せよ．

6.2 Bolzano-Weierstrass の定理

ここから先の節ではやや発展的な内容について触れる．抽象的な事柄が多いので理解するのは難しいかもしれないが，最初のうちはそれほど気にしなくてもよい．

定義 6.5. （部分列）
自然数 n_k を項とする狭義単調増加数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ をとる．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ をその**部分列**という．

例 6.6. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\}$ に対して，例えば

$$\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots\}$$
$$\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots\}$$
$$\{a_{n^2}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots\}$$

は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列である．

定理 6.7. （収束する数列の部分列の極限）
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束するならば，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ も a に収束する．

証明. 証明は演習問題とする． □

前に述べたように有界な数列は収束するとは限らない．例えば，例 2.14 で $a_n = (-1)^n$ は有界であるが振動して発散することを示した．この数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列として $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ を考えると

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

となるから，$\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する．一方，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の別の部分列として $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ を考えると

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1$$

となるから，$\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ も収束する．ここで，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するから，2 個の収束する部分列 $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値が一致するとは限らない．

有界な数列はうまく部分列を選べば収束するようにできることが知られている．

定理 6.8. （Bolzano − Weierstrass の定理）
有界な数列は，収束する部分列をもつ．

証明. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を有界な数列とする．このとき，ある実数 m_1 と M_1 で

$$m_1 < M_1, \qquad m_1 \leqq a_n \leqq M_1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

となるものが存在する．ここで，$c_1 = \dfrac{m_1 + M_1}{2}$ とおけば，2 つの閉区間 $[m_1, c_1]$ と $[c_1, M_1]$ の少なくともどちらか一方には無限個の a_n が含まれる．もし $[m_1, c_1]$ に無限個の a_n が含まれるときには

$$m_2 = m_1, \qquad M_2 = c_1$$

とおく．もしそうでなければ（$[m_1, c_1]$ に無限個の a_n が含まれない，つまりこのときには $[c_1, M_1]$ に無限個の a_n が含まれる）には

$$m_2 = c_1, \qquad M_2 = M_1$$

とおく．

区間を 2 等分して無限個の a_n が含まれる区間を選ぶという操作を繰り返して，数列 $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$m_1 \leqq m_2 \leqq \cdots \leqq m_n \leqq m_{n+1} \leqq \cdots \leqq M_{n+1} \leqq M_n \leqq \cdots \leqq M_2 \leqq M_1$$

となるように構成することができる．また，その構成法より

$$M_{n+1} - m_{n+1} = \frac{M_n - m_n}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が成り立っているから

$$M_n - m_n = \frac{M_1 - m_1}{2^{n-1}} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (n \to \infty)$$

より

$$\lim_{n\to\infty} (M_n - m_n) = 0$$

である．ゆえに，$I_n = [m_n, M_n]$ とおけば，これは定理 5.11（区間縮小法）の仮定をみたしている．したがって，ある実数 c に対して

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} M_n = c$$

が成り立つ．

そこで，各閉区間 I_n には無限個の $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の項が含まれていたから，自然数 n_k を項とする狭義単調増加数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ を，各自然数 k に対して

$$a_{n_k} \in I_k$$

となるように選ぶことができる．このとき

$$m_k \leqq a_{n_k} \leqq M_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

であるから，はさみうち法より $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = c$ となる．よって，部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束するから，題意は示された． □

練習問題 6.3.　次の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることを示し，収束する部分列を 1 つ具体的に選べ．

(1) $a_n = (-1)^n \dfrac{n+2}{n}$　　(2) $a_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$

練習問題 6.4.　定理 6.7 を証明せよ．

発展問題 6.5.　定理 6.8 のみを用いて，アルキメデスの公理（第 2 章命題 3.2）を直接証明せよ．

6.3 Cauchy 列

数列の収束性に関して，次の重要な概念がある．

定義 6.9. （Cauchy 列）
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在し，$m \geqq N(\varepsilon)$, $n \geqq N(\varepsilon)$ を満たす任意の自然数 m と n に対して，$|\,a_m - a_n\,| < \varepsilon$ が成り立つ』とき，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は **Cauchy 列**であるという．

Cauchy 列とは n が大きくなると 1ヶ所に密集してくるようなものである．そのため，次が成り立つ．

補題 6.10. （Cauchy 列の有界性）
Cauchy 列は有界である．

証明． $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であるとする．Cauchy 列の定義で特に $\varepsilon = 1$ とすれば，ある自然数 $N = N(1)$ が存在して

$$m \geqq N, \quad n \geqq N \quad \Longrightarrow \quad |\,a_m - a_n\,| < 1$$

が成り立つ．よって，$n \geqq N$ ならば

$$|\,a_{N+1} - a_n\,| < 1 \qquad \therefore\ |a_n| < 1 + |\,a_{N+1}\,|$$

となる．ゆえに，n に無関係な定数 M を

$$M = \max\{\,|a_1|,\ |a_2|,\ |a_3|,\ \ldots,\ |a_N|,\ 1 + |a_{N+1}|\,\}$$

とおけば，上で示したことよりすべての自然数 n に対して

$$|a_n| \leqq M$$

が成り立つ．したがって，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である． □

実数からなる数列については，次の顕著な性質がある．

定理 6.11. （実数の完備性）
数列が収束するための必要十分条件は，Cauchy 列であることである．

証明． 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に収束するとする．任意の $\varepsilon > 0$ をとる．このとき，$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ に対して，ある自然数 $N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ が存在して

$$n \geqq N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad |\,a_n - \alpha\,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．よって，$N(\varepsilon) = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ とおけば，$m \geqq N(\varepsilon)$, $n \geqq N(\varepsilon)$ ならば

$$|\,a_m - a_n\,| \leqq |\,a_m - \alpha\,| + |\,\alpha - a_n\,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となるので，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である．

逆に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であるとする．このとき，補題 6.10 より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界なので，定理 6.8（Bolzano-Weierstrass の定理）より，収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．そこで

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$$

とおく．
任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列なので，$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ に対して，ある自然数 $N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ が存在して

$$m \geqq N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad n \geqq N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad |\,a_m - a_n\,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．この同じ $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ に対して，ある自然数 $K\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ が存在して

$$k \geqq K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad |a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

も成り立つ．ここで，自然数 k_0 を $k_0 \geqq K\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ かつ $n_{k_0} > N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ をみたすように 1 つとり固定する．このとき，$N(\varepsilon) = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ とおけば，$n \geqq N(\varepsilon)$ ならば

$$|a_n - \alpha| \leqq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となるから，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束する． □

定理 6.11 から，数列が収束するかどうかは Cauchy 列であるか判定すればよいことになる．ここで Cauchy 列の定義を見ると，極限値はどこにも現れていない．つまり，**極限値の候補がわからなくても，Cauchy 列であることが示せれば収束列である**ということになる．これが定理 6.11 の最も重要なポイントである．

練習問題 6.6. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がともに Cauchy 列ならば，数列 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ も Cauchy 列であることを（定理 6.11 を用いずに直接定義から）示せ．

発展問題 6.7. 定数 $0 < r < 1$ に対して，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqq r|a_{n+1} - a_n| \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

をみたすならば，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列であることを示せ．

発展問題 6.8. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geqq n_0 \quad \Longrightarrow \quad |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$$

をみたすとする．この条件だけでは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であるとは限らない．このことを示すような例を考えよ．

6.4 実数の連続性再び

第 2 章で「実数の連続性」として，第 2 章公理 3.1 を挙げたが，これはその主張から上限定理と呼ばれていると紹介した．実はこの上限定理は定理 6.11（実数の完備性）と第 2 章命題 3.2（アルキメデスの公理）を仮定すると導く事ができる．なお，この 2 つの主張（実数の完備性とアルキメデスの公理）の証明には上限定理を用いていることに注意せよ．

定理 6.12. （上限定理）
定理 6.11（実数の完備性）と第 2 章命題 3.2（アルキメデスの公理）が成り立つと仮定すれば，$\mathbb{R}$ の空でない上に有界な部分集合は上限が存在する．

証明. $X \subset \mathbb{R}$ を空でない上に有界な集合とする．このとき，X の上界の集合は空集合ではないので，X の上界の元 b_1 を 1 つとる．

また，$a_1 \in X$ を 1 つとる．もし a_1 が任意の $x \in X$ に対して $x \leqq a_1$ をみたすならば，a_1 が X の上限である．そこで，a_1 が X の上界の元でない場合を考える．このとき，$c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ とおく．次に，c_1 が X の上界ならば $a_2 = a_1,\ b_2 = c_1$ と，X の上界でなければ $a_2 = c_1,\ b_2 = b_1$ とおく．同様に，区間 $[a_n, b_n]$ を 2 等分し，中点が X の上界かどうかでその一方を選んでいく．このとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加列，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少列であるから，$m > N,\ n > N$ ならば

$$|a_m - a_n| \leqq b_N - a_N = \frac{b_1 - a_1}{2^{N-1}} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (N \to \infty)$$

となるので，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である．ここで，$\dfrac{1}{2^n} \to 0\ (n \to \infty)$ となるのはアルキメデスの公理と $2^n \geqq n$ による．同様に $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ も Cauchy 列なので，これらは収束する．さらに，上式より $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ であるから，極限値は等しくなるので

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

とおける．ここで，a_n と b_n の決め方より，すべての自然数 n に対して，a_n は X の上界ではなく，b_n は X の上界である．よって，任意の $x \in X$ に対して

$$x \leqq b_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

であるから，$n \to \infty$ として $x \leqq a$ が成り立つ．ゆえに，a は X の上界である．また，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ より

$$a - \varepsilon < a_m < a$$

となる自然数 m が存在するので，a_m は上界でないから $a - \varepsilon$ も上界ではない．したがって，a は X の上界の最小値であるから，X の上限である． □

ここまでの議論より，つぎの条件はすべて同値であることがわかる．

(1) 第 2 章公理 3.1（上限定理）

(2) 定理 5.4（有界な単調数列の収束性）

(3) 定理 5.11（区間縮小法）と第 2 章命題 3.2（アルキメデスの公理）

(4) 定理 6.8（Bolzano-Weierstrass の定理）

(5) 定理 6.11（実数の完備性）と第 2 章命題 3.2（アルキメデスの公理）

つまり，この中のどれか 1 つから議論をスタートさせればよいので，今回は上限定理を始点とした．そのような教科書が多いように感じるのは，上限定理が一番主張がスマートだからかもしれない．これらはすべて実数の連続性と呼ばれる性質であり，有理数と実数の最大の相違点である．他にも同値な条件は多いので興味があれば厚めの数学書を参考してほしい．ただし，ここから先では特にそのことを知らなくても実は問題はない．

第4章　関数の極限

この章では関数の極限について直感に頼らない正確な定義を与え，その性質を紹介する．議論の多くの部分は数列の極限に関するものと同様なので，一部の証明・説明は省略する．また，連続関数の概念を学び，その性質について調べる．高校数学では「連続関数」という名前だけであまり深くは学習しないが，これまで証明なしに認めてきた「中間値の定理」などの定理についても証明を与えることができるようになる．

1　関数の極限

1.1　関数の極限の定義

定義 1.1. （関数の極限：$x \to a$ の場合）

関数 $f(x)$ は少なくとも点 a の近傍から点 a を除いたところでは定義されているとする．

実数 α が『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して，$0 \fallingdotseq |x-a| < \delta(\varepsilon)$ をみたす任意の x について $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ をみたす』とき，関数 $f(x)$ の点 a での**極限値**は α であるといい

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \qquad (x \to a)$$

で表す．このとき，関数 $f(x)$ は点 a で α に**収束**するという．

一方，関数 $f(x)$ が点 a でどのような実数 α にも収束しないとき**発散**するという．さらに,『任意の $K > 0$ に対して，ある $\delta(K) > 0$ が存在して，$0 \fallingdotseq |x-a| < \delta(K)$ をみたす任意の x について $f(x) > K$ をみたす』とき，$f(x)$ は点 a で ∞ に発散するといい

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

で表す．また,『任意の $K < 0$ に対して，ある $\delta(K) > 0$ が存在して，$0 \fallingdotseq |x-a| < \delta(K)$ をみたす任意の x について $f(x) < K$ をみたす』とき，$f(x)$ は点 a で $-\infty$ に発散するといい

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

で表す．

注意 1.2.　この定義を大雑把に述べると『関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ がある一定の値 α に近づくときに，$f(x)$ は点 a で α に収束する』ということである．

定義 1.3. （関数の極限：$x \to \infty$ の場合）

関数 $f(x)$ は少なくともある c に対して区間 (c, ∞) で定義されているとする．

実数 α が『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $L(\varepsilon)$ が存在して，$x > L(\varepsilon)$ をみたす任意の x について $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ をみたす』とき，関数 $f(x)$ の $x \to \infty$ での**極限値**は α であるといい

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \qquad (x \to \infty)$$

で表す．このとき，関数 $f(x)$ は $x \to \infty$ で α に**収束**するという．

一方，関数 $f(x)$ が $x \to \infty$ でどのような実数 α にも収束しないとき**発散**するという．さらに,『任意の $K > 0$ に対して，ある $L(K)$ が存在して，$x > L(K)$ をみたす任意の x について $f(x) > K$ をみたす』とき，$f(x)$ は $x \to \infty$ で ∞ に発散するといい

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

で表す．また,『任意の $K < 0$ に対して，ある $L(K)$ が存在して，$x > L(K)$ をみたす任意の x について $f(x) < K$ をみたす』とき，$f(x)$ は $x \to \infty$ で $-\infty$ に発散するといい

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

で表す．

$x \to -\infty$ の極限についても同様に定義する．

この章では断りがなければ a は実数とし，$x \to a$ のときの極限について主に説明することにする．実際には $x \to \pm\infty$ のときにもほぼ同じような性質が成り立つ．この点について毎回注意で述べることにする．

例 1.4. $p, q \in \mathbb{R}$ で $p \neq 0$ であるとき，$\lim_{x \to a}(px+q) = pa+q$ となる．

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{|p|} > 0$ とおくと，$0 \neq |x-a| < \delta(\varepsilon)$ となる任意の x に対して

$$|(px+q)-(pa+q)| = |p||x-a| < |p|\,\delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

が成り立つから，極限の定義より $\lim_{x \to a}(px+q) = pa+q$ である． □

例 1.5. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ $(x \neq 1)$ とするとき，$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ となる．

証明. $x \to 1$ の極限を考えるから，定義より x は 1 とは異なる値をとりながら 1 に近づく．よって，$x \neq 1$ で考えればよく，そのとき

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

であるから

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

となる． □

この例のように，極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ を考えるときには点 a が関数 $f(x)$ の定義域に入っているかどうかは全く関係がない．また，点 a で定義できたとしても，一般には $f(a)$ の値とも無関係である．

例 1.6. $a > 0$ とするとき，$\lim_{x \to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$ となる．

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(\varepsilon) = \sqrt{a}\,\varepsilon > 0$ とおくと，$0 \neq |x-a| < \delta(\varepsilon)$ となる任意の $x \geqq 0$ に対して

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leqq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta(\varepsilon)}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

が成り立つから，極限の定義より $\lim_{x \to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$ である． □

実は $a = 0$ のときにも，$\lim_{x \to 0}\sqrt{x} = 0$ のようなことが成り立つが，$x = 0$ が関数 $f(x) = \sqrt{x}$ の定義域の端点のため，まだ極限が定義されていない．このような場合には**片側極限（右極限）**を考えることになる．

練習問題 1.1. 次の極限が成り立つことを $\varepsilon - \delta$ 論法で確かめよ．

(1) $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$　　(2) $\lim_{x \to 2}(2x^2-3x+1) = 3$　　(2) $\lim_{x \to \infty}\dfrac{1}{x} = 0$

1.2 関数の極限の性質

定理 1.7. （関数の極限と数列の極限の関係）
a と α を実数とする．このとき，$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ となる必要十分条件は，$\lim_{n\to\infty} a_n=a,\ a_n\neq a$ を満たす任意の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha$ となることである．
$a=\pm\infty$，$\alpha=\pm\infty$ のときにも，これと同様の主張が成り立つ．

証明. $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ とする．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon)>0$ が存在して

$$0\neq|x-a|<\delta(\varepsilon) \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

が成り立つ．ここで，$\lim_{n\to\infty} a_n=a,\ a_n\neq a$ を満たす任意の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとると，上で決めた $\delta(\varepsilon)>0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して

$$n\geqq N(\varepsilon) \quad\Longrightarrow\quad 0\neq|a_n-a|<\delta(\varepsilon)$$

が成り立つ．よって

$$n\geqq N(\varepsilon) \quad\Longrightarrow\quad 0\neq|a_n-a|<\delta(\varepsilon) \quad\Longrightarrow\quad |f(a_n)-\alpha|<\varepsilon$$

となるから，$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha$ である．

逆に $\lim_{n\to\infty} a_n=a,\ a_n\neq a$ を満たす任意の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha$ が成り立つとする．このとき，$\lim_{x\to a} f(x)\neq\alpha$ と仮定して矛盾を導く．$x\to a$ で $f(x)$ が α に収束しないので，ある $\varepsilon_0>0$ が存在して，任意の $\delta>0$ に対して，ある x で

$$0\neq|x-a|<\delta, \qquad |f(x)-\alpha|\geqq\varepsilon_0$$

を満たすものが存在する．
任意の自然数 n をとり，上式で $\delta=\dfrac{1}{n}$ としたときの x を a_n とおく．このとき

$$0\neq|a_n-a|<\frac{1}{n}, \qquad |f(a_n)-\alpha|\geqq\varepsilon_0$$

となるので

$$|a_n-a|<\frac{1}{n} \quad\longrightarrow\quad 0 \qquad (n\to\infty)$$

より，はさみうち法から $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ となる．したがって，$\lim_{n\to\infty} a_n=a,\ a_n\neq a$ をみたすので，仮定より $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha$ が成り立つ．ゆえに，ある自然数 $N(\varepsilon_0)$ が存在して

$$n\geqq N(\varepsilon_0) \quad\Longrightarrow\quad |f(a_n)-\alpha|<\varepsilon_0$$

となるが，a_n の決め方からすべての自然数 n に対して $|f(a_n)-\alpha|\geqq\varepsilon_0$ であったので，これは矛盾である．したがって，$\lim_{x\to a} f(x)\neq\alpha$ が成り立つ． □

この定理から関数の極限と数列の極限が結び付いたので，これらは似たような性質をもつことがわかる．

定理 1.8. （関数の極限の性質）

関数 $f(x)$ と $g(x)$ が $x \to a$ のとき収束するとする（$a = \pm\infty$ でもよい）．このとき，極限値を

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \beta$$

とおけば，次が成り立つ．

(1) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to a} \{\lambda f(x) + \mu g(x)\} = \lambda\alpha + \mu\beta$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

(3) $\beta \neq 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a} |f(x)| = |\alpha|$

証明. 仮定と定理 1.7 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \neq a$ を満たす任意の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} g(a_n) = \beta$$

が成り立つから，第 3 章定理 2.1 より

$$\lim_{n\to\infty} \{\lambda f(a_n) + \mu g(a_n)\} = \lambda\alpha + \mu\beta$$

となる．よって，再び定理 1.7 より $\displaystyle\lim_{x\to a} \{\lambda f(x) + \mu g(x)\} = \lambda\alpha + \mu\beta$ が成り立つ．

他の主張の証明も同様である． □

このように，関数の極限を定理 1.7 を用いて数列の極限に直すことにより，第 3 章で証明した数列の極限に関する性質と同様のものが関数の極限についても成り立つことがわかる．証明は同じような議論の繰り返しになるので省略する．

定理 1.9. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が $x \to a$ のとき収束するとする．このとき，ある $\delta > 0$ に対して

$$f(x) \leqq g(x) \qquad (x \in U_\delta(a),\ x \neq a)$$

が成り立つならば

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqq \lim_{x\to a} g(x)$$

が成り立つ．

$a = \pm\infty$ のときも同様の主張が成り立つ．

定理 1.10. （はさみうち法）

関数 $f(x)$ と $g(x)$ が $x \to a$ のとき収束し，さらに

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \alpha$$

とする．このとき，関数 $h(x)$ がある $\delta > 0$ に対して

$$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x) \qquad (x \in U_\delta(a),\ x \neq a)$$

をみたすならば，$h(x)$ も $x \to a$ のとき収束し，$\displaystyle\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$ が成り立つ．

$a = \pm\infty$ のときも同様の主張が成り立つ．

定理 1.11. （合成関数の極限）
点 a の近傍で定義された関数 $f(x)$ が $\lim_{x\to a} f(x) = b$ をみたし，さらに点 $y = b$ の近傍で定義された関数 $g(y)$ が $\lim_{y\to b} g(y) = g(b)$ をみたすならば，合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ の極限について $\lim_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = g(b)$ が成り立つ．

証明． 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta_1(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$0 < |\,y - b\,| < \delta_1(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |\,g(y) - g(b)\,| < \varepsilon$$

が成り立つ．ここで，$y = b$ のときにも当然 $|\,g(y) - g(b)\,| = 0 < \varepsilon$ は成り立つから，これは

$$|\,y - b\,| < \delta_1(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |\,g(y) - g(b)\,| < \varepsilon$$

と書くことができる．
さらに，$\lim_{x\to a} f(x) = b$ だから，上の $\delta_1(\varepsilon) > 0$ に対して，ある $\delta_2(\delta_1(\varepsilon)) > 0$ が存在して

$$0 < |\,x - a\,| < \delta_2(\delta_1(\varepsilon)) \quad \Longrightarrow \quad |\,f(x) - b\,| < \delta_1(\varepsilon)$$

が成り立つ．よって，$\delta(\varepsilon) = \delta_2(\delta_1(\varepsilon))$ とおけば

$$0 < |\,x - a\,| < \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |\,f(x) - b\,| < \delta_1(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |\,g(f(x)) - g(b)\,| < \varepsilon$$

となり，$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$ が成り立つ． □

注意 1.12. 一般に『$\lim_{x\to a} f(x) = b,\ \lim_{y\to b} g(y) = \beta \implies \lim_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = \beta$』が成り立つとは限らない．
例えば，$a = 0$ とし

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x} \qquad (x \neq 0), \qquad g(y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{|y|} & (y \neq 0) \\ 1 & (y = 0) \end{cases}$$

とする．このとき，$x \neq 0$ ならば

$$|f(x)| = \left| x \sin\frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin\frac{1}{x} \right| \leqq |x| \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (x \to 0)$$

であるから，$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ となる．よって，上の記号で $b = 0$ である．また，$y \neq 0$ ならば

$$g(y) = \frac{y^2}{|y|} = \frac{|y|^2}{|y|} = |y| \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (y \to 0)$$

より，$\lim_{y\to 0} g(y) = 0$ となる．よって，上の記号で $\beta = 0$ である．

次に，極限 $\lim_{x\to 0} g\bigl(f(x)\bigr)$ について考える．まず $a_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ とおくと

$$f(a_n) = a_n \sin\frac{1}{a_n} = a_n \sin 2n\pi = 0 \qquad \therefore\ g\bigl(f(a_n)\bigr) = g(0) = 1$$

より，$\lim_{n\to\infty} g\bigl(f(a_n)\bigr) = 1$ となる．次に $b_n = \dfrac{1}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi}$ とおくと

$$f(b_n) = b_n \sin\frac{1}{b_n} = b_n \sin\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi = b_n \qquad \therefore\ g\bigl(f(b_n)\bigr) = g(b_n) = |b_n|$$

より，$\lim_{n\to\infty} g\bigl(f(b_n)\bigr) = 0$ となる．
ゆえに，0 に収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\lim_{n\to\infty} g\bigl(f(a_n)\bigr) \neq \lim_{n\to\infty} g\bigl(f(b_n)\bigr)$ であるから，定理 1.7 より極限 $\lim_{x\to 0} g\bigl(f(x)\bigr)$ は存在しない．したがって，特に $\lim_{x\to 0} g\bigl(f(x)\bigr) \neq \beta$ となっている．

数列の極限に関する定理として，Cauchy 列の収束定理があった．この主張の関数の極限版は以下のようになる．

定理 1.13. （Cauchy の収束判定法）
極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在するための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して，

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon), \qquad 0 < |y - a| < \delta(\varepsilon)$$

をみたす任意の x と y に対して，$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つことである．

証明. 極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在するとし，その極限値を α とおく．任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon^*) > 0$ が存在して

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon^*) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon^*$$

が成り立つ．よって，$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon^*)$, $0 < |y - a| < \delta(\varepsilon^*)$ ならば

$$|f(x) - f(y)| \leqq |f(x) - \alpha| + |\alpha - f(y)| < \varepsilon^* + \varepsilon^* = \varepsilon$$

が成り立つ．

逆に，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon), \ 0 < |y - a| < \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{1.1}$$

が成り立つとする．ここで，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_n \neq a, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = a \tag{1.2}$$

をみたすような任意の数列とする．このとき，上で与えた $\delta(\varepsilon) > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geqq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a| < \delta(\varepsilon)$$

が成り立つ．よって，$m \geqq N(\varepsilon)$, $n \geqq N(\varepsilon)$ ならば

$$0 < |a_m - a| < \delta(\varepsilon), \qquad 0 < |a_n - a| < \delta(\varepsilon)$$

であるから，仮定 (1.1)より

$$|f(a_m) - f(a_n)| < \varepsilon$$

となる．ゆえに，数列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である．したがって，極限 $\lim_{n \to \infty} f(a_n)$ は存在する．

後は定理 1.7 を適用するために，(1.2)をみたす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ をどう決めても極限 $\lim_{n \to \infty} f(a_n)$ がすべて同じ値であることを示せばよい．そこで，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を (1.2)をみたすような任意の数列とする．このとき，上の議論より極限値を

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \alpha, \qquad \lim_{n \to \infty} f(b_n) = \beta$$

とおける．ここで，新しい数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $c_{2n-1} = a_n$, $c_{2n} = b_n$ とおけば，第 3 章命題 2.13 より，数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ も条件 (1.2)をみたす．よって，再び上の議論より極限 $\lim_{n \to \infty} f(c_n)$ が存在するから，その極限値を γ とおく．すると，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ の奇数番目の項を並べたものだから，もう一度第 3 章命題 2.13 より $\alpha = \gamma$ であり，同様に $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ についても $\beta = \gamma$ となるから，$\alpha = \beta$ である．したがって，定理 1.7 より，極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ は存在し，その極限値はこの一定値 α である． □

練習問題 1.2. 定理 1.8 の残り，および定理 1.9 と定理 1.10 を証明せよ．定理 1.7 を用いてもよいし，直接 $\varepsilon - \delta$ 論法で示してもよい．

1.3　高校で既習である関数の極限の復習

そのままでは $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ などの形になってしまうものを不定形という．このような極限を計算するためには「不定形になる原因」に注目し，不定形を解消する式変形が必要となる．

例題 1.14.　次の関数の極限を調べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+3x+2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+7x+4}{2x+5}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3-4x^2-5x-6)$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+2}-x)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+2x}+3x)$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

（解答）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{1}{4}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=2$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+7x+4}{2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+7+\dfrac{4}{x}}{2+\dfrac{5}{x}}=-\infty$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3-4x^2-5x-6)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)=-\infty$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+2}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+2}{\sqrt{x^2-x+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$

(7)　$t=-x$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であり

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+2x}+3x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{9t^2-2t}-3t)=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{9t^2-2t}+3t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{9-\dfrac{2}{t}}+3}=-\frac{1}{3}$$

(8)　すべての実数 x に対して，$-1\leqq\sin x\leqq1$ が成り立つから，$x>0$ ならば

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqq\frac{1}{x}$$

が成り立つ．ここで

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

であるから，はさみうち法より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

（解答終）

1.4　右極限・左極限

数直線上で点 a に近づく方法は，本質的には右から近づくか左から近づくかしかない．普段は両方を考えないといけないが，場合によってはこのどちらかだけを考えると便利なこともある．

定義 1.15.（右極限）
関数 $f(x)$ は少なくとも開区間 $(a, a+\varepsilon_0)$ で定義されているとする．
実数 α が『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して，$a < x < a + \delta(\varepsilon)$ をみたす任意の x について $|\, f(x) - \alpha\,| < \varepsilon$ をみたす』とき，関数 $f(x)$ の点 a での**右極限**は α であるといい

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \qquad (x \to a+0)$$

で表す．
一方,『任意の $K > 0$ に対して，ある $\delta(K) > 0$ が存在して，$a < x < a + \delta(K)$ をみたす任意の x について $f(x) > K$ をみたす』とき，$f(x)$ の点 a での右極限は ∞ に発散するといい

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$$

で表す．また,『任意の $K < 0$ に対して，ある $\delta(K) > 0$ が存在して，$a < x < a + \delta(K)$ をみたす任意の x について $f(x) < K$ をみたす』とき，$f(x)$ の点 a での右極限は $-\infty$ に発散するといい

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty$$

で表す．

定義 1.16.（左極限）
関数 $f(x)$ は少なくとも開区間 $(a-\varepsilon_0, a)$ で定義されているとする．
実数 α が『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して，$a - \delta(\varepsilon) < x < a$ をみたす任意の x について $|\, f(x) - \alpha\,| < \varepsilon$ をみたす』とき，関数 $f(x)$ の点 a での**左極限**は α であるといい

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \qquad (x \to a-0)$$

で表す．
一方,『任意の $K > 0$ に対して，ある $\delta(K) > 0$ が存在して，$a - \delta(K) < x < a$ をみたす任意の x について $f(x) > K$ をみたす』とき，$f(x)$ の点 a での左極限は ∞ に発散するといい

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty$$

で表す．また,『任意の $K < 0$ に対して，ある $\delta(K) > 0$ が存在して，$a - \delta(K) < x < a$ をみたす任意の x について $f(x) < K$ をみたす』とき，$f(x)$ の点 a での左極限は $-\infty$ に発散するといい

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty$$

で表す．

右極限・左極限について，特に $a = 0$ のときには $\displaystyle\lim_{x \to 0+0} f(x)$ を $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$ と，$\displaystyle\lim_{x \to 0-0} f(x)$ を $\displaystyle\lim_{x \to -0} f(x)$ と表すことにする．$a \neq 0$ のときには，このような略記はできない．

この定義を大雑把に述べると『関数 $f(x)$ において，x が数直線上を右側から a に限りなく近づくとき，$f(x)$ がある一定の値 α に近づくときに，$f(x)$ の点 a での右極限を α と呼ぶ』ということである．もちろん，x を左側から a に近づけたものが左極限である．

注意 1.17. 右極限・左極限についても，これまでに関数の極限の性質として述べた定理 1.7，1.8，1.9，1.10，1.13 などと同様の定理が成り立つ．証明はほとんど同じなので省略する．

例題 1.18. 次の片側極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}$， $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{x}{|x|}$， $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{x}{|x|}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\sqrt{x}$

（解答）

(1) 任意の $K>0$ に対して，$\delta_1(K)=\dfrac{1}{K}>0$ とおく．このとき，$1<x<1+\delta_1(K)$ ならば

$$\frac{1}{x-1}>\frac{1}{\delta(K)}=K$$

が成り立つから，$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=+\infty$ である．

次に，任意の $K<0$ に対して，$\delta_2(K)=-\dfrac{1}{K}>0$ とおく．このとき，$1-\delta_2(K)<x<1$ ならば

$$\frac{1}{x-1}<-\frac{1}{\delta_2(K)}=K$$

が成り立つから，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$ である．

(2) $x>0$ のときには，$\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{x}{x}=1$ であるから

$$\lim_{x\to +0}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to +0}1=1$$

$x<0$ のときには，$\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{x}{-x}=-1$ であるから

$$\lim_{x\to -0}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to -0}(-1)=-1$$

(3) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta(\varepsilon)=\varepsilon^2>0$ とおく．このとき，$0<x<\delta(\varepsilon)$ ならば

$$0<\sqrt{x}<\sqrt{\delta}=\varepsilon$$

が成り立つ．よって，右極限の定義より，$\displaystyle\lim_{x\to +0}\sqrt{x}=0$ である．

（解答終）

練習問題 1.3. 次の片側極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}[x]$， $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}[x]$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{1}{x^2}$， $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{1}{x^2}$

練習問題 1.4. 関数の極限に関する定理 1.7，1.8，1.9，1.10，1.13 の仮定と主張を右極限・左極限に関するものに書き直してみよ．

定理 1.19. （極限が存在するための必要十分条件）
α を実数とする．$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ となるための必要十分条件は

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$$

となることである．
$\alpha = \pm\infty$ のときも同様の主張が成り立つ．

証明. $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$0 \neq |x - a| < \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって，もちろん

$$a < x < a + \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

となるから，$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$ が成り立つ．また

$$a - \delta(\varepsilon) < x < a \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

となるから，$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$ も成り立つ．

逆に，$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$ とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta_1(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$a < x < a + \delta_1(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．また，上と同じ ε に対して，ある $\delta_2(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$a - \delta_2(\varepsilon) < x < a \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

も成り立つ．そこで，$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ とおくと

$$0 \neq |x - a| < \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つから，$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ である． □

この定理 1.19 から，関数の極限の収束・発散を判定するためには，右極限・左極限を調べればよいことがわかる．これは前にも述べたように，数直線上を点 a に近づくように動くには本質的には右から近づくか左から近づくかしかないからである．後で学習する 2 変数関数の極限の場合にはこのような便利な定理はないので，たいていの場合 $\varepsilon - \delta$ 論法やはさみうち法に頼ることになる．

例 1.20. 例題 1.18 より，極限 $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ や $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{|x|}$ は存在しない．

2　連続関数

2.1　関数の各点における連続性

定義 2.1. **（各点における連続性）**
　点 a の近傍で定義されている関数 $f(x)$ が

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

をみたすとき，$f(x)$ は点 a で**連続**であるという．
　これをイプシロン・デルタ論法で述べれば『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し，$|x - a| < \delta(\varepsilon)$ をみたす任意の x について

$$|\,f(x) - f(a)\,| < \varepsilon$$

となる』という条件をみたすことである．

　$f(x)$ が点 a で連続であることを数列を用いて表せば『$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たす任意の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ が成り立つ』となる．

定義 2.2. **（右連続・左連続）**

(1) 関数 $f(x)$ の定義域は区間 $[a, a+\varepsilon_0)$ を含むとする．$f(x)$ が点 a で**右連続**であるとは

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである．これをイプシロン・デルタ論法で述べれば『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し，$a < x < a + \delta(\varepsilon)$ をみたす任意の x について

$$|\,f(x) - f(a)\,| < \varepsilon$$

となる』という条件をみたすことである．

(2) 関数 $f(x)$ の定義域は区間 $(a-\varepsilon_0, a]$ を含むとする．$f(x)$ が点 a で**左連続**であるとは

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである．これをイプシロン・デルタ論法で述べれば『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し，$a - \delta(\varepsilon) < x < a$ をみたす任意の x について

$$|\,f(x) - f(a)\,| < \varepsilon$$

となる』という条件をみたすことである．

　関数の極限に関する性質から次の定理が成り立つことがわかる．

定理 2.3. **（関数の各点での連続性に関する性質）**
　関数 $f(x)$ と $g(x)$ が点 a で連続であれば，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して，関数

$$\lambda f(x) + \mu g(x), \qquad f(x)g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad |f(x)|$$

も点 a で連続である．ただし，商については $g(a) \neq 0$ とする．
　点 a での右連続，左連続についても同様の主張が成り立つ．

証明. 　仮定より $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ であるから，定理 1.8 よりすべて成り立つことがわかる．各自で確かめてみよ． □

定理 2.4. （1 点で連続であるための必要十分条件）
関数 $f(x)$ が点 a で連続であるための必要十分条件は，$f(x)$ が点 a で右連続かつ左連続であることである．

証明． 定理 1.19 を用いれば示すことができる．各自確かめてみよ． □

例 2.5. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & (x \fallingdotseq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

で定める．例題 1.18(2) より

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 1 = f(0), \qquad \lim_{x \to -0} f(x) = -1 \fallingdotseq f(0)$$

であるから，$f(x)$ は $x = 0$ で右連続ではあるが左連続ではない．よって，定理 2.4 より $f(x)$ は $x = 0$ で連続ではない．

定理 2.6. （合成関数の各点での連続性）
関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で連続であり，$b = f(a)$ とおくときに関数 $g(y)$ が点 $y = b$ で連続であるならば，合成関数 $g(f(x))$ は点 $x = a$ で連続である．

証明． 任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$g(y)$ は点 $y = b$ で連続だから，ある $\delta_1(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$|\,y - b\,| < \delta_1(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |\,g(y) - g(b)\,| < \varepsilon$$

が成り立つ．さらに，$f(x)$ は点 $x = a$ で連続だから，上の $\delta_1(\varepsilon) > 0$ に対して，ある $\delta_2(\delta_1(\varepsilon)) > 0$ が存在して

$$|\,x - a\,| < \delta_2(\delta_1(\varepsilon)) \quad \Longrightarrow \quad |\,f(x) - f(a)\,| < \delta_1(\varepsilon)$$

が成り立つ．よって，$b = f(a)$ であったから，$\delta(\varepsilon) = \delta_2(\delta_1(\varepsilon))$ とおけば

$$|\,x - a\,| < \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |\,f(x) - f(a)\,| < \delta_1(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |\,g(f(x)) - g(f(a))\,| < \varepsilon$$

となり，$\displaystyle\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a))$ が成り立つから，合成関数 $g(f(x))$ は点 $x = a$ で連続である． □

グラフをかけば直感的には明らかであるが，連続な関数については次の定理が成り立つ．簡単に述べると，連続関数においては正の値をとる点 a の十分近くではやはり正の値をとるという主張である．右連続や左連続の場合にも同様の主張が成り立つ．

定理 2.7. 関数 $f(x)$ が点 a で連続で $f(a) > 0$ ならば，ある $\delta > 0$ と定数 $C > 0$ が存在して

$$f(x) > C \qquad \bigl(x \in U_\delta(a)\bigr)$$

が成り立つ．

証明． $\varepsilon = \dfrac{f(a)}{2} > 0$ とおくと，$f(x)$ は点 a で連続であるから，ある $\delta = \delta\left(\dfrac{f(a)}{2}\right) > 0$ が存在して

$$|\,x - a\,| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\,f(x) - f(a)\,| < \frac{f(a)}{2}$$

が成り立つ．よって，$|\,x - a\,| < \delta$ ならば

$$f(a) - f(x) \leqq |\,f(x) - f(a)\,| < \frac{f(a)}{2}$$

より，$f(x) > \dfrac{f(a)}{2}$ となる．よって，$C = \dfrac{f(a)}{2}$ とおけばよい． □

2.2　連続関数の定義と性質

定義 2.8. （連続関数）
区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が，I のすべての点で連続であるとき，関数 $f(x)$ は I 上で**連続**である，または $f(x)$ は I 上の**連続関数**であるという．ただし，区間 I の端点も定義域に含まれる場合は，端点では左連続や右連続であることとする．

これをイプシロン・デルタ論法で述べれば『任意の $a \in I$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(a, \varepsilon) > 0$ が存在し，$|x - a| < \delta(a, \varepsilon)$ をみたす任意の $x \in I$ について

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

となる』という条件をみたすことである．

関数 $f(x)$ が区間 I 上で連続とは，任意の $a \in I$ に対して

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つこと（区間の端点が定義域に含まれれば片側極限で考える）である．つまり，まず定義域の任意の点 a と与えられた許容誤差 $\varepsilon > 0$ に対して，a の近傍の半径 δ を適切に決めれば，その近傍内では $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となり許容誤差をみたすということである．ゆえに，δ は a と ε に応じて変わるので，それを強調するために $\delta(a, \varepsilon)$ と表している．

連続関数ならばグラフがつながっているというのは，高校数学で習ったイメージ通りである．ただし，与えられた関数のグラフを描くのは簡単なことではないので，連続かどうかの判断が上の定義にしたがって行えるようにしておくこと．

定理 2.3，定理 2.6 より次の定理が成り立つ．

定理 2.9. （連続関数の性質）
関数 $f(x)$ と $g(x)$ が I 上で連続ならば，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lambda f(x) + \mu g(x), \qquad f(x)g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad |f(x)|$$

も I 上で連続である．ただし，商では $g(x) \fallingdotseq 0$ とする．

定理 2.10. （連続関数の合成関数の連続性）
関数 $f(x)$ は I 上で連続，関数 $g(y)$ は J 上で連続とし，$f(I) \subset J$ であるとする．このとき，合成関数 $g(f(x))$ も I 上で連続である．

例 2.11.　例 1.4 より，$f(x) = x$ は連続関数である．よって，定理 2.9 より，多項式

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

は連続関数となる．

注意 2.12. （連続関数の極限関数が不連続である例）

$I = [0, 1]$ 上の関数列 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = x^n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める．定理 2.9 より，すべての自然数 n に対して $f_n(x)$ は I 上の連続関数である．ここで

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

とおく．$0 \leqq x < 1$ を固定すれば，$f_n(x) = x^n$ は初項 x，公比 x の等比数列の一般項であるから

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} x^n = 0$$

となる．また，$x = 1$ のときは $f_n(1) = 1$ となり，$f(1) = \lim_{n \to \infty} f_n(1) = 1$ である．よって

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

であるから

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} 0 = 0 \neq f(1)$$

となり，$f(x)$ は $x = 1$ で左連続ではない．ゆえに，$f(x)$ は I 上の連続関数ではない．このことから，**連続関数の極限は連続とは限らないことがわかる**．これを数式で表せば

$$\lim_{x \to 1-0} \left\{ \lim_{n \to \infty} f_n(x) \right\} \neq \lim_{n \to \infty} \left\{ \lim_{x \to 1-0} f_n(x) \right\}$$

ということであり，**無条件には 2 つの極限の順番を変えることはできない事実**を示している．

注意 2.13. （連続関数の無限和で得られる関数が不連続である例）

実数全体を定義域とする関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n-1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める．定理 2.9 より，すべての自然数 n に対して $f_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数である．ここで

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = x^2 + \frac{x^2}{x^2 + 1} + \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} + \cdots$$

とおく．$x \neq 0$ を固定すれば，公比 $0 < \dfrac{1}{x^2 + 1} < 1$ より，この無限等比級数は収束し

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - \dfrac{1}{x^2 + 1}} = x^2 + 1$$

となる．また，$f_n(0) = 0$ なので，$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 0$ である．よって

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

であるから

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 + 1) = 1 \neq f(0)$$

となり，$f(x)$ は $x = 0$ で連続ではない．ゆえに，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数ではない．このことから，**連続関数の無限和は連続とは限らないことがわかる**．これを数式で表せば

$$\lim_{x \to 0} \left\{ \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} f_n(x) \right\} \neq \lim_{m \to \infty} \left\{ \lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{m} f_n(x) \right\}$$

ということであり，**無条件には 2 つの極限の順番を変えることはできない事実**を示している．

2.3　有界閉区間上の連続関数

ここでは有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数に特有の性質を紹介する．既に高校数学 III で学習したものもあるが，証明を与えるのは初めてである．

定理 2.14.（中間値の定理）
関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続で $f(a) \fallingdotseq f(b)$ とする．このとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の実数 μ に対して

$$a < \xi < b, \qquad \mu = f(\xi)$$

となる点 ξ が存在する．

証明.　$f(a) < f(b)$ の場合を証明する．$f(a) < \mu < f(b)$ となる任意の実数 μ をとる．このとき

$$g(x) = f(x) - \mu$$

とおくと，$g(x)$ も $[a,b]$ 上で連続であり，$g(a) < 0,\ g(b) > 0$ となる．このとき

$$g(\xi) = 0, \qquad a < \xi < b$$

をみたす ξ が存在することを示せば，これは $f(\xi) = \mu$ となり求めるものとなる．

そこで，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定める．まず

$$a_1 = a, \qquad b_1 = b, \qquad c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

とおく．以下帰納的に，$g(c_n) = 0$ ならば $\xi = c_n$ とすれば証明が終わり，$g(c_n) \fallingdotseq 0$ ならば

$$g(c_n) > 0 \qquad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = a_n, \qquad b_{n+1} = c_n, \qquad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$g(c_n) < 0 \qquad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = c_n, \qquad b_{n+1} = b_n, \qquad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

と定義する．つまり，$g(c_n) > 0$ ならば区間 $[a_n, b_n]$ の左半分を $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ とし，$g(c_n) < 0$ ならば区間 $[a_n, b_n]$ の右半分を $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ とおく．このとき，もしすべての自然数 n に対して $g(c_n) \fallingdotseq 0$ ならば

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq \cdots \leqq b_{n+1} \leqq b_n \leqq \cdots \leqq b_2 \leqq b_1, \qquad g(a_n) < 0, \qquad g(b_n) > 0$$

が成り立つ．

これより，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列なのでともに収束する．そこで

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad \beta = \lim_{n\to\infty} b_n$$

とおけば

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (n \to \infty)$$

であるから，$\beta - \alpha = 0$ となる．ゆえに，$\xi = \alpha = \beta$ とおけば，関数 $g(x)$ の連続性より

$$g(\xi) = \lim_{n\to\infty} g(a_n) \leqq 0, \qquad g(\xi) = \lim_{n\to\infty} g(b_n) \geqq 0$$

となるので，$g(\xi) = 0$ が成り立つ．したがって，この ξ が求めるものである．$f(a) > f(b)$ の場合も同様に示せる．　□

この中間値の定理の証明に従って，区間 $[a_n, b_n]$ の幅を絞っていき方程式の解の近似値を計算する方法を **2 分法**という．収束の精度はあまり良い方でないが，アルゴリズム自体が理解しやすいこと，および方程式を定める関数が連続ならば必ず収束することが利点である．方程式の解の近似値を計算する方法としては他にニュートン法と呼ばれるものがあるので，これは微分法の章の最後に応用例として紹介する．

例題 2.15. 次の方程式が与えられた区間 I に解をもつことを示せ．

(1) $2^x - 3x - 5 = 0, \qquad I = [4, 5]$ (2) $\sin x = x \cos x, \qquad I = \left(\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right)$

（解答）

(1) $f(x) = 2^x - 3x - 5$ とおくと，これは区間 $[4, 5]$ 上で連続である．また

$$f(4) = 16 - 12 - 5 = -1 < 0, \qquad f(5) = 32 - 15 - 5 = 12 > 0$$

であるから，中間値の定理より

$$4 < \xi < 5, \qquad f(\xi) = 0$$

となる ξ が存在する．この ξ が求める解である．

(2) $f(x) = \sin x - x \cos x$ とおくと，これは区間 $\left[\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right]$ 上で連続である．また

$$f(\pi) = 0 - \pi \cdot (-1) = \pi > 0, \qquad f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 - \frac{3}{2}\pi \cdot 0 = -1 < 0$$

であるから，中間値の定理より

$$\pi < \xi < \frac{3}{2}\pi, \qquad f(\xi) = 0$$

となる ξ が存在する．この ξ が求める解である．

（解答終）

例題 2.16. 奇数次数の方程式

$$x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

は実数解をもつことを示せ．

（解答） $f(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0$ とおくと，これは $\mathbb{R}$ 上の連続関数である．また

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

であるから，ある実数 a と b で $a < b,\ f(a) < 0,\ f(b) > 0$ となるものが存在する．よって，区間 $[a, b]$ で中間値の定理を適用すれば

$$a < \xi < b, \qquad f(\xi) = 0$$

となる ξ が存在する．これが求める実数解である．

（解答終）

定理 2.17. （最大値・最小値の定理）
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上で連続であるとき，$f(x)$ の $[a,b]$ における最大値と最小値が存在する．

証明. 2 つの段階に分けて最大値が存在することを証明する．最小値については，$-f(x)$ について同様の議論をすればよい．

(Step1) ～$f(x)$ は $[a,b]$ で有界であること～
$f(x)$ が $[a,b]$ で有界でないと仮定する．このとき，任意の自然数 n は $|f(x)|$ の上界ではない．したがって

$$a \leqq a_n \leqq b, \qquad |f(a_n)| > n$$

を満たす a_n が存在する．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下界 a，上界 b をもつので有界である．
よって，第 3 章定理 6.8（Bolzano-Weierstrass の定理）より，収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．その極限値を $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = c$ とおくと，$a \leqq c \leqq b$ である．また，$|f(x)|$ は $[a,b]$ 上で連続だから

$$\lim_{k\to\infty} |f(a_{n_k})| = |f(c)|$$

となる．一方，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の決め方より

$$|f(a_{n_k})| > n_k \geqq k$$

であるから

$$\lim_{k\to\infty} |f(a_{n_k})| = \infty$$

となる．これは矛盾である．したがって，$|f(x)|$ は上界をもつから，$f(x)$ は $[a,b]$ で有界である．

(Step2) ～$f(x)$ は $[a,b]$ において最大値をもつこと～
$f(x)$ の $[a,b]$ における最大値が存在しないと仮定する．(Step1) より $f(x)$ は上に有界であるから，$[a,b]$ における上限が存在するので

$$\alpha = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

とおく．このとき，背理法の仮定から α は最大値ではないので

$$f(x) < \alpha \qquad (a \leqq x \leqq b) \tag{2.1}$$

が成り立つ．
ここで，関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}$$

で定める．$f(x)$ は $[a,b]$ 上で連続で，また (2.1)より分母が 0 にならないから，$g(x)$ も $[a,b]$ 上で連続である．よって，(Step1) で証明したことを再び適用すると，$g(x)$ は $[a,b]$ で有界である．ゆえに，ある正定数 M で

$$g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)} \leqq M \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

となるものが存在する．これより

$$f(x) \leqq \alpha - \frac{1}{M} \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

が成り立つ．よって，$\alpha - \dfrac{1}{M}$ は $f(x)$ の $[a,b]$ における上界の 1 つとなる．しかし，これは α が上限，すなわち上界の最小値であることに矛盾する．したがって，α は $f(x)$ の $[a,b]$ における最大値である． □

2.4 逆関数

これまでは関数の独立変数として x を考え，その従属変数として y を考えていた．簡単に言えば『x に数字を代入して y の値を求めていた』ということである．ここでは，ある特別な条件を満たす関数については，逆に『y に数字を代入して x の値を求める』ことができることについて考察する．

例 2.18. $y = x + 1$ は式変形により

$$x = y - 1$$

となり，x を y の関数として表せる．

例 2.19. 定義域が $\mathbb{R}$ である関数 $y = x^2$ は

$$x = \pm\sqrt{y}$$

となり，$y > 0$ を決めても x の値がただ 1 つに決まらないから，x を y の関数として表せない．

ただし，定義域を $y = x^2 \quad (x \geqq 0)$ と限定すれば

$$x = \sqrt{y}$$

となり，x を y の関数として表すことができる．

定義 2.20. （逆関数）
関数 $y = f(x)$ の値域に含まれる任意の y の値に対して，対応する x の値がただ 1 つに定まるとき x は y の関数と考えられる．この関数を $x = g(y)$ とおくとき，その x と y を入れ替えて $y = g(x)$ としたものをもとの関数 $y = f(x)$ の**逆関数**という．この $g(x)$ を $f^{-1}(x)$ で表す．

例えば，上で挙げた例については

- $f(x) = x + 1$ の逆関数は $f^{-1}(x) = x - 1$
- $f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ の逆関数は存在しない
- $f(x) = x^2 \quad (x \geqq 0)$ の逆関数は $f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad (x \geqq 0)$

ということになる．この例からもわかるように，**逆関数は常に存在するとは限らない**．

もし逆関数が存在すれば，$y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ のグラフは直線 $y = x$ に関して対称となる．

そこで，逆関数が存在する十分条件を考える．

定理 2.21. 区間 I 上で定義された関数 $y = f(x)$ が狭義単調増加かつ連続であれば，逆関数 $y = f^{-1}(x)$ が区間 $f(I)$ 上で存在して，$f^{-1}(x)$ も狭義単調増加かつ連続である．

$f(x)$ が狭義単調減少かつ連続の場合にも同様の主張が成り立つ．

3　初等関数

3.1　指数関数・対数関数

定義 3.1.（指数関数・対数関数）

e をネイピア数とする．実数 x に対して $f(x) = e^x$ を**指数関数（exponential function）**という．これを $\exp(x)$ と表すこともある．e^x は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加かつ連続な関数である．

指数関数 $f(x) = e^x$ の逆関数を

$$f^{-1}(x) = \log x \qquad (x > 0)$$

で表し，これを**対数関数（logarithm function）**という．$\log x$ は $x > 0$ で狭義単調増加かつ連続な関数である．

定理 3.2.（指数関数・対数関数に関する極限の基本公式）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

証明.

(1)　$x > 1$ とし，$[x] = n$ とおく．このとき，$n \leqq x < n+1$ であるから

$$1 < 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \leqq 1+\frac{1}{n} \qquad \therefore\ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

となる．ここで，ネイピア数の定義より

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

である．また，$x\to\infty$ のとき $n\to\infty$ であるから，はさみうちの定理より

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

が成り立つ．$x\to-\infty$ のときは，$y = -x$ とおけば

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e$$

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$ について計算すると，$h = \dfrac{1}{x}$ とおけば

$$\lim_{h\to+0}(1+h)^{1/h} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{h\to-0}(1+h)^{1/h} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

より，$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e$ となる．よって，対数関数の連続性より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{1/x} = \log e = 1$$

(3)　$y = e^x - 1$ とおけば，$x = \log(y+1)$ であり，$x\to 0$ のとき $y\to 0$ である．よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(y+1)} = 1$$

□

例題 3.3. 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{\log(1+2x)}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{e^{4x}-1}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{1/(x-1)}$

（解答）

(1) $y=-\dfrac{x}{3}$ とおけば，$x\to\infty$ のとき $y\to-\infty$ で

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-3y}=\lim_{y\to-\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right\}^{-3}=e^{-3}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{\log(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{3x}\cdot\frac{2x}{\log(1+2x)}\cdot\frac{3}{2}=1\cdot1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{e^{4x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}\cdot\frac{4x}{e^{4x}-1}\cdot\frac{5}{4}=1\cdot1\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$

(4) 対数をとって考えると

$$\lim_{x\to 1}\log x^{1/(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$$

ここで，$t=x-1$ とおくと，$x\to 1$ のとき $t\to 0$ で

$$\lim_{x\to 1}\log x^{1/(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\log(t+1)}{t}=1$$

となる．ゆえに，指数関数の連続性より

$$\lim_{x\to 1}x^{1/(x-1)}=\lim_{x\to 1}e^{\log x^{1/(x-1)}}=e$$

（別解） $y=x-1$ とおけば，$x\to 1$ のとき $y\to 0$ で

$$\lim_{x\to 1}x^{1/(x-1)}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e$$

（解答終）

例題 3.4. 関数 $f(x)$ を次で定める．

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{1/x}} & (x\fallingdotseq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

このとき，$f(x)$ は $x=0$ で右連続であるが左連続ではないことを示せ．

（解答） $t=\dfrac{1}{x}$ とおく．$x\to+0$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+e^{1/x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+e^t}=0=f(0)$$

となり，$f(x)$ は $x=0$ で右連続である．

また，$x\to-0$ のとき $t\to-\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{1}{1+e^{1/x}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{1+e^t}=1\fallingdotseq f(0)$$

となり，$f(x)$ は $x=0$ で左連続ではない．

（解答終）

3.2 三角関数

三角関数については次の極限公式が最も重要である．

命題 3.5. （三角関数に関する極限の基本公式）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

証明． $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，半径 1 の円において中心角が x の扇形を考えることにより

$$\sin x<x<\tan x$$

が成り立つ．よって

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

となる．$\cos x$ と $\dfrac{\sin x}{x}$ はともに偶関数であるから，この不等式は $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ でも成り立つ．ゆえに，はさみうち法より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

が成り立つ． □

命題 3.6. （三角関数の連続性）

(1) $\sin x$ は $\mathbb{R}$ 上で連続である．

(2) $\cos x$ は $\mathbb{R}$ 上で連続である．

(3) $\tan x$ は $x\fallingdotseq\dfrac{\pi}{2}+n\pi$（$n$ は整数）で連続である．

証明． (1) 和積の公式と $|\cos\theta|\leqq 1$ より

$$|\sin(x+h)-\sin x|=\left|2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right|\leqq 2\left|\sin\frac{h}{2}\right|$$

である．ここで，$t=\dfrac{h}{2}$ とおけば，$h\to 0$ のとき $t\to 0$ で

$$\lim_{h\to 0}\sin\frac{h}{2}=\lim_{t\to 0}\sin t=\lim_{t\to 0}t\cdot\frac{\sin t}{t}=0\cdot 1=0$$

なので，はさみうち法より

$$\lim_{h\to 0}|\sin(x+h)-\sin x|=0$$

が成り立つ．よって，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\sin(x+h)=\sin x$ となるので，$\sin x$ はすべての実数 x で連続である．

(2) $\sin x$ と同様にして証明できる（各自確かめよ）．あるいは

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

であるから，$\sin x$ の連続性と定理 2.10（合成関数の連続性）より，$\cos x$ は $\mathbb{R}$ 上で連続である．

(3) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ であるから，(1) と (2) および定理 2.9 より，$\cos x\fallingdotseq 0$ となる x で連続である．

□

例題 3.7.　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

（解答）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

(3)　$x\to 0$ のとき $\sin x\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\frac{9}{1+\cos 3x}=1^2\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$

（解答終）

例題 3.8.　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ は存在しないことを示せ．

（解答）　2 個の数列を $a_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$b_n=\dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$ と定める．すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$ であり

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=\lim_{n\to\infty}0=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=\lim_{n\to\infty}1=1$$

となる．よって，0 への近づき方に応じて極限値が異なる．よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ は存在しない．

（解答終）

例題 3.9.　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\fallingdotseq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

で定めると，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数であることを示せ．

（解答）　$x\fallingdotseq 0$ では $f(x)$ は連続関数の四則演算や合成で表されて，分母も 0 にならないから連続である．そこで，$x=0$ で連続であることを証明すればよい．

$x\fallingdotseq 0$ のとき

$$|f(x)|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq |x|$$

であるから

$$0\leqq |f(x)|\leqq |x|\quad\longrightarrow\quad 0\qquad (x\to 0)$$

なので，はさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{x\to 0}|f(x)|=0$ が成り立つ．よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$ となる．一方，$f(0)=0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

が成り立つので，$f(x)$ は $x=0$ で連続である．したがって，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数である．

（解答終）

3.3　逆三角関数

定義 3.10.（逆三角関数）

三角関数は周期関数であるから，その定義域全体では単調関数ではない．そこで，定義域を制限すれば

$$
\begin{array}{llll}
\sin x & \text{は閉区間} & \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] & \text{で狭義単調増加かつ連続} \\
\cos x & \text{は閉区間} & [0, \pi] & \text{で狭義減少増加かつ連続} \\
\tan x & \text{は閉区間} & \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{で狭義単調増加かつ連続}
\end{array}
$$

となるから，定理 2.21 よりそれぞれ逆関数が存在する．

$$
\begin{array}{llll}
\sin x\colon \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1] & \text{の逆関数を} & \mathrm{Sin}^{-1}\, x & (-1 \leqq x \leqq 1) \\
\cos x\colon [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] & \text{の逆関数を} & \mathrm{Cos}^{-1}\, x & (-1 \leqq x \leqq 1) \\
\tan x\colon \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R} & \text{の逆関数を} & \mathrm{Tan}^{-1}\, x & (x \in \mathbb{R})
\end{array}
$$

で表し，これらをまとめて**逆三角関数**という．

$\mathrm{Sin}^{-1}\, x$, $\mathrm{Cos}^{-1}\, x$, $\mathrm{Tan}^{-1}\, x$ はそれぞれアークサイン，アークコサイン，アークタンジェントと呼ばれる．別の記号として $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ のように書くことも多い．

逆三角関数については次の性質が知られている．グラフの概形については三角関数のグラフを $y = x$ に関して対称移動して確認せよ．

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\, x$ は $[-1, 1]$ 上で狭義単調増加かつ連続

(2) $\mathrm{Cos}^{-1}\, x$ は $[-1, 1]$ 上で狭義単調減少かつ連続

(3) $\mathrm{Tan}^{-1}\, x$ は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加かつ連続，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \mathrm{Tan}^{-1}\, x = \frac{\pi}{2}$,　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Tan}^{-1}\, x = -\frac{\pi}{2}$

逆三角関数の値の計算するには，以下のように三角関数の問題に直せばよい．

例題 3.11.　次の値を求めよ．

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\, \dfrac{1}{2}$　　(2) $\mathrm{Tan}^{-1}(-\sqrt{3})$

（解答）

(1)　$\theta = \mathrm{Sin}^{-1}\, \dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\sin\theta = \frac{1}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

となる．これを満たす θ は $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ なので，$\mathrm{Sin}^{-1}\, \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$ である．

(2)　$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}(-\sqrt{3})$ とおくと

$$\tan\theta = -\sqrt{3}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

となる．これを満たす θ は $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ なので，$\mathrm{Tan}^{-1}(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3}$ である．

（解答終）

逆三角関数の計算に慣れてくれば，この解答のようにいちいち置き換えをせず暗算で値を求めればよい．

複雑な逆三角関数の値は加法定理を用いて計算する．その際，角度の範囲には注意すること．

例題 3.12.　次の値を求めよ．

(1) $\mathrm{Tan}^{-1}2+\mathrm{Tan}^{-1}3$　(2) $2\,\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}-1)$　(3) $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{7}+\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{11}{14}$

（解答）

(1)　$\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}2,\ \beta=\mathrm{Tan}^{-1}3$ とおくと

$$\tan\alpha=2 \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right), \qquad \tan\beta=3 \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$$

である．よって

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+3}{1-6}=\frac{5}{-5}=-1$$

となる．ここで，条件より $1<\tan\alpha<\tan\beta$ なので $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$ となる．これより

$$\tan(\alpha+\beta)=-1 \qquad \left(\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha+\beta=\frac{3}{4}\pi$$

が得られる．したがって，$\mathrm{Tan}^{-1}2+\mathrm{Tan}^{-1}3=\dfrac{3}{4}\pi$ である．

(2)　$\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}-1)$ とおくと

$$\tan\alpha=\sqrt{2}-1 \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

である．よって

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-2}=1$$

となる．ここで，条件より $\tan\alpha>0$ なので $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$0<2\alpha<\pi$ となる．これより

$$\tan 2\alpha=1 \qquad (0<2\alpha<\pi) \qquad \Longrightarrow \qquad 2\alpha=\frac{\pi}{4}$$

が得られる．したがって，$2\,\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}-1)=\dfrac{\pi}{4}$ である．（つまり，$\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}-1)=\dfrac{\pi}{8}$ となる.）

(3)　$\alpha=\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{7},\ \beta=\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{11}{14}$ とおくと

$$\sin\alpha=\frac{1}{7} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}\right), \qquad \sin\beta=\frac{11}{14} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\beta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

である．ここで，条件より $0<\sin\alpha<\sin\beta$ なので $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{7^2-1^2}}{7}=\frac{4\sqrt{3}}{7}, \qquad \cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{\sqrt{14^2-11^2}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

であり，さらに $0<\alpha+\beta<\pi$ である．よって

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}-\frac{1}{7}\cdot\frac{11}{14}=\frac{60-11}{98}=\frac{49}{98}=\frac{1}{2}$$

となる．これより

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2} \qquad (0<\alpha+\beta<\pi) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$$

が得られる．したがって，$\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{7}+\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{11}{14}=\dfrac{\pi}{3}$ である．

（解答終）

例題 3.13.　次の値を求めよ．

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{3}{5}\pi\right)$　　(2) $\tan\left(\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{5}\right)$

（解答）

(1)　$\alpha = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{3}{5}\pi\right)$ とおくと

$$\sin\alpha = \sin\frac{3}{5}\pi \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

である．よって，$\alpha = \dfrac{2}{5}\pi$ が得られる．したがって，$\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{3}{5}\pi\right) = \alpha = \dfrac{2}{5}\pi$ である．

(2)　$\alpha = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{5}$ とおくと

$$\sin\alpha = \frac{1}{5} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

である．ここで，条件より $\sin\alpha > 0$ なので $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

なので

$$\tan\left(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{5}\right) = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

である．

（解答終）

例題 3.14.　方程式 $\mathrm{Sin}^{-1}x = \mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{4}{5}$ を解け．

（解答）　$\alpha = \mathrm{Sin}^{-1}x = \mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{4}{5}$ とおくと

$$\sin\alpha = x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right), \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad (0 \leqq \alpha \leqq \pi)$$

である．よって，$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となるから，$\sin\alpha \geqq 0$ より，求める解は

$$x = \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

である．

（解答終）

例題 3.15.　$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\mathrm{Sin}^{-1}x + \mathrm{Cos}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

（解答）　$y = \mathrm{Sin}^{-1}x$ とおくと

$$\sin y = x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

である．このとき

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y = x$$

となり，$0 \leqq \dfrac{\pi}{2} - y \leqq \pi$ であるから

$$\frac{\pi}{2} - y = \mathrm{Cos}^{-1}x \qquad \therefore\ y + \mathrm{Cos}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．したがって，$\mathrm{Sin}^{-1}x + \mathrm{Cos}^{-1}x = y + \mathrm{Cos}^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$ が得られる．

（解答終）

3.4　双曲線関数

定義 3.16.（双曲線関数）
　実数 x に対して

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

とおき，これらを**双曲線関数（hyperbolic function）**という．

　sinh, cosh, tanh はそれぞれハイパボリックサイン，ハイパボリックコサイン，ハイパボリックタンジェントと読む．sinh で 1 つの記号なので，$\sinh x$ を $\sin(hx)$ と間違えないようにすること．

命題 3.17.（双曲線関数の性質）

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

(3) 符号を複号同順とするとき

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y, \qquad \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \tanh x = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$

証明.

(1)　双曲線関数の定義より

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$$

となる．

(2)　定義より明らかに成り立つ．

(3)　ここでは 1 つだけ証明する．最初の等式は右辺を計算すれば

$$\begin{aligned}
\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{-x+y} + e^{x-y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{-x+y} - e^{x-y} + e^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} \\
&= \cosh(x+y)
\end{aligned}$$

となる．他も直接計算により同様である．

(4)　$\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ であるから

$$\lim_{x\to\infty} \tanh x = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

となる．

□

例題 3.18.　次の値を求めよ．

(1) $\sinh(\log 2)$　　　　(2) $\tanh(\log(\sqrt{5}-2))$

（解答）

(1) $\sinh(\log 2) = \dfrac{e^{\log 2} - e^{-\log 2}}{2} = \dfrac{2-\dfrac{1}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$

(2) $\tanh(\log(\sqrt{5}-2)) = \dfrac{e^{\log(\sqrt{5}-2)} - e^{-\log(\sqrt{5}-2)}}{e^{\log(\sqrt{5}-2)} + e^{-\log(\sqrt{5}-2)}} = \dfrac{(\sqrt{5}-2) - \dfrac{1}{\sqrt{5}-2}}{(\sqrt{5}-2) + \dfrac{1}{\sqrt{5}-2}} = \dfrac{\sqrt{5}-2-(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}-2+(\sqrt{5}+2)} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

（解答終）

例題 3.19.　関数 $f(x) = \cosh x \ \ (x \geqq 0)$ の逆関数を求めよ．

（解答）　$y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ とおくと，相加相乗平均より

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) \geqq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{e^x \cdot \frac{1}{e^x}} = 1$$

である．また，e^x についての方程式とみて

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

と整理すれば，e^x について解くと

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

となる．ここで，$x \geqq 0$ より $e^x \geqq 1$ である．また，$y \geqq 1$ であったから

$$y + \sqrt{y^2-1} \geqq 1, \qquad y - \sqrt{y^2-1} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}} \leqq 1$$

より

$$e^x = y + \sqrt{y^2-1}$$

が適する．よって

$$x = \log(y + \sqrt{y^2-1}\,)$$

となるから，x と y を入れ替えれば求める逆関数は

$$f^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1}\,) \qquad (x \geqq 1)$$

である．

（解答終）

練習問題 3.1.　双曲線関数の逆関数について次の等式を示せ．

(1) $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}\,) \qquad (x \in \mathbb{R})$

(2) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x} \qquad (|x| < 1)$

4　関数の一様連続性

ここでは連続関数の『連続性の度合い』について考察する．例えば

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \sin x, \qquad f_3(x) = x^2$$

はすべて $\mathbb{R}$ 上の連続関数である．これをイプシロン・デルタ論法で確認してみる．

- $f_1(x) = x$ について

  任意の $a \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(a,\varepsilon) = \varepsilon$ とおけば，$|x-a| < \delta(a,\varepsilon)$ となる任意の実数 x に対して

  $$|f_1(x) - f_1(a)| = |x-a| < \delta(a,\varepsilon) = \varepsilon$$

  となるから，確かに $f_1(x) = x$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数である．

- $f_2(x) = \sin x$ について

  任意の $a \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(a,\varepsilon) = \varepsilon$ とおけば，$|x-a| < \delta(a,\varepsilon)$ となる任意の実数 x に対して

  $$|\sin x - \sin a| = \left|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqq 2 \cdot 1 \cdot \left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a| < \delta(a,\varepsilon) = \varepsilon$$

  となるから，確かに $f_2(x) = \sin x$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数である．

- $f_3(x) = x^2$ について

  δ をどうおくか決めるために，とりあえず $|x-a| < \delta$ としてみると

  $$|x^2 - a^2| = |x+a||x-a| < |x+a|\delta = |(x-a)+2a|\delta \leqq (|x-a| + 2|a|)\delta < (\delta + 2|a|)\delta$$

  δ は小さくとってもいいから，$0 < \delta < 1$ とすれば

  $$|x^2 - a^2| < (\delta + 2|a|)\delta < (1 + 2|a|)\delta = \varepsilon$$

  より，$\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+2|a|}$ とおけばよい．

  そこで，任意の $a \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(a,\varepsilon) = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}$ とおけば，$|x-a| < \delta(a,\varepsilon)$ となる任意の実数 x に対して

  $$|x+a| = |(x-a)+2a| \leqq |x-a| + 2|a| < \delta(a,\varepsilon) + 2|a| \leqq 1 + 2|a|$$

  なので

  $$|x^2 - a^2| = |x+a||x-a| < (1+2|a|)\delta(a,\varepsilon) \leqq (1+2|a|)\frac{\varepsilon}{1+2|a|} = \varepsilon$$

  となるから，確かに $f_3(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数である．

以上の結果を見ると，あることに気付くかもしれない．連続関数の定義でも述べたように，定義域の任意の点 a と与えられた許容誤差 $\varepsilon > 0$ に応じて，a の近傍の半径 $\delta(a,\varepsilon)$ をその近傍内では $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ と許容誤差をみたすように決めればよいのだが，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ では $\delta(a,\varepsilon) = \varepsilon$ と $\delta(a,\varepsilon)$ は a とは無関係に決めることができる．一方，$f_3(x)$ では $\delta(a,\varepsilon) = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}$ と確かに a にも依存して $\delta(a,\varepsilon)$ が決まっている．ただし，$\delta(a,\varepsilon)$ の決め方は人によって異なりうるので，これだけでは a に無関係に決められる可能性が残っているが，後で示すように $f_3(x)$ については $\delta(a,\varepsilon)$ を a に無関係に決めることができない．

このことは x が h だけ変化したときの y の変化量 $|f(x+h) - f(x)|$ を考えると，x によらず

$$|f_1(x+h) - f_1(x)| = |h|, \qquad |f_2(x+h) - f_2(x)| \leqq |h|$$

なのに対して，$f_3(x)$ については

$$|f_3(x+h) - f_3(x)| = |2hx + h^2|$$

であるから，これを x に無関係な定数で上から押さえ込むことはできないことを表している．

このように連続関数といっても関数の値の変化がおとなしいものから激しいものまでたくさんある．このうち，おとなしい方に関しては有用な性質が多く得られるので，以下のように用語を定義する．

定義 4.1. **（一様連続）**
区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が次の条件『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し，$|x - y| < \delta(\varepsilon)$ をみたす任意の $x, y \in I$ について

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

となる』という条件をみたすとき，$f(x)$ は I 上で**一様連続**であるという．

関数 $f(x)$ が I 上で一様連続であるとは，連続関数の定義における $\delta(a, \varepsilon)$ を a によらず "一様に" 決められるということである．例えば，$f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin x$ は $\mathbb{R}$ 上の一様連続な関数である．$f_3(x) = x^2$ が $\mathbb{R}$ 上で一様連続でないことは背理法で示すことができる．

例題 4.2. 次の関数 $f(x)$ が区間 I 上で一様連続でないことを示せ．

(1) $f(x) = x^2, \quad I = \mathbb{R}$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad I = (0, \infty)$

（解答）

(1) $f(x) = x^2$ が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であると仮定すると，$\varepsilon = 1$ に対して，ある $\delta = \delta(1) > 0$ が存在して

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^2 - y^2| < 1$$

が成り立つ．そこで，自然数 n に対して $x = n + \dfrac{\delta}{2}$, $y = n$ とおけば，$|x - y| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$ であるから

$$|x^2 - y^2| = \left| \left(n + \frac{\delta}{2}\right)^2 - n^2 \right| = \delta n + \frac{\delta^2}{4} < 1$$

が成り立つことになるが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\delta n + \frac{\delta^2}{4}\right) = \infty$ であるから，この数列が上に有界となることは矛盾である．ゆえに，$f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続でない．

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ が $I = (0, \infty)$ 上で一様連続であると仮定すると，$\varepsilon = 1$ に対して，ある $\delta = \delta(1) > 0$ が存在して

$$x, y \in I, \quad |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < 1$$

が成り立つ．そこで，自然数 n に対して $x = \dfrac{1}{n}$, $y = \dfrac{1}{n} + \dfrac{\delta}{2}$ とおけば，$|x - y| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$ であるから

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| n - \frac{2n}{2 + \delta n} \right| = \frac{\delta n^2}{2 + \delta n} < 1$$

が成り立つことになるが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\delta n^2}{2 + \delta n} = \infty$ であるから，この数列が上に有界となることは矛盾である．ゆえに，$f(x) = \dfrac{1}{x}$ は I 上で一様連続でない．

（解答終）

関数 $f(x)$ が一様連続かどうかは定義域 I に依存して決まる．例えば，$f(x) = x^2$ の定義域を $J = [-R, R]$ と有界閉区間にすれば，$f(x)$ は J 上で一様連続である．実際，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(\varepsilon) = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{1 + 2R}\right\}$ とおけば

$$x, y \in J, \quad |x - y| < \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |x^2 - y^2| < \varepsilon$$

が成り立つことが示せる．前ページと同様の計算となるので各自確かめてみよ．また，それを通してなぜ J 上ならば一様連続となるかの理由を考えてみよ．その答えの一部は以降のページで述べる定理である．

一様連続な関数についても連続関数と同様に次が成り立つ．

定理 4.3. （一様連続な関数の性質）
関数 $f(x)$ と $g(x)$ がともに I 上で一様連続ならば，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda f(x) + \mu g(x)$ も I 上で一様連続である．

証明． $\lambda = \mu = 0$ ならば明らかなので，$(\lambda, \mu) \fallingdotseq (0, 0)$ とする．
任意の $\varepsilon > 0$ をとる．このとき，$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} > 0$ に対して，ある $\delta_1(\varepsilon'), \delta_2(\varepsilon') > 0$ が存在して

$$x, y \in I, \quad |x - y| < \delta_1(\varepsilon') \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon'$$
$$x, y \in I, \quad |x - y| < \delta_2(\varepsilon') \qquad \Longrightarrow \qquad |g(x) - g(y)| < \varepsilon'$$

が成り立つ．そこで，$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon'), \delta_2(\varepsilon')\}$ とおけば，$|x - y| < \delta(\varepsilon)$ となる任意の $x, y \in I$ に対して

$$|(\lambda f(x) + \mu g(x)) - (\lambda f(y) + \mu g(y))| \leqq |\lambda|\,|f(x) - f(y)| + |\mu|\,|g(x) - g(y)| < (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon' = \varepsilon$$

であるから，$\lambda f(x) + \mu g(x)$ は I 上で一様連続である． □

一般に $f(x)$ と $g(x)$ がともに I 上で一様連続であっても，積 $f(x)g(x)$ は I 上で一様連続とは限らない．
例えば，$f(x) = g(x) = x$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であるが，$f(x)g(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続ではない．たとえ $f(x)$ や $g(x)$ が有界でも一様連続であるとは限らない．次の例を参照すること．

例題 4.4. 関数 $f(x) = x \sin x$ が $\mathbb{R}$ 上で一様連続でないことを示せ．

（解答） $f(x) = x \sin x$ が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であると仮定すると，$\varepsilon = 1$ に対して，ある $\delta = \delta(1) > 0$ が存在して

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x \sin x - y \sin y| < 1$$

が成り立つ．そこで，自然数 n に対して $x = 2n\pi + \dfrac{\delta}{2}$，$y = 2n\pi$ とおけば，$|x - y| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$ であるから

$$|x \sin x - y \sin y| = \left| \left(2n\pi + \frac{\delta}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{\delta}{2}\right) \right| = \left(2n\pi + \frac{\delta}{2}\right) \left| \sin \frac{\delta}{2} \right| < 1$$

が成り立つ．しかし，$\sin \dfrac{\delta}{2} \fallingdotseq 0$ となるように δ を小さく取り直しておけば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(2n\pi + \frac{\delta}{2}\right) \left| \sin \frac{\delta}{2} \right| = \infty$ であるから，この数列が上に有界となることは矛盾である．ゆえに，$f(x) = x \sin x$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続でない．

（解答終）

区間上の連続関数が有界であっても，一様連続とは限らない．

例題 4.5. 関数 $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ が $I = (0, 1]$ 上で一様連続でないことを示せ．

（解答） $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ が I 上で一様連続であると仮定すると，$\varepsilon = 1$ に対して，ある $\delta = \delta(1) > 0$ が存在して

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{y} \right| < 1$$

が成り立つ．そこで，自然数 n に対して $x_n = \dfrac{1}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi}$，$y_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ とおけば，$n > \dfrac{1}{\delta\pi}$ ならば

$$0 < x_n < y_n < \frac{\delta}{2} \qquad \therefore \ |x_n - y_n| < |x_n| + |y_n| < \delta$$

となるから

$$\left| \sin \frac{1}{x_n} - \sin \frac{1}{y_n} \right| = |1 - 0| = 1 < 1$$

が成り立つことになり矛盾である．ゆえに，$f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ は I 上で一様連続でない．

（解答終）

定義から一様連続な関数は連続関数である．しかし，一般に連続関数が一様連続であるとは限らず，それを定義に基づいて判定するのは大変である．そこで，次の定理が有用となる．

定理 4.6. （有界閉区間上の連続関数の一様連続性）
有界閉区間上で連続な関数は一様連続である．

証明. 背理法で示すため，有界閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ が一様連続ではないと仮定する．このとき，ある正の数 ε_0 が存在して，任意の $\delta>0$ に対して，ある $x_\delta, y_\delta \in I$ が存在して

$$|x_\delta - y_\delta| < \delta, \qquad |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geqq \varepsilon_0$$

となる．そこで，各自然数 n に対して $\delta = \dfrac{1}{n}$ とおけば

$$a \leqq x_n \leqq b, \qquad a \leqq y_n \leqq b, \qquad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geqq \varepsilon_0$$

となる数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を選ぶことができる．

I は有界閉区間なので，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界な数列であるから，定理 6.8（Bolzano-Weierstrass の定理）より収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．この極限値を $\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$ とおくと，$a \leqq c \leqq b$ となる． また，$|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ とはさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = c$ も成り立つ．

よって，$f(x)$ の連続性より

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(c) - f(c)| = 0$$

が得られるが，これは $|f(x_n) - f(y_n)| \geqq \varepsilon_0$ と ε_0 が正の定数であることに矛盾する．したがって，$f(x)$ は I 上の一様連続な関数である． □

もし位相空間論でコンパクト集合などの概念を学習すれば，上の定理は背理法でなく直接証明できるようになる．また，一様連続かどうか判定するのに役に立つ命題を述べておく．

命題 4.7. 関数 $f(x)$ は有界な区間 $I=(a,b]$ 上で連続とする．このとき，$f(x)$ が I 上で一様連続であるための必要十分条件は右極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ が存在することである．

命題 4.8. 関数 $f(x)$ は無限区間 $I=[a,\infty)$ 上で連続であり，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在するならば，$f(x)$ は I 上で一様連続である．

この逆の命題『$f(x)$ が I 上で一様連続ならば，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在する』は一般に成り立たない．例えば，$\sin x$ は $\mathbb{R}$ 上の一様連続な関数であるが，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sin x$ は存在しない．

5　章末問題

練習問題 5.1.　次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 2x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\log 2}{x}\right)^x$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+2}-x)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^{\sin x}$

練習問題 5.2.　次の値を逆三角関数を用いずに表せ.

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\mathrm{Cos}^{-1}(-1)$　(3) $\mathrm{Tan}^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(4) $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$　(5) $2\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{3}+\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{7}$　(6) $4\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5}-\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{239}$

練習問題 5.3.　逆三角関数に関する次の関係式を示せ.

(1) $\sin(\mathrm{Cos}^{-1}x)=\cos(\mathrm{Sin}^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$　(2) $\mathrm{Tan}^{-1}x=\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(3) $\mathrm{Tan}^{-1}|x|=\dfrac{1}{2}\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

練習問題 5.4.　関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$ のグラフをかけ.

練習問題 5.5.　関数 $f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数で，$f(0)=1,\ f(1)=0$ であるとする．このとき

$$f(c)=c,\qquad 0<c<1$$

となる c が存在することを示せ.

発展問題 5.6.　$0<C<1$ とする．閉区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が $f(I)\subset I$ をみたし，任意の $x,y\in I$ に対して

$$|\,f(x)-f(y)\,|\leqq C|\,x-y\,|$$

が成り立つとする．このとき，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_1\in I,\qquad a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,2,3,\ldots)$$

で定める.

(1) $f(x)$ は I 上で連続であることを示せ.　(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列であることを示せ.

(3) 方程式 $f(x)=x$ の解は I でただ一つだけ存在することを示せ.

発展問題 5.7.　関数 $f(x)$ は区間 $[0,\infty)$ 上の一様連続な関数で，$f(0)=0$ とする．このとき，定数 $a>0$ で

$$|f(x)|\leqq ax+1\qquad (x>0)$$

となるものが存在することを示せ.

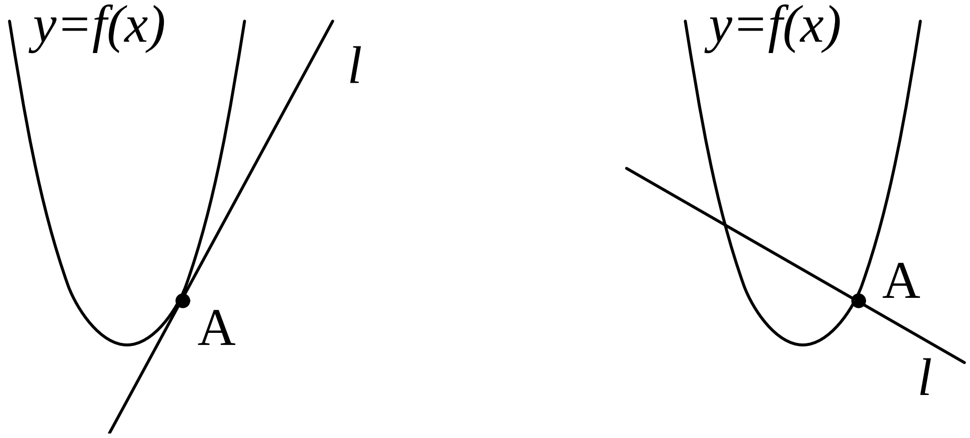
第5章　微分法

この章では微分法の概念とその具体的な応用法について学習する．高校数学でも微分については学習したが，様々な性質や定理の証明はあまり気にせず計算問題が主体であった．そのため，振り返ってみるとあいまいなままの事項が少なくない．

例えば，曲線 $C\colon y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ における接線 l の方程式は

$$l\colon y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

であることは学習したが，そもそも接線とは何であろうか？



その定義を問われると答えられないはずである．何となく点 A でグラフ C に “接する” 直線というイメージなので，上図において左は “接している” から接線であり，真ん中は “交わって突き抜けている” から接線ではないと答えるのが普通である．しかし，このイメージは正しいとは言い難い．例えば，曲線 $y = x^3$ の原点 O における接線の方程式は公式より $l\colon y = 0$ となり，接線 l が $y = x^3$ のグラフを突き抜けている．これは本当に “接している” のであろうか？このようなことは第 3 章で述べた数列の極限と同じ現象であり，原因は “接する” ということを明確に定義していないことにある．つまり，直感的な概念に基づいた議論に頼ってしまうと混乱が生じる代表例の 1 つとなっている．

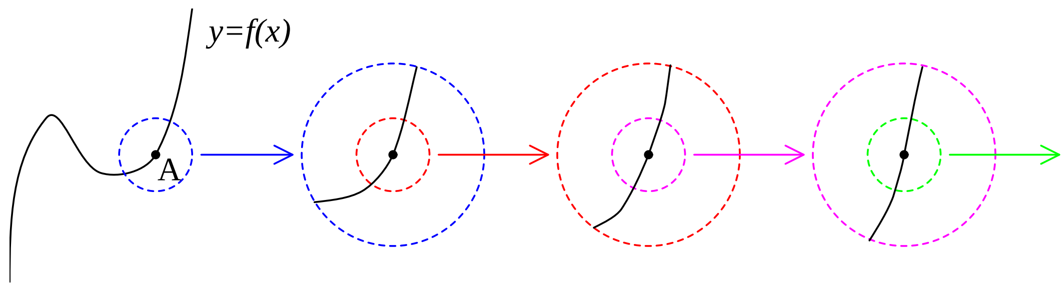
そこで，微分の概念を説明し，接線のもつ意味とその応用例を説明する．また，高校数学で学習した導関数の符号を利用した関数の増減の調べ方をその証明を含めて解説する．その際に最も重要な役割を果たすのは高校数学においては比較的扱いの軽い「平均値の定理」である．これらの内容を整理しながら復習する．

また，微分法は関数の極値を求めたりグラフを描いたりするためだけのものではない．接線の概念を拡張することにより，関数の微分の本質は「関数を近似する多項式を求めるための道具」であることを理解し，真の値が正確にはわからないネイピア数 e や円周率 π などの近似値が求められるようになること，および関数の不定形の極限が計算できるようになることが目標である．これらは大学において理工学を修めるためには必要不可欠な内容である．微分法は計算練習を反復して行なわなければ身につかないのは当然であるが，さまざまな公式を丸暗記するだけでなく何を計算しているのかを見失わないようにすること．そうしなければ数学の計算問題は解けるようになっても，理工学系科目や統計学など幅広い分野へ適切に応用できるようにはならない．

1　微分の定義と性質

1.1　微分係数の定義

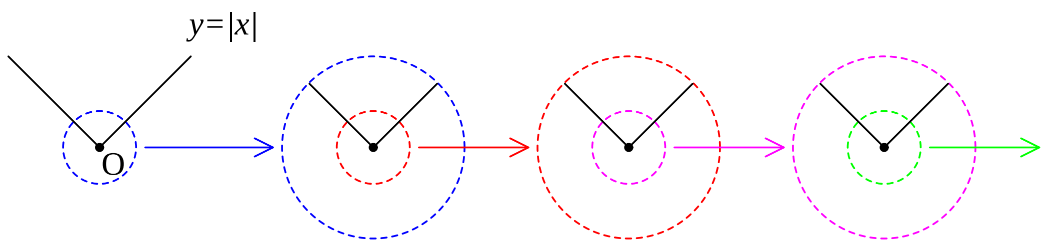
関数 $y=f(x)$ のグラフ C 上に点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ をとる．ここで，点 A の近くでのグラフの様子を詳しく調べようと思えば，点 A の近くを拡大してみればよい．



そこで，上図のように実際に拡大し続けてみると，最初は曲がっていたグラフがだんたん直線に近づいてくる．このように，点 A のまわりをものすごく大きな倍率で拡大すれば，グラフはほぼ直線となるように思える．この直線 l の方程式を $x=a$ のまわりでの $y=f(x)$ の 1 次近似式という．この用語の起源は $x=a$ のごく近くでは $y=f(x)$ と直線 l がほぼ一致することによる．もちろん x を a から離れたところにとれば，グラフ C と直線 l は特に近いとは限らない．

この直線 l をグラフ C の点 A における接線といい，直線 l の傾きを関数 $f(x)$ の $x=a$ での微分係数という．これが接線の直感的な意味であるが，これでは接線の方程式（関数の 1 次近似式）をどのように求めればよいかわからないし，議論をする際に不便である．

ところで上で「関数のグラフをある点のまわりで拡大し続ければいつかは直線になる」ということを述べたが，これは正しいのであろうか？例えば，関数 $y=|x|$ のグラフを原点 O のまわりで拡大し続けると下図のようになる．



どれだけ拡大しても原点から左右に斜め 45 度の直線が現れるだけで折れ線であり，直線に近づくことはない．このように関数 $y=f(x)$ のグラフがある点 $x=a$ のまわりでいくら拡大しても直線に近づかない，つまり直線で近似できない場合に $x=a$ で関数 $y=f(x)$ は微分不可能であるという．高校数学では関数 $y=f(x)$ のグラフが $x=a$ で“尖っている”から微分不可能であると理解している学生が少なくないが，ポイントは**尖っているから直線で近似することができない**ということである．

このように関数のグラフを描いて微分可能かどうか（つまり直線で近似できるかどうか）を調べるのは大変であり，そもそもグラフを描くのが困難な関数も多い．そこで，この考察を数式を用いて厳密に表現し定式化する．具体的には微分係数を平均変化率の x 方向の変化量を 0 に近づけた場合の極限として捉え，その平均変化率が収束するか発散するかによって微分可能性の判定を行うことにするのが妥当である．

定義 1.1. （微分係数）
　関数 $f(x)$ が点 a の近傍で定義されていて，極限値

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在するとき，この極限値を $f(x)$ の点 a における**微分係数**といい

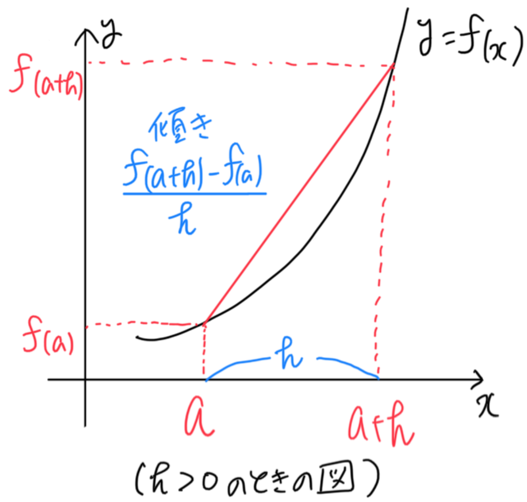
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

で表す．このとき，$f(x)$ は点 a で**微分可能**であるという．

　微分係数の定義式において $h = x - a$ とおけば

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

と表すこともできる．今後は断らずにその議論において便利な表記を用いることにする．



　微分可能な関数に関する特徴の 1 つは，次に述べるように連続であることである．

定理 1.2. （微分可能な関数の連続性）
　関数 $f(x)$ が点 a で微分可能ならば，$f(x)$ は点 a で連続である．

証明. 　$x \neq a$ ならば

$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

であるから，$f(x)$ が $x = a$ で微分可能なので

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left\{ f(a) + (x - a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right\} = f(a) + 0 \cdot f'(a) = f(a)$$

が成り立つ．よって，$f(x)$ は $x = a$ で連続である．□

注意 1.3. 　定理 1.2 の逆は成り立たない．すなわち，関数 $f(x)$ が点 a で連続であっても，$f(x)$ は点 a で微分可能であるとは限らない．後の例題 1.7 も参照せよ．

　定理 1.2 の対偶を考えれば，関数 $f(x)$ が $x = a$ で不連続ならば，$x = a$ で微分不可能であることがわかる．この事実は具体的な関数の微分可能性の判定に役立つことがある．

定義 1.4. （接線）

関数 $f(x)$ は点 a で微分可能とする．このとき，直線

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

を曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における**接線**という．

関数 $f(x)$ は点 a で微分可能とする．このとき，$y = f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ における接線は，当然

$$\lim_{x \to a} \left\{ f(x) - \bigl(f'(a)(x-a) + f(a) \bigr) \right\} = 0$$

をみたす．ただし，それだけではなくさらに

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \{f'(a)(x-a) + f(a)\}}{x-a} = 0$$

も成り立つ．実際

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \{f'(a)(x-a) + f(a)\}}{x-a} = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right\} = f'(a) - f'(a) = 0$$

である．逆に，点 $(a, f(a))$ を通り傾きが m である直線を考えたとき

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \{m(x-a) + f(a)\}}{x-a} = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = f'(a)$$

が成り立つ．実際

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \{m(x-a) + f(a)\}}{x-a} = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - m \right\} = f'(a) - m = 0 \qquad \therefore\ m = f'(a)$$

である．

つまり，点 $(a, f(a))$ を通り傾きが m である直線に対して，もちろん m によらず常に

$$\lim_{x \to a} \left\{ f(x) - \bigl(m(x-a) + f(a) \bigr) \right\} = 0$$

が成り立つが，次の条件

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \{m(x-a) + f(a)\}}{x-a} = 0$$

が成り立つのは $m = f'(a)$ のときであり，かつそのときに限る．この意味で傾きが $f'(a)$ の直線は特別であり，直線が曲線のグラフに “接する” ということの特徴付けとなっている．

実際に関数が与えられたときに，定義 1.1 に従って微分係数を計算するのは大変である．そこで，次節で関数の導関数を定義し，初等関数をはじめとして様々な関数の微分計算法を説明する．その後に，具体例を通して接線の応用例（1 次近似式を利用した近似値の計算）を紹介することにする．

定義 1.5. **（右微分・左微分）**
　関数 $f(x)$ に対して，極限値

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在するとき，この極限値を $f(x)$ の点 a における**右微分係数**といい

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

で表す．このとき，$f(x)$ は点 a で**右微分可能**であるという．
　また，極限値

$$\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在するとき，この極限値を $f(x)$ の点 a における**左微分係数**といい

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

で表す．このとき，$f(x)$ は点 a で**左微分可能**であるという．

定理 1.6. **（右微分・左微分と微分可能性）**
　関数 $f(x)$ が点 a で微分可能であるための必要十分条件は

(i) $f(x)$ が点 a で右微分可能かつ左微分可能である．

(ii) $f'_+(a)=f'_-(a)$ が成り立つ．

の両方が成り立つことである．

証明．　第 4 章定理 1.19 より，極限値 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在するための必要十分条件は，片側極限

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\qquad \lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

がともに存在し，かつその値が一致することである．よって，定理の主張が成り立つ． □

例題 1.7.　関数 $f(x)=|x|$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ．

（解答）　次の極限

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|}{h}$$

について調べればよい．そこで，この右極限を考えると

$$\lim_{h\to+0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to+0}1=1$$

なので，右微分可能で $f'_+(0)=1$ である．一方，左極限は

$$\lim_{h\to-0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to-0}(-1)=-1$$

なので，左微分可能で $f'_-(0)=-1$ である．
　よって，$f'_+(0)\neq f'_-(0)$ であるから，$x=0$ で微分可能ではない．

（解答終）

1.2 導関数の定義

定義 1.8. （導関数）

開区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が I のすべての点で微分可能であるとき，$f(x)$ は I 上で**微分可能**であるという．また．このとき

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (x \in I)$$

を $f(x)$ の**導関数**という．$y = f(x)$ については，その導関数は

$$f^{(1)}(x), \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad y', \quad y^{(1)}, \quad \frac{dy}{dx}$$

などでも表される．

I が端点をもつ場合には次のように定める．例えば，$I = [a, b]$ のときには，関数 $f(x)$ が

- 端点以外の $a < x < b$ では各点で微分可能
- 点 a で右微分可能
- 点 b で左微分可能

であるときに，I 上で微分可能であるといい

$$f'(x) = \begin{cases} f'_+(a) & (x = a) \\ \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} & (a < x < b) \\ f'_-(b) & (x = b) \end{cases}$$

とする．他の場合でも同様に，端点では対応する右微分や左微分を考える．

例題 1.9. 定数関数 $f(x) = c$ は微分可能で，その導関数は $f'(x) = 0$ であることを示せ．

（解答） 平均変化率の極限値が

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

と存在する．よって，$f(x) = c$ はすべての実数 x で微分可能で，$f'(x) = 0$ である．

（解答終）

例題 1.10. n を自然数とする．関数 $f(x) = x^n$ は微分可能で，その導関数は $f'(x) = nx^{n-1}$ であることを示せ．

（解答） 平均変化率の極限値が

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} h^2 + \cdots + h^n) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (nx^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1} \end{aligned}$$

と存在する．よって，$f(x) = x^n$ はすべての実数 x で微分可能で，$f'(x) = nx^{n-1}$ である．

（解答終）

1.3　導関数の性質

定理 1.11.（和・積・商の導関数）

関数 $f(x)$ と $g(x)$ はともに区間 I 上で微分可能とする．

(1) （微分の線形性）$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して，$\lambda f(x) + \mu g(x)$ も区間 I 上で微分可能で

$$\{\lambda f(x) + \mu g(x)\}' = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$$

(2) 積 $f(x)g(x)$ も区間 I 上で微分可能で

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(3) $g(x) \fallingdotseq 0$ ならば，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も区間 I 上で微分可能で

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{特に} \qquad \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$$

証明.　すべて導関数の定義に従って証明する．

(1)　$h \fallingdotseq 0$ のとき，関数 $\lambda f(x) + \mu g(x)$ の平均変化率は

$$\frac{\{\lambda f(x+h) + \mu g(x+h)\} - \{\lambda f(x) + \mu g(x)\}}{h} = \lambda \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mu \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

と変形できる．よって，この $h \to 0$ での極限値が

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\{\lambda f(x+h) + \mu g(x+h)\} - \{\lambda f(x) + \mu g(x)\}}{h} &= \lim_{h\to 0} \left\{\lambda \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mu \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\} \\ &= \lambda f'(x) + \mu g'(x)\end{aligned}$$

と存在する．ゆえに，$\lambda f(x) + \mu g(x)$ も区間 I 上で微分可能で

$$\{\lambda f(x) + \mu g(x)\}' = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$$

が成り立つ．

(2)　$h \fallingdotseq 0$ のとき，関数 $f(x)g(x)$ の平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\end{aligned}$$

と変形できる．ここで，定理 1.2 より $g(x)$ は連続であるから，この $h \to 0$ での極限値が

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

と存在する．よって，$f(x)g(x)$ も区間 I 上で微分可能で

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

が成り立つ．

(3) $h \fallingdotseq 0$ のとき，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の平均変化率は

$$\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{\dfrac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}$$

$$= \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}$$

$$= \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$$

と変形できる．ここで，定理 1.2 より $g(x)$ は連続であるから，この $h \to 0$ での極限値が

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x)} \{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\}$$

と存在する．よって，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も区間 I 上で微分可能で

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

が成り立つ．

□

例題 1.12. 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $y = x^5 + 3x^4 - 6x^3 + 8x + 2$

(2) $y = (x^2 + 2x + 5)(x^3 - 2)$

(3) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{3x + 1}$

(4) $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

（解答） 最初なので初学者向けに丁寧な解答を述べる．実際にはここまで丁寧に書かなくてよい．

(1) 微分の線形性より

$$y' = (x^5)' + 3(x^4)' - 6(x^3)' + 8(x)' + (2)' = 5x^4 + 3 \cdot 4x^3 - 6 \cdot 3x^2 + 8 + 0 = 5x^4 + 12x^3 - 18x^2 + 8$$

(2) 積の微分法より

$$y' = (x^2 + 2x + 5)'(x^3 - 2) + (x^2 + 2x + 5)(x^3 - 2)'$$

$$= (2x + 2)(x^3 - 2) + (x^2 + 2x + 5) \cdot 3x^2 = 5x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 4$$

(3) 商の微分法より

$$y' = \frac{(x^2 + x + 1)'(3x + 1) - (x^2 + x + 1)(3x + 1)'}{(3x + 1)^2}$$

$$= \frac{(2x + 1)(3x + 1) - (x^2 + x + 1) \cdot 3}{(3x + 1)^2} = \frac{3x^2 + 2x - 2}{(3x + 1)^2}$$

(4) 商の微分法より

$$y' = 2 \cdot \frac{-(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}$$

（解答終）

定理 1.13. （合成関数の微分法）
関数 $y = f(x)$ は区間 I 上で微分可能，$z = g(y)$ は区間 J 上で微分可能とし，$f(I) \subset J$ であるとする．このとき，合成関数 $z = g(f(x))$ は区間 I 上で微分可能で

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dy}\,g(y) \cdot \frac{d}{dx}\,f(x) \qquad (y = f(x))$$

が成り立つ．このことを

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

と表すこともある．

証明． $h(x) = g(f(x))$ とおき，すべての点 $a \in I$ で

$$h'(a) = g'\bigl(f(a)\bigr) \cdot f'(a) \tag{1.1}$$

となることを示す．

任意の $a \in I$ をとり，$b = f(a)$ とおく．J 上の関数 $p(y)$ を

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} & (y \fallingdotseq b) \\ g'(b) & (y = b) \end{cases}$$

で定めると，仮定より $g(y)$ は J 上で微分可能なので，$p(y)$ は $y = b$ で連続である．定理 1.2 より $f(x)$ は $x = a$ で連続であるから，第 4 章定理 2.10 より $p\bigl(f(x)\bigr)$ も $x = a$ で連続で

$$\lim_{x \to a} p\bigl(f(x)\bigr) = p\bigl(f(a)\bigr) = p(b) = g'(b) \tag{1.2}$$

が成り立つ．

また，$p(y)$ の定義より点 b の近傍で

$$g(y) - g(b) = p(y)(y - b)$$

となるので，$y = f(x)$ を代入して

$$g\bigl(f(x)\bigr) - g\bigl(f(a)\bigr) = p\bigl(f(x)\bigr)\bigl(f(x) - f(a)\bigr)$$

よって，(1.2)より

$$\lim_{x \to a} \frac{g\bigl(f(x)\bigr) - g\bigl(f(a)\bigr)}{x - a} = \lim_{x \to a} p\bigl(f(x)\bigr) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(b) \cdot f'(a)$$

つまり，関数 $h(x)$ の平均変化率の極限値が

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = g'\bigl(f(a)\bigr) \cdot f'(a)$$

と存在するから，$h(x)$ は $x = a$ で微分可能で (1.1)が成り立つ． □

上の証明を非常に大雑把に言えば，$h \to 0$ のときに $f(x + h) \to f(x)$ であるから

$$\frac{g\bigl(f(x+h)\bigr) - g\bigl(f(x)\bigr)}{h} = \frac{g\bigl(f(x+h)\bigr) - g\bigl(f(x)\bigr)}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \xrightarrow{h \to 0} \quad g'\bigl(f(x)\bigr) \cdot f'(x)$$

ということである．ただし，$h \fallingdotseq 0$ だとしても，極限をとる前に $f(x + h) - f(x) = 0$ と分母が 0 になる可能性があるので，厳密には上記のような証明となる．

定理 1.14. （逆関数の微分法）

関数 $y = f(x)$ は区間 I 上で微分可能でかつ狭義単調であるとする．さらに，導関数について I 上で常に $f'(x) \neq 0$ とする．このとき，逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は $f(I)$ で微分可能であって

$$\frac{d}{dy}\, f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

が成り立つ．このことを

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

と表すこともある．

証明. 任意の点 $b \in f(I)$ に対して，$a \in I$ で $b = f(a)$ となるものがただ一つ存在する．また，f は狭義単調なので，$a \neq x \iff b \neq f(x)$ であるから，$y \neq b$ のとき

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}\big(f(x)\big) - f^{-1}\big(f(a)\big)}{f(x) - f(a)} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}$$

となる．このことと $y \to b$ のとき $x \to a$ であることから

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

が成り立つ．よって，$f^{-1}(y)$ は点 b で微分可能で，$(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ となる．ゆえに，点 $b \in f(I)$ は任意だったから，$f^{-1}(y)$ は $f(I)$ 上で微分可能であり

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (y = f(x))$$

□

例題 1.15. 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $y = (x^2 + 1)^{10}$　　(2) $y = \sqrt[3]{x} \quad (x > 0)$

（解答）

(1) 合成関数の微分法より

$$y' = 10(x^2+1)^9 \cdot (x^2+1)' = 10(x^2+1)^9 \cdot 2x = 20x(x^2+1)^9$$

(2) $x = y^3$ であるから，両辺を y で微分して

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 = 3(\sqrt[3]{x})^2 = 3\sqrt[3]{x^2} \quad (\neq 0)$$

よって，逆関数の微分法より

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

（解答終）

2　初等関数の微分

2.1　初等関数の微分公式

命題 2.1. （指数関数・対数関数の導関数）

(1) $\dfrac{d}{dx}\,e^x = e^x$

(2) $\dfrac{d}{dx}\log|x| = \dfrac{1}{x}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\,a^x = a^x \log a \qquad (a > 0)$

(4) $\dfrac{d}{dx}\log_a|x| = \dfrac{1}{x\log a} \qquad (a > 0,\ a \fallingdotseq 1)$

証明. (1)　指数関数の性質と基本的な極限公式より

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

であるから，e^x はすべての実数 x で微分可能で，$\dfrac{d}{dx}\,e^x = e^x$ が成り立つ．

(2)　$y = \log x$ とおくと，$x = e^y$ である．この両辺を y で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\,e^y = e^y = x\ (\fallingdotseq 0)$$

よって，逆関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{x}$$

であるから，$\log x$ は $x > 0$ で微分可能で，$\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}$ が成り立つ．

$\log|x|$ については

$$\begin{aligned} &x > 0 \text{ のとき}\quad \log|x| = \log x \text{ より} && \frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x} \\ &x < 0 \text{ のとき}\quad \log|x| = \log(-x) \text{ より} && \frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

であるから，$\log|x|$ は $x \fallingdotseq 0$ で微分可能で，$\dfrac{d}{dx}\log|x| = \dfrac{1}{x}$ が成り立つ．

(3)　$y = a^x$ とおくと，両辺とも正だから対数をとって

$$\log y = \log a^x = x\log a$$

この両辺を x で微分して

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \log a$$

よって

$$\frac{dy}{dx} = y\log a = a^x \log a$$

であるから，a^x はすべての実数 x で微分可能で，$\dfrac{d}{dx}\,a^x = a^x\log a$ が成り立つ．

(4)　底の変換公式より

$$\frac{d}{dx}\log_a|x| = \frac{d}{dx}\,\frac{\log|x|}{\log a} = \frac{1}{x\log a}$$

であるから，$\log_a|x|$ は $x \fallingdotseq 0$ で微分可能で，$\dfrac{d}{dx}\log_a|x| = \dfrac{1}{x\log a}$ が成り立つ．

□

命題 2.2. （冪乗関数の導関数）

$$\frac{d}{dx}\,x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$$

証明. $y = x^{\alpha}$ とおくと，両辺とも正だから対数をとって

$$\log y = \log x^{\alpha} = \alpha \log x$$

この両辺を x で微分して

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{x}$$

よって

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

であるから，x^{α} は $x > 0$ で微分可能で，$\dfrac{d}{dx}\,x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$ が成り立つ． □

命題 2.3. （三角関数の導関数）

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

証明. 和積の公式と $\cos x$ の連続性より

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} = \cos x$$

であるから，$\sin x$ はすべての実数 x で微分可能で，$\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ が成り立つ．

次に $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$\frac{d}{dx}\cos x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

であるから，$\cos x$ はすべての実数 x で微分可能で，$\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ が成り立つ．

また，$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ より

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

であるから，$\tan x$ は $x \fallingdotseq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) で微分可能で，$\dfrac{d}{dx}\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ が成り立つ． □

命題 2.4. （双曲線関数の導関数）

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \qquad \frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

証明. いずれも双曲線関数の定義から以下のように簡単に導くことができる．

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

□

命題 2.5. （逆三角関数の導関数）

(1) $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Cos}^{-1}\,x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$

(3) $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$

証明. (1) $-1 < x < 1$ に対して $y = \mathrm{Sin}^{-1}\,x$ とおくと

$$x = \sin y, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

となる．この両辺を y で微分すると，上記の y の範囲では $\cos y > 0$ なので

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2} \quad (\neq 0)$$

よって，逆関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ゆえに，$\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ は $-1 < x < 1$ で微分可能で，$\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ が成り立つ．

(2) (1) と同様にできるが，ここでは別証明を与える．第 4 章例題 3.15 より

$$\mathrm{Sin}^{-1}\,x + \mathrm{Cos}^{-1}\,x = \frac{\pi}{2}$$

であったから，$-1 < x < 1$ のとき

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{Cos}^{-1}\,x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Sin}^{-1}\,x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ゆえに，$\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ は $-1 < x < 1$ で微分可能で，$\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Cos}^{-1}\,x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ が成り立つ．

(3) $y = \mathrm{Tan}^{-1}\,x$ とおくと

$$x = \tan y, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

となる．この両辺を y で微分して

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2 \quad (\neq 0)$$

よって，逆関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$$

ゆえに，$\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ はすべての実数 x で微分可能で，$\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x = \dfrac{1}{1+x^2}$ が成り立つ．

$\square$

2.2 対数微分法

指数が関数である場合，および分数式の場合には,（絶対値をとってから）自然対数をとることで簡単な形に直すことができる．これを利用した計算法を**対数微分法**という．

例題 2.6. 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $y = x^{\sin x} \quad (x > 0)$ (2) $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)^3}{(x-2)^2(x+3)^5}}$ (3) $y = (\sin x)^x \quad (0 < x < \pi)$

（解答）

(1) 両辺とも正だから対数を取ると

$$\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \log x$$

よって，両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \cos x \log x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

ゆえに

$$y' = y\left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

(2) 両辺の対数を取ると

$$\log y = \log \sqrt{\frac{(x+1)^3}{(x-2)^2(x+3)^5}} = \frac{1}{2}\big(3\log|x+1| - 2\log|x-2| - 5\log|x+3|\big)$$

よって，両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-2} - \frac{5}{x+3}\right) = \frac{-2x^2-7}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

ゆえに

$$y' = y \cdot \frac{-2x^2-7}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{-2x^2-7}{(x+1)(x-2)(x+3)}\sqrt{\frac{(x+1)^3}{(x-2)^2(x+3)^5}}$$

(3) 両辺とも正だから対数を取ると

$$\log y = \log(\sin x)^x = x\log(\sin x)$$

よって，両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \log(\sin x) + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \log(\sin x) + \frac{x\cos x}{\sin x}$$

ゆえに

$$y' = y\left(\log(\sin x) + \frac{x\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^x\left(\log(\sin x) + \frac{x\cos x}{\sin x}\right)$$

（解答終）

2.3　パラメータ表示された関数の導関数

定理 2.7.（パラメータ表示された関数の導関数）
関数 $x = g(t)$ と $y = f(t)$ がともに微分可能で，さらに $x = g(t)$ に逆関数が存在し，$g'(t) \neq 0$ とする．このとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

となる．これは簡単に $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \Big/ \dfrac{dx}{dt}$ と表す．

証明.　$x = g(t)$ は仮定より逆関数 $t = g^{-1}(x)$ が存在し，これは微分可能である．よって，$y = f(t) = f\bigl(g^{-1}(x)\bigr)$ と表せるから，合成関数と逆関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dt}\bigl(g^{-1}(x)\bigr) \cdot \frac{d}{dx}\, g^{-1}(x) = f'(t) \cdot \frac{1}{g'(t)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

が成り立つ．　□

例題 2.8.　次のパラメータ表示された関数の導関数を t の関数として表せ．

(1) $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ y = \dfrac{2t}{1+t^2}$　　(2) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t \quad (0 < t < 2\pi)$

（解答）

(1)　それぞれ t で微分すれば

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2t(1+t^2) - (1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{2(1+t^2) - 2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$$

であるから，$t \neq 0$ ならば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}} = \frac{t^2-1}{2t}$$

(2)　それぞれ t で微分すれば

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t, \qquad \frac{dy}{dt} = \sin t$$

であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

となる．これは $t \neq \pi$ ならば

$$\frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}} = \frac{\cos\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}} = \frac{1}{\tan\dfrac{t}{2}}$$

と表すこともできる．

（解答終）

3 具体的な微分の計算例

3.1 公式を利用した導関数の計算

例 3.1. $y = \sqrt{x}$ の導関数は $y = x^{1/2}$ であるから

$$y' = \frac{1}{2}\,x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

となる．これはよく出てくるので

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

は公式として憶えておくこと．以下の例でもこれは何度も利用する．

例題 3.2. 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $(3x^5 - 2x^3 + 6)^{12}$　(2) $(2x+5)^6(3x-4)^5$　(3) $\sqrt{x^2+1}$

(4) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　(5) $\sqrt[3]{x^4}\quad (x > 0)$　(6) $\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2}$

(7) $\sin^2 3x$　(8) $\cos(x^2+1)$　(9) 3^{5x-7}

（解答） 与えられた関数を y とおく．

(1) $y' = 12(3x^5 - 2x^3 + 6)^{11}(15x^4 - 6x^2) = 36x^2(5x^2-2)(3x^5 - 2x^3 + 6)^{11}$

(2) $y' = 12(2x+5)^5(3x-4)^5 + (2x+5)^6 15(3x-4)^4 = (66x+27)(2x+5)^5(3x-4)^4$

(3) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(4) $y' = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)}{1-x^2} = \dfrac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$

(5) $y = x^{4/3}$ であるから，$y' = \dfrac{4}{3}\,x^{1/3} = \dfrac{4\sqrt[3]{x}}{3}$

(6) $y = x^2 + x + 1 + x^{-1} + x^{-2}$ であるから

$$y' = 2x + 1 - x^{-2} - 2x^{-3} = 2x + 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

(7) $y' = 2\sin 3x \cdot (\sin 3x)' = 2\sin 3x \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = 6\sin 3x \cos 3x = 3\sin 6x$

(8) $y' = -\sin(x^2+1) \cdot (x^2+1)' = -2x\sin(x^2+1)$

(9) $y' = 3^{5x-7}(\log 3) \cdot 5 = 5 \cdot 3^{5x-7}\log 3$

（解答終）

例題 3.3.　次の関数の導関数を求めよ.

(1) $\dfrac{\log x}{x}$　　(2) $\log(\log x)$　　(3) $x(\log x)^2$

(4) $\tan^3 4x$　　(5) $x^2 e^{\sin x}$　　(6) $\log(x+\sqrt{x^2+1}\,)$

(7) $e^{2x}\cos 3x$　　(8) $\log\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}}$　　(9) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right|$

（解答）　与えられた関数を y とおく.

(1) $y' = \dfrac{(\log x)'\cdot x - \log x\cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

(2) $y' = \dfrac{1}{\log x}\cdot(\log x)' = \dfrac{1}{x\log x}$

(3) $y' = (\log x)^2 + x\cdot 2\log x\cdot\dfrac{1}{x} = (\log x)^2 + 2\log x$

(4) $y' = 3\tan^2 4x\cdot(\tan 4x)' = 3\tan^2 4x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 4x}\cdot 4 = \dfrac{12\tan^2 4x}{\cos^2 4x}$

(5) $y' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x}\cos x = x(2+x\cos x)e^{\sin x}$

(6) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(7) $y' = 2e^{2x}\cos 3x - e^{2x}\sin 3x\cdot 3 = e^{2x}(2\cos 3x - 3\sin 3x)$

(8) $y = \dfrac{1}{2}\log(1-\sin x) - \dfrac{1}{2}\log(1+\cos x)$ であるから

$$y' = \frac{-\cos x}{2(1-\sin x)} - \frac{-\sin x}{2(1+\cos x)} = \frac{\sin x - \cos x - 1}{2(1-\sin x)(1+\cos x)}$$

(9) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\sqrt{1-x}-\sqrt{2}\right| - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{1-x}+\sqrt{2}\,)$ であるから

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-x}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

（解答終）

例題 3.4.　次の関数の導関数を求めよ．ただし，a は 0 でない定数とする．

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}(x^2)$　(2) $\mathrm{Cos}^{-1}(e^{-x})$　(3) $x\,\mathrm{Sin}^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$

(4) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x}{a}$　(5) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{a}{x}$　(6) $\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$

(7) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}$　(8) $\dfrac{x\,\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} + \log\sqrt{1-x^2}$　(9) $\sin(\mathrm{Cos}^{-1}(x^4))$

（解答）　与えられた関数を y とおく．

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

(2) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} \cdot (e^{-x})' = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

(3) $y' = \mathrm{Sin}^{-1}x + x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \mathrm{Sin}^{-1}x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Sin}^{-1}x$

(4) $y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{a^2+x^2}$

(5) $y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{a}{x}\right)^2} \cdot \left(-\dfrac{a}{x^2}\right) = -\dfrac{a}{a^2+x^2}$

(6) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x+1}{2}}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}} \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{x+1}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

(7) $y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2+(1-x)^2} \cdot (-2) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

(8)　$y = \dfrac{x\,\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\log(1-x^2)$ だから

$$y' = \frac{\left(\mathrm{Sin}^{-1}x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1-x^2} - x\,\mathrm{Sin}^{-1}x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{x}{1-x^2} - \frac{x}{1-x^2} = \frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

(9) $y' = \cos(\mathrm{Cos}^{-1}(x^4)) \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-(x^4)^2}} \cdot 4x^3 = x^4 \cdot \dfrac{-4x^3}{\sqrt{1-x^8}} = -\dfrac{4x^7}{\sqrt{1-x^8}}$

（解答終）

例題 3.5. 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $x^{\mathrm{Sin}^{-1} x}$ $(0 < x < 1)$ (2) $(\log x)^{\log x}$ $(x > 1)$ (3) $(\cosh x)^x$

（解答）

(1) $y = x^{\mathrm{Sin}^{-1} x}$ $(0 < x < 1)$ とおく．両辺とも正なので対数をとると

$$\log y = \log x^{\mathrm{Sin}^{-1} x} = \mathrm{Sin}^{-1} x \cdot \log x$$

であるから，両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\mathrm{Sin}^{-1} x}{x}$$

となる．よって

$$y' = y\left(\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\mathrm{Sin}^{-1} x}{x}\right) = x^{\mathrm{Sin}^{-1} x}\left(\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\mathrm{Sin}^{-1} x}{x}\right)$$

(2) $y = (\log x)^{\log x}$ $(x > 1)$ とおく．両辺とも正なので対数をとると

$$\log y = \log(\log x)^{\log x} = \log x \cdot \log(\log x)$$

であるから，両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\log(\log x) + \log x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\log(\log x) + 1}{x}$$

となる．よって

$$y' = y\frac{\log(\log x) + 1}{x} = (\log x)^{\log x}\frac{\log(\log x) + 1}{x}$$

(3) $y = (\cosh x)^x$ とおく．両辺とも正なので対数をとると

$$\log y = \log(\cosh x)^x = x\log(\cosh x)$$

であるから，両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \log(\cosh x) + x \cdot \frac{\sinh x}{\cosh x} = \log(\cosh x) + x\tanh x$$

となる．よって

$$y' = (\cosh x)^x\{\log(\cosh x) + x\tanh x\}$$

（解答終）

練習問題 3.1. 次の関数を微分せよ．

(1) $\sqrt[3]{x^2+5}$ (2) $\dfrac{x+1}{(x^2+x)^2}$ (3) $e^{-x^2+1}\sin 2x$

(4) $e^{-1/x}$ (5) $x^2 2^x$ (6) $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

(7) $\log(x+\sqrt{x^2-1})$ (8) $x^{1/x}$ (9) $\sqrt{\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}$

(10) $\sqrt[3]{\dfrac{x(x-2)}{x+1}}$ (11) $\dfrac{\mathrm{Sin}^{-1} x}{\mathrm{Cos}^{-1} x}$ (12) $x^{\log x}$

(13) $(\tan x)^{\cos x}$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ (14) $(\log x)^x$ $(x > 1)$ (15) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ $(x > 0)$

(16) $\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}$ $(0 < x < 1)$ (17) $\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ $(|x| < 1)$

(18) $\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$ $(|x| < 1)$ (19) $\cos(\mathrm{Sin}^{-1}(x^2))$ $(|x| < 1)$

3.2　定義に基づいた微分可能性の判定

例題 3.6.　次の関数が $x=0$ で微分可能かどうか判定し，微分可能ならば $f'(0)$ の値を求めよ．

(1) $f(x)=x|x|$　　(2) $f(x)=\begin{cases} x\log|x| & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$　　(3) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$

（解答）

(1)　平均変化率の極限値が

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0}|x|=0$$

と存在する．よって，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能で，$f'(0)=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ である．

(2)　平均変化率の極限を調べると

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\log|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0}\log|x|=-\infty$$

より，この極限値は存在しない．よって，$f(x)$ は $x=0$ で微分不可能である．

(3)　平均変化率の極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

が存在するかを調べればよい．ここで，0 に収束する数列を $a_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$b_n=\dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$ と定めれば

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=\lim_{n\to\infty}0=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=\lim_{n\to\infty}1=1$$

となる．よって，0 への近づき方に応じて値が異なるから，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ は存在しない．したがって，$f(x)$ は $x=0$ で微分不可能である．

（解答終）

絶対値があるからといって関数が微分不可能であるとは限らない．これは微分可能な関数どうしの積は微分可能であるが，微分不可能な関数の積がまた微分不可能とは限らないということである．そのため，微分可能性については毎回定義に従って確認すること．

練習問題 3.2.　次の関数 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能かどうか調べよ．

(1) $f(x)=|x|\sin x$　　(2) $f(x)=|x|\,\mathrm{Tan}^{-1}x$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$

例題 3.7. $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を次で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(1) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であることを示し，導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続ではないことを示せ．

（解答）

(1) $x \neq 0$ のときは明らかに微分可能で

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

である．次に $x = 0$ で微分可能であることを示す．そのためには，次の極限値

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$$

が存在することを示せばよい．ここで，$x \neq 0$ のとき

$$0 \leqq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leqq |x| \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (x \to 0)$$

だから，はさみうちの定理より

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \qquad \therefore \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

が成り立つ．よって，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

となる．したがって，$f(x)$ はすべての実数 x で微分可能で，導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

である．

(2) $x \neq 0$ では明らかに導関数 $f'(x)$ は連続であるから，$x = 0$ で連続かどうか考えればよい．そこで，0 に収束する数列を $a_n = \dfrac{1}{2n\pi}$，$b_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$ と定めれば

$$\lim_{n \to \infty} f'(a_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n\pi} \sin 2n\pi - \cos 2n\pi \right) = \lim_{n \to \infty} (-1) = -1$$

$$\lim_{n \to \infty} f'(b_n) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)\pi - \cos(2n+1)\pi \right\} = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

となる．よって，0 への近づき方に応じて値が異なるから，極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} f'(x)$ は存在しない．したがって

$$\lim_{x \to 0} f'(x) \neq f'(0)$$

となるので，$f'(x)$ は $x = 0$ で連続ではない．

（解答終）

練習問題 3.3. $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能で，$f'(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ．

例題 3.8.　次の関数 $f(x)$ が $x=1$ で微分可能となるような定数 a と b の値を求めよ．

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \leqq 1) \\ \dfrac{ax+b}{x+1} & (x>1) \end{cases}$$

（解答）　$f(x)$ が $x=1$ で微分可能であるためには，$f(x)$ が $x=1$ で連続であることが必要である．ここで，$f(x)$ は $x=1$ で明らかに左連続であり，$f(1)=1^2+1=2$ である．一方

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{ax+b}{x+1}=\frac{a+b}{2}$$

であるから，$x=1$ で連続となるのは $f(1)=\displaystyle\lim_{x\to 1+0} f(x)$ が成り立つときなので，$2=\dfrac{a+b}{2}$ である．よって，$b=4-a$ が得られる．

　このとき，$x>1$ では $f(x)=\dfrac{ax+4-a}{x+1}$ であるから

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\dfrac{ax+4-a}{x+1}-2}{x-1}=\frac{(a-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{a-2}{x+1}$$

となるので

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{a-2}{x+1}=\frac{a-2}{2}$$

となる．よって，$x=1$ で右微分可能で，$f'_+(1)=\dfrac{a-2}{2}$ となる．

　一方，左微分係数は

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x^2+1)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}(x+1)=2$$

となるから，$x=1$ で微分可能となるのは $f'_+(1)=f'_-(1)$ が成り立つときなので，$\dfrac{a-2}{2}=2$ である．よって，求める値は $a=6,\ b=-2$ となり，このとき $x=1$ で $f(x)$ は微分可能である．

（解答終）

　一般に微分可能性については『$x=a$ で微分可能であること』と『$\displaystyle\lim_{x\to a} f'(x)$ が存在すること』は何の関係もない．つまり，次の 2 個の極限

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad \lim_{x\to a+0} f'(x)$$

に関しては 2 個の極限値が一致しないどころか，どちらか片方しか存在しないような例もある．例えば

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x \fallingdotseq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} x^2+3x+1 & (x>0) \\ -x^3+3x & (x \leqq 0) \end{cases}$$

とおくと，例題 3.7 より $\displaystyle\lim_{x\to 0} g'(x)$ は存在しないが，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $g'(0)=0$ である．また

$$\lim_{x\to +0} h'(x)=\lim_{x\to +0}(2x+3)=3, \qquad \lim_{x\to -0} h'(x)=\lim_{x\to -0}(-3x^2+3)=3$$

より，$\displaystyle\lim_{x\to 0} h'(x)=3$ であるが，$h(0)=-0^3+3\cdot 0=0$ より

$$\lim_{x\to +0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{x^2+3x+1-0}{x}=\lim_{x\to +0}\left(x+3+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

となるので，$h(x)$ は $x=0$ で微分不可能である．

　関数の連続性や微分可能性の判定に関しては，まず定義を正確に確認する癖をつけておくこと．

3.3　微分法の応用その 1：接線の方程式と 1 次近似計算

ここでは高校数学で学習した接線の本格的な応用について説明する．接線の定義より，$x = a$ の近くでは関数 $y = f(x)$ のグラフと接線 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ は近いことがわかる．つまり

$$f(x) \fallingdotseq f'(a)(x-a) + f(a) \qquad (x \text{ が } a \text{ に十分近いとき})$$

が成り立つ．これを **1 次近似**の公式という．このことを利用して，いろいろな値の近似値を求めてみる．

例 3.9.　$y = f(x) = \sin x$ の $x = \dfrac{\pi}{3}$ における接線は，$f'(x) = \cos x$ より

$$y = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

となる．よって，x が $\dfrac{\pi}{3}$ に十分近いとき

$$\sin x \fallingdotseq \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

が成り立つ．そこで，$x = 59^\circ = \dfrac{59}{180}\pi$ とすると

$$\sin 59^\circ \fallingdotseq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{360} \fallingdotseq \frac{1.7320}{2} - \frac{3.1415}{360} = \frac{308.6185}{360} = 0.85727\cdots$$

となる．本に載っている値は

$$\sin 59^\circ = 0.8572$$

であるから，実際に近い値を関数電卓を使わずに求められたことになる．

例 3.10.　$y = f(x) = 4\sqrt{1+x}$ の $x = 0$ における接線は，$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}}$ より

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 2x + 4$$

となる．よって，x が 0 に十分近いとき

$$4\sqrt{1+x} \fallingdotseq 2x + 4$$

が成り立つ．そこで，$x = \dfrac{1}{16}$ とすると

$$\sqrt{17} \fallingdotseq 2 \cdot \frac{1}{16} + 4 = \frac{33}{8} = 4.125\cdots$$

となる．電卓で打ってみると

$$\sqrt{17} = 4.1231\cdots$$

となり，小数第 2 位までは同じものが計算によって求められた．

これらの例のように，1 次近似の公式を用いると本当の値が不明なものの近似値を求めることができる．ただし，この公式だけでは**真の値と近似値の誤差**がどの程度かについて，既に真の値を知っていないとわからない．実は 1 次近似の公式を適用しても誤差が大きい場合もある．これは関数の増減が激しく，すぐに接線から離れていってしまう場合である．そこで後で述べる Taylor の定理が重要となってくる．これは真の値と求めた近似値との誤差が，真の値を知らなくてもわかるというものである．

なお，高校数学では微分法は「増減表を書いて極値を求めたりグラフを描く」ための道具という扱いだが，実際に応用される場合にはこのような近似計算のための道具といっても過言ではないと思う．他には導関数が変化の様子を表すという点を利用した「微分方程式」という形で，理工学系に限らず経済や保険数理など幅広い分野で現れる．

4　高階導関数

4.1　高階導関数と C^n 級関数

定義 4.1.（高階導関数）
関数 $f(x)$ が区間 I 上で微分可能で，さらに導関数 $f'(x)$ も I 上で微分可能であるとき，f は **2 回微分可能**であるという．このとき，$f'(x)$ の導関数を f の **2 階導関数**といい，$y = f(x)$ の 2 階導関数を

$$f''(x), \quad f^{(2)}(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x), \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x), \quad y'', \quad y^{(2)}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$$

などで表す．

同様に $f(x)$ の $n-1$ 階導関数 $f^{(n-1)}(x)$ が I 上で微分可能であるとき，f は n **回微分可能**であるという．このとき，$f^{(n-1)}(x)$ の導関数を f の n **階導関数**といい，$y = f(x)$ の n 階導関数を

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x), \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}$$

などで表す．ただし，$f^{(0)}(x) = f(x)$ と約束することにする．

記号の意味としては，n 回微分したものを $f^{(n)}(x)$ や $y^{(n)}$ で表すということである．かっこを忘れると y^n となってしまい，明らかに意味が変わるので注意すること．当然ながら，$f^{(1)}(x) = f'(x)$ である．

高校数学において $y^{(n)}$ は n 次導関数と呼ばれるが，より適切な表記である n 階導関数を用いることにする．実際，微分方程式に対して階数という概念があり，それは微分方程式が含む未知関数の最大階数のことである．例えば，$y'' - y = 0$ は 2 階の微分方程式と呼び，2 次の微分方程式とは呼ばない．

定義 4.2.（C^n 級関数）
関数 $f(x)$ が区間 I 上で n 回微分可能で，さらに $f^{(n)}(x)$ が I 上で連続であるとき，f は I 上で C^n **級**であるという．
また，$f(x)$ が区間 I 上で何回でも微分可能なとき，f は I 上で C^∞ **級**であるという．

定義から C^∞ 級である関数は，すべての自然数 n について C^n 級関数となっている．

例 4.3.　$y = x^3$ の n 階導関数

（解答）　実際に微分すれば

$$y' = 3x^2, \qquad y'' = 6x, \qquad y''' = 6, \qquad y^{(n)} = 0 \ \ (n \geqq 4)$$

これより，$y = x^3$ は $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数である．

（解答終）

例 4.4.　いくつか例を挙げておくので，それぞれの例となっていることを計算して確認してみること．

(1) 関数 $f(x) = x|x|$ は例題 3.6 より，C^1 級関数であるが 2 回微分可能ではない．

(2) 関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は例題 3.7 より，1 回微分可能ではあるが C^1 級関数ではない．

次の関数はいずれも定義域で何回でも微分可能であることがわかるから，C^∞ 級関数である．

例題 4.5. 次の関数の n 階導関数を求めよ．

(1) e^x (2) $\sin x$ (3) $\cos x$ (4) $\dfrac{1}{x+1}$ (5) $\log(x+1)$

（解答） 与えられた関数を y とおく．

(1) 実際に微分すれば

$$y^{(n)} = e^x \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(2) 実際に微分していくと

$$y' = \cos x, \qquad y'' = -\sin x, \qquad y^{(3)} = -\cos x, \qquad y^{(4)} = \sin x, \qquad \cdots$$

となり，$y^{(4)} = y$ である．よって，これ以降はこの繰り返しになる．これを 1 つの式にまとめれば

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(3) 実際に微分していくと

$$y' = -\sin x, \qquad y'' = -\cos x, \qquad y^{(3)} = \sin x, \qquad y^{(4)} = \cos x, \qquad \cdots$$

となり，$y^{(4)} = y$ である．よって，これを 1 つの式にまとめると

$$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(4) $y = (x+1)^{-1}$ を実際に微分していくと

$$y' = (-1)(x+1)^{-2}$$
$$y'' = (-1)(-2)(x+1)^{-3}$$
$$y''' = (-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4}$$

となり，これを繰り返せば

$$y^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)(1+x)^{-(n+1)} = (-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(5) $y' = \dfrac{1}{x+1}$ であるから，(4) より

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

（解答終）

ここまでに挙げた例は重要なので公式としてまとめておく．

命題 4.6. （基本的な n 階導関数）
$a,\ \alpha \in \mathbb{R}$ とすると，$n = 1, 2, \ldots$ のとき以下が成り立つ．

(1) $\dfrac{d^n}{dx^n}\, e^x = e^x$

(2) $\dfrac{d^n}{dx^n}\, \sin x = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(3) $\dfrac{d^n}{dx^n}\, \cos x = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(4) $\dfrac{d^n}{dx^n}\, (x+a)^\alpha = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(x+a)^{\alpha-n}$

(5) $\dfrac{d^n}{dx^n}\, \log(x+a) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x+a)^n}$

ただし，(1)〜(4) は $n = 0$ でも成り立つ．

証明. 証明は前に述べた例と全く同様なので，各自確かめよ． □

命題 4.7. $a, b \in \mathbb{R}$ とする．関数 $f(x)$ と $g(x)$ がともに n 回微分可能であるとき，n 階導関数について次の公式が成り立つ．

(1) $\dfrac{d^n}{dx^n}\, f(ax+b) = a^n f^{(n)}(ax+b)$

(2) $\dfrac{d^n}{dx^n}\, \{af(x) + bg(x)\} = af^{(n)}(x) + bg^{(n)}(x)$

証明.

(1) 実際に微分すれば

$$\{f(ax+b)\}' = af'(ax+b), \qquad \{f(ax+b)\}'' = \{af'(ax+b)\}' = a^2 f''(ax+b), \qquad \cdots$$

であるから，（厳密には数学的帰納法により）$\{f(ax+b)\}^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$ が成り立つ．

(2) 微分の線形性より明らかである．

□

練習問題 4.1. $x = g(t)$ と $y = f(t)$ がともに 2 回微分可能で，さらに $x = g(t)$ に逆関数が存在し，$g'(t) \neq 0$ とする．このとき

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f''(t)g'(t) - f'(t)g''(t)}{\{g'(t)\}^3}$$

となることを示せ．

練習問題 4.2. 関数 $f(x)$ は 2 回微分可能で，さらに逆関数 $g(x)$ をもつとする．

$$f(1) = 2, \qquad f'(1) = 2, \qquad f''(1) = 3$$

のとき，$g''(2)$ の値を求めよ．

4.2 Leibniz の公式

一般には関数 $h(x)$ の n 階導関数を求めるのは困難なことが多い．ただし，その関数が $h(x) = f(x)g(x)$ のように積の形で表され，さらに $f(x)$ と $g(x)$ の n 階導関数が分かっている場合には次の Leibniz の公式から計算することができる．これは積の微分法を高階導関数に拡張したものである．

定理 4.8. （Leibniz の公式）
関数 $f(x)$ と $g(x)$ がともに n 回微分可能であるとき，n 階導関数について

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$

が成り立つ．

証明． n に関する数学的帰納法で証明する．

(i) $n = 1$ のときは

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

のことであるから，これは積の微分法なので成り立つ．

(ii) $n = m\ (m \geqq 1)$ のときに成り立つと仮定する．
$f(x)$ と $g(x)$ がともに $m+1$ 回微分可能であるとすれば，当然 m 回微分可能だから数学的帰納法の仮定より

$$\{f(x)g(x)\}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k\, f^{(k)}(x)\, g^{(m-k)}(x)$$

が成り立つ．この両辺をさらに微分すれば，第 1 章命題 2.4(2) を用いて

$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}^{(m+1)} &= \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k \left\{f^{(k)}(x)\, g^{(m-k)}(x)\right\}' \\
&= \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k \left\{f^{(k+1)}(x)\, g^{(m-k)}(x) + f^{(k)}(x)\, g^{(m-k+1)}(x)\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(k+1)}(x)\, g^{(m-k)}(x) + \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(k)}(x)\, g^{(m-k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} {}_m\mathrm{C}_{k-1} f^{(k)}(x)\, g^{(m-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(k)}(x)\, g^{(m-k+1)}(x) \\
&= f^{(m+1)}(x)g(x) + \sum_{k=1}^{m} ({}_m\mathrm{C}_{k-1} + {}_m\mathrm{C}_k) f^{(k)}(x)\, g^{(m-k+1)}(x) + f(x)g^{(m+1)}(x) \\
&= f^{(m+1)}(x)g(x) + \sum_{k=1}^{m} {}_{m+1}\mathrm{C}_k f^{(k)}(x)\, g^{(m-k+1)}(x) + f(x)g^{(m+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1}\mathrm{C}_k\, f^{(k)}(x)\, g^{(m+1-k)}(x)
\end{aligned}$$

が得られる．よって，$n = m + 1$ のときにも成り立つ．

以上より，すべての自然数 n に対して定理の主張が成り立つ． □

注意 4.9. Leibniz の公式から積の微分は 2 項定理と同じような形になることがわかる．よく使われるので $n = 1, 2, 3$ のときを具体的に書いておくと

$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\{f(x)g(x)\}'' &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \\
\{f(x)g(x)\}''' &= f'''(x)g(x) + 3f''(x)g'(x) + 3f'(x)g''(x) + f(x)g'''(x)
\end{aligned}$$

となる．

例題 4.10. 次の関数の n 階導関数を求めよ．

(1) xe^{2x}　(2) x^2e^x　(3) $x^2\sin x$

（解答） 与えられた関数を y とおく．

(1) $(x)^{(k)} = 0$ $(k \geqq 2)$ であるから，$n \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\,(x)^{(k)}\,(e^{2x})^{(n-k)} &= x(e^{2x})^{(n)} + {}_n\mathrm{C}_1\,(x)'(e^{2x})^{(n-1)} \\
&= x \cdot 2^n e^{2x} + n \cdot 1 \cdot 2^{n-1}e^{2x} \\
&= 2^{n-1}(2x+n)e^{2x}
\end{aligned}$$

(2) $(x^2)^{(k)} = 0$ $(k \geqq 3)$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\,(x^2)^{(k)}\,(e^{x})^{(n-k)} &= x^2(e^x)^{(n)} + {}_n\mathrm{C}_1\,(x^2)'(e^x)^{(n-1)} + {}_n\mathrm{C}_2\,(x^2)''(e^x)^{(n-2)} \\
&= x^2 \cdot e^x + n \cdot 2x \cdot e^x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot e^x \\
&= \{x^2 + 2nx + n(n-1)\}e^x
\end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．

(3) $(x^2)^{(k)} = 0$ $(k \geqq 3)$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\,(x^2)^{(k)}\,(\sin x)^{(n-k)} \\
&= x^2(\sin x)^{(n)} + {}_n\mathrm{C}_1\,(x^2)'(\sin x)^{(n-1)} + {}_n\mathrm{C}_2\,(x^2)''(\sin x)^{(n-2)} \\
&= x^2 \cdot \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n \cdot 2x \cdot \sin\left(x + \frac{n-1}{2}\,\pi\right) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot \sin\left(x + \frac{n-2}{2}\,\pi\right) \\
&= \{x^2 - n(n-1)\}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2nx\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．

（解答終）

この例のように積の片方が多項式の場合には比較的簡単に n 階導関数が計算できることが多い．ただし，もう片方の n 階導関数がわからないときには，この定理は有効ではないこともある．

練習問題 4.3. 次の関数の n 階導関数を求めよ．

(1) x^2e^{2x}　(2) x^3e^x　(2) $x^2\cos 2x$

4.3　n 階導関数の計算例

例題 4.11.　次の関数の n 階導関数を求めよ.

(1) 2^x　　(2) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$　　(3) $\sin x\cos x$　　(4) $\sin^3 x$

(5) $\dfrac{e^x}{x}$　　(6) $\sqrt{x-1}$　　(7) $x\log x$

（解答）　与えられた関数を y とおく.

(1)　実際に微分していくと

$$y' = 2^x\log 2,\qquad y'' = 2^x(\log 2)^2,\qquad y''' = 2^x(\log 2)^3,\qquad \cdots$$

であるから，$y^{(n)} = 2^x(\log 2)^n$ である（厳密には数学的帰納法だが，この程度の問題ならこれでよい）.

(2)　$y = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-1}\right)$ であるから，例 4.5 と同様にして

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}\right\} = \frac{(-1)^n n!}{2}\left\{\frac{1}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right\}$$

(3)　$y = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ であるから

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\cdot 2^n\sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) = 2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

(4)　3 倍角の公式より $y = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ であるから

$$y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

(5)　$y = x^{-1}e^x$ であるから

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\,(x^{-1})^{(n-k)}\,(e^x)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}\,e^x = \frac{(-1)^n n! e^x}{x^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\,x^k$$

(6)　$y = (x-1)^{1/2}$ であるから，実際に微分すれば

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)(x-1)^{(1/2)-n} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n(x-1)^{(2n-1)/2}}$$

(7)　$y' = 1 + \log x,\ y'' = \dfrac{1}{x}$ であるから，$n \geqq 3$ ならば

$$y^{(n)} = (x^{-1})^{(n-2)} = \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}$$

よって

$$y^{(n)} = \begin{cases} 1 + \log x & (n = 1) \\ \dfrac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}} & (n \geqq 2) \end{cases}$$

（解答終）

関数によっては n 階導関数を予想して数学的帰納法で証明することができるものもある.

例題 4.12.　関数 $y = e^x \sin x$ の n 階導関数が

$$y^{(n)} = 2^{n/2} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

であることを数学的帰納法を用いて示せ.

（解答）

(i) $n = 1$ のとき，三角関数の合成を用いれば

$$y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}\, e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

であるから成り立つ.

(ii) $n = k \ \ (k \geqq 1)$ で成り立つと仮定する．つまり

$$y^{(k)} = 2^{k/2} e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{4}\right)$$

であると仮定する．このとき，仮定した式の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}
y^{(k+1)} &= 2^{k/2} \left\{ e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) \right\}' \\
&= 2^{k/2} \left\{ e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) + e^x \cos\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) \right\} \\
&= 2^{k/2} e^x \left\{ \sin\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) \right\} \\
&= 2^{k/2} e^x \cdot \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= 2^{(k+1)/2} e^x \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

よって，$n = k + 1$ のときも成り立つ.

(i)(ii) より，すべての自然数 n について，$y^{(n)} = 2^{n/2} e^x \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$ が成り立つ.

（解答終）

練習問題 4.4.　関数 $y = e^x \cos x$ の n 階導関数は

$$y^{(n)} = 2^{n/2} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

であることを数学的帰納法を用いて示せ.

発展問題 4.5.　関数 $y = \mathrm{Tan}^{-1}\, x$ の n 階導関数は

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

であることを示せ.

4.4　漸化式を利用した高階微分係数の計算

n 階導関数が求まらなくても，n 階微分係数なら漸化式を解くことにより求められることがある．

例題 4.13.　$f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\,x$ とおくとき，$f^{(n)}(0)$ の値を求めよ．

（解答）　$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ より

$$(1+x^2)f'(x) = 1$$

となる．自然数 n に対してこの両辺を n 回微分すると，右辺は 0 であり，左辺は Leibniz の公式より

$$\{(1+x^2)f'(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (1+x^2)^{(k)}\{f'(x)\}^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (1+x^2)^{(k)} f^{(n-k+1)}(x)$$

となる．ここで，$(1+x^2)^{(k)} = 0 \ \ (k \geqq 3)$ なので

$$\begin{aligned}
\{(1+x^2)f'(x)\}^{(n)} &= {}_n\mathrm{C}_0(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + {}_n\mathrm{C}_1(1+x^2)'f^{(n)}(x) + {}_n\mathrm{C}_2(1+x^2)''f^{(n-1)}(x) \\
&= (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + n \cdot 2x \cdot f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot f^{(n-1)}(x) \\
&= (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0
\end{aligned}$$

であり，これに $x = 0$ を代入すれば

$$f^{(n+1)}(0) + n(n-1)f^{(n-1)}(0) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が成り立つ．

よって，$a_n = f^{(n)}(0)$ とおけば

$$a_0 = f(0) = 0, \qquad a_1 = f'(0) = 1, \qquad a_{n+1} = -n(n-1)a_{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

である．ゆえに

$$a_{2n} = -(2n-1)(2n-2)a_{2n-2}$$

であるから，

$$a_{2n} = (-1)^{n-1}(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\cdots 1 \cdot 0 \cdot a_0 = 0$$

であり，また

$$a_{2n-1} = -(2n-2)(2n-3)a_{2n-3}$$

であるから

$$a_{2n-1} = (-1)^{n-1}(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdots 2 \cdot 1 \cdot a_1 = (-1)^{n-1}(2n-2)!$$

である．したがって

$$f^{(2n)}(0) = 0, \qquad f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}(2n-2)! \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

（解答終）

この例題 4.13 のように多項式と $f(x)$ の導関数のみからなる関係式を導けば，ライプニッツの公式を用いることにより漸化式を得ることができる．なお，例題 4.13 で $f^{(2n)}(0) = 0$ となることは，$f(x)$ が奇関数であることからも得ることができる．

例題 4.14.　$f(x) = (\mathrm{Sin}^{-1} x)^2$ とおくとき，$f^{(n)}(0)$ の値を求めよ．

（解答）　$f'(x) = 2\,\mathrm{Sin}^{-1} x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ より

$$\sqrt{1-x^2}\, f'(x) = 2\,\mathrm{Sin}^{-1} x$$

となる．この両辺を微分して

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, f'(x) + \sqrt{1-x^2}\, f''(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

より

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$$

が成り立つ．自然数 n に対して，この両辺を n 回微分すれば，Leibniz の公式より

$$\begin{aligned}
\{(1-x^2)f''(x)\}^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (1-x^2)^{(k)} f^{(n-k+2)}(x) \\
&= (1-x^2)f^{(n+2)}(x) + n\cdot(-2x)\cdot f^{(n+1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}\cdot(-2)\cdot f^{(n)}(x) \\
&= (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nxf^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

$$\{xf'(x)\}^{(n)} = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x)$$

より

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

が得られる．この式に $x=0$ を代入すれば

$$f^{(n+2)}(0) - n^2 f^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ．

よって，$a_n = f^{(n)}(0)$ とおけば

$$a_1 = f'(0) = 0, \qquad a_2 = f''(0) = 2, \qquad a_{n+2} = n^2 a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる．ゆえに，偶数番目の項は

$$a_{2n} = (2n-2)^2 a_{2n-2} = 4(n-1)^2 a_{2n-2}$$

より

$$a_{2n} = 4(n-1)^2 \cdot 4(n-2)^2 \cdots 4 \cdot a_2 = 2^{2n-1}\{(n-1)!\}^2$$

である．また，奇数番目の項は

$$a_{2n-1} = (2n-3)^2 a_{2n-3}$$

より

$$a_{2n-1} = (2n-3)^2(2n-5)^2 \cdots 1^2 \cdot a_1 = 0$$

である．したがって

$$f^{(2n)}(0) = 2^{2n-1}\{(n-1)!\}^2, \qquad f^{(2n-1)}(0) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

（解答終）

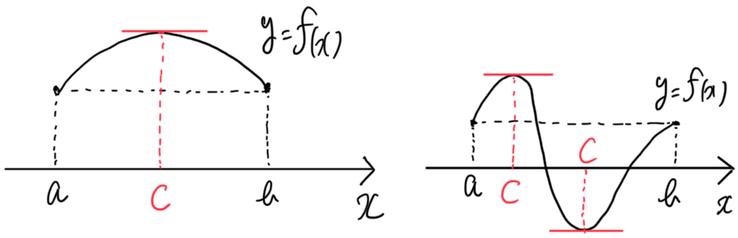
練習問題 4.6.　次の関数 $f(x)$ に対して，$f^{(n)}(0)$ の値を求めよ．

(1) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1} x$　　(2) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}\,)$　　(3) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

5　平均値の定理とその応用

5.1　平均値の定理

導関数の性質を調べるためには，この節で述べる平均値の定理が最も重要である．そのためにロルの定理を準備する．これは大まかに言えば，微分可能な関数が区間の両端で同じ値をとれば，どこかで微分係数が 0 となるという主張である．下の図も参考に証明を読んでみること．



定理 5.1.　（Rolle の定理）

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続，開区間 (a,b) 上で微分可能で，さらに $f(a)=f(b)$ であるとする．このとき

$$f'(c)=0, \qquad a<c<b$$

をみたす c が存在する．

証明.　$f(x)$ が定数関数のときは定理の主張は明らかに成り立つ（c は a と b の間の数なら何でもよい）ので，定数関数でないとする．

$f(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数なので，第 4 章定理 2.17（最大値・最小値の定理）より最大値と最小値が存在する．ここで $f(a)=f(b)$ であり，かつ $f(x)$ は定数関数でないから，$x=a,b$ 以外で最大値または最小値をとる．そこで，$f(x)$ が $x=c$ $(a<c<b)$ で最大値をとる場合を考える．

このとき，$a \leqq x \leqq b$ において $f(c) \geqq f(x)$ であるから，$0<h<b-c$ に対して

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqq 0$$

が成り立つので，右極限をとると

$$f'_+(c)=\lim_{h\to+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqq 0$$

となる．一方，$a-c<h<0$ に対して

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqq 0$$

が成り立つので，左極限をとると

$$f'_-(c)=\lim_{h\to-0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqq 0$$

である．仮定より $f(x)$ は $x=c$ で微分可能だから，$f'(c)=f'_+(c)=f'_-(c)$ なので

$$0 \leqq f'_-(c)=f'(c)=f'_+(c) \leqq 0$$

より，$f'(c)=0$ が成り立つ．よって，この c が求めるものである．

$f(x)$ が $x=c$ で最小値をとるときも，不等号の向きに注意すれば同様に証明できる．　□

注意 5.2.　この定理の証明から，微分可能な関数 $f(x)$ について

$$f(x) \text{ が } x=c \text{ で極値をとる} \quad \Longrightarrow \quad f'(c)=0$$

であることがわかる．ただし，極値の正確な定義は後で述べる．

また，Rolle の定理の主張における c は 1 つだけとは限らず複数個存在することもあるので注意すること．定理の主張は「少なくとも 1 個は条件をみたす c が存在する」というだけで，実際に c が何個あるかやその具体的な値に関しては何もわからない．しかし，後で見るように “存在することを保証する” だけで議論できることはたくさんあるので，必ず憶えてくこと．

定理 5.3. （平均値の定理）
関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続，開区間 (a,b) 上で微分可能であるとする．このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \qquad a<c<b$$

をみたす c が存在する．

証明. $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ とおき，関数 $F(x)$ を

$$F(x)=f(x)-k(x-a) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

で定める．このとき，$F(x)$ も閉区間 $[a,b]$ 上で連続，開区間 (a,b) 上で微分可能であり，さらに

$$F(a)=f(a), \qquad F(b)=f(b)-k(b-a)=f(a)$$

より，$F(a)=F(b)$ が成り立つ．よって，定理 5.1（Rolle の定理）より

$$F'(c)=0, \qquad a<c<b$$

となる c が存在する．ここで

$$F'(x)=f'(x)-k$$

であるから

$$F'(c)=f'(c)-k=0$$

より

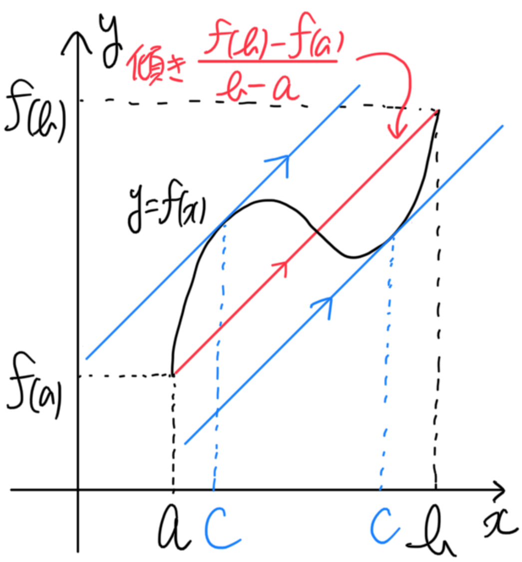
$$f'(c)=k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

が成り立つ．ゆえに，この c が求めるものである． □

平均値の定理は，閉区間 $[a,b]$ において

$f(x)$ の $[a,b]$ での平均変化率 $=$ 点 c での接線の傾き

となる c が少なくとも 1 個は開区間 (a,b) に存在するということを主張している．もちろん 2 個以上存在する可能性を否定するものではなく，具体的な c の値や個数についてはこの定理からはわからない．



定理の仮定は『関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上で連続，開区間 (a,b) 上で微分可能』とやや複雑であるが，もし関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上で微分可能ならば自動的に $f(x)$ は $[a,b]$ 上で連続となるので，平均値の定理を適用することができる．ただし，定理の仮定を『閉区間 $[a,b]$ 上で微分可能』としてしまうと，関数 $f(x)=\sqrt{x}$ のような場合に適用できなくなる．実際，$f(x)=\sqrt{x}$ は閉区間 $[0,1]$ 上で連続，開区間 $(0,1)$ 上で微分可能であるが，$x=0$ では微分不可能である．このように閉区間の端点で連続であれば微分不可能でも平均値の定理は適用できるので，定理の仮定は正確に理解しておくこと．

なお，仮定を「閉区間 $[a,b]$ 上で微分可能，開区間 (a,b) 上で連続」と述べてある答案がたまに見受けられるが，そのような定理の仮定は絶対にあり得ない．その理由がすぐにわからない場合には，ここまでに述べた内容をしっかりと見直すこと．

定理 5.4. （Cauchy の平均値の定理）

関数 $f(x)$ と $g(x)$ はともに閉区間 $[a,b]$ 上で連続，開区間 (a,b) 上で微分可能であり，さらに

$$g(a) \neq g(b), \qquad g'(x) \neq 0 \quad (a < x < b)$$

とする．このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad a < c < b$$

をみたす c が存在する．

証明. $k = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ とおき，関数 $F(x)$ を

$$F(x) = f(x) - f(a) - k(g(x) - g(a)) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

で定める．このとき，$F(x)$ も閉区間 $[a,b]$ 上で連続，開区間 (a,b) 上で微分可能であり，さらに

$$F(a) = 0, \qquad F(b) = f(b) - f(a) - k(g(b) - g(a)) = 0$$

より，$F(a) = F(b)$ が成り立つ．よって，定理 5.1（Rolle の定理）より

$$F'(c) = 0, \qquad a < c < b$$

となる c が存在する．ここで，$F'(x) = f'(x) - kg'(x)$ であるから

$$F'(c) = f'(c) - kg'(c) = 0$$

である．ゆえに，$g'(c) \neq 0$ より

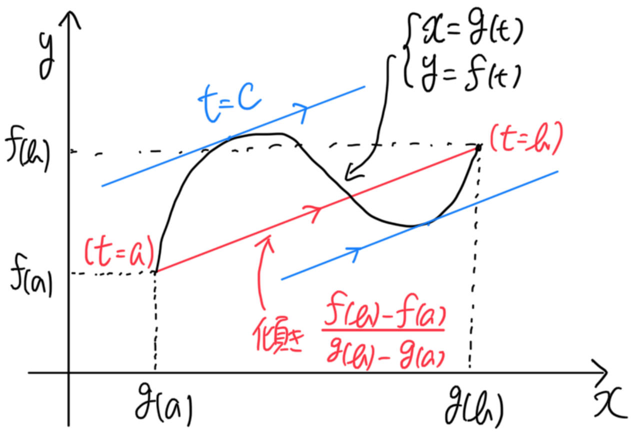
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

が成り立つ．したがって，この c が求めるものである． □

曲線 $C\colon x = g(t),\ y = f(t)$ を考える．C 上の 2 点 $(g(a), f(a))$ と $(g(b), f(b))$ を結ぶ直線の傾きが $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ である．一方，パラメータ表示された関数の導関数の公式より $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$ であるから

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad a < c < b$$

とは 2 点 $(g(a), f(a))$ と $(g(b), f(b))$ を結ぶ直線と等しい傾きをもつ接線が存在するということである．



Cauchy の平均値の定理の主張のポイントは，$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ のように分母と分子で同じ c がとれるということである．もし分母と分子に別々に平均値の定理を適用すれば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c_1), \quad a < c_1 < b, \qquad \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c_2), \quad a < c_2 < b$$

より

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

が得られるが，c_1 と c_2 は同じ値とは限らない．この問題が Cauchy の平均値の定理によってクリアされる（同じ c が選べる）ことが，後で説明するロピタルの定理の証明において重要な道具となる．

5.2 微分法の応用その 2：関数の増減と凹凸

定理 5.5. 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上で連続，開区間 (a,b) 上で微分可能であり，さらに

$$f'(x) = 0 \qquad (a < x < b)$$

であるならば，$f(x)$ は $[a,b]$ 上の定数関数である．

証明. $a < x_0 \leqq b$ となる任意の点 x_0 をとる．$f(x)$ は閉区間 $[a, x_0]$ 上で連続，開区間 (a, x_0) 上で微分可能であるから，平均値の定理より

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = f'(c), \qquad a < c < x_0$$

となる c が存在する．ここで，定理の仮定より $f'(c) = 0$ であるから，$f(x_0) - f(a) = 0$ となり，$f(x_0) = f(a)$ が成り立つ．x_0 は任意だったから，$f(x)$ は定数関数である． □

注意 5.6. 定理 5.5 は $\mathbb{R}$ 上の関数や開区間上の関数についても成り立つ．証明はほぼ同様である．

例題 5.7. $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$2\,\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{x} + \mathrm{Cos}^{-1}(2x-1) = \pi$$

（解答） 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 2\,\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{x} + \mathrm{Cos}^{-1}(2x-1) \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

で定めると，$f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ 上で連続，開区間 $(0,1)$ 上で微分可能で，$0 < x < 1$ において

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} = 0$$

が成り立つ．よって，$f(x)$ は $[0,1]$ 上の定数関数である．また

$$f(0) = 2\,\mathrm{Sin}^{-1}0 + \mathrm{Cos}^{-1}(-1) = 2 \cdot 0 + \pi = \pi$$

より，恒等的に $f(x) = \pi$ となる．

（解答終）

例題 5.8. 関数 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \mathrm{Tan}^{-1}x$ は定数関数であることを証明し，その定数の値を求めよ．

（解答） $f(x)$ を微分すれば

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

が成り立つ．よって，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の定数関数である．さらに

$$f(0) = \mathrm{Sin}^{-1}0 - \mathrm{Tan}^{-1}0 = 0 - 0 = 0$$

であるから，恒等的に $f(x) = 0$ である．

（解答終）

このように逆三角関数など進んだ内容を扱うと，見た目では定数関数とはわからないが実際には定数であることがある．定理 5.5 は当たり前すぎて盲点になりやすいので，必要なときに適用できるよう意識して憶えておくこと．

定理 5.9. （導関数と関数の増減）
関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続，開区間 (a,b) 上で微分可能とする．

(1) $f(x)$ が $[a,b]$ 上で単調増加であるための必要十分条件は

$$f'(x) \geqq 0 \qquad (a < x < b)$$

となることである．

(2) $f'(x) > 0 \quad (a < x < b)$ ならば，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で狭義単調増加である．

(3) $f(x)$ が $[a,b]$ 上で単調減少であるための必要十分条件は

$$f'(x) \leqq 0 \qquad (a < x < b)$$

となることである．

(4) $f'(x) < 0 \quad (a < x < b)$ ならば，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で狭義単調減少である．

証明． すべて平均値の定理から証明できる．証明は同様なので (1)，(2) だけ証明する．

(1) $f(x)$ が $[a,b]$ 上で単調増加であるとすると，$h > 0$ と $h < 0$ のどちらでも

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqq 0 \qquad (a < x < b)$$

が成り立つから

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqq 0 \qquad (a < x < b)$$

が得られる．

逆に $f'(x) \geqq 0 \quad (a < x < b)$ であるとする．$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の x_1 と x_2 をとる．このとき，平均値の定理より

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c), \qquad x_1 < c < x_2$$

となる c が存在する．ここで，定理の仮定より $f'(c) \geqq 0$ であるから

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2-x_1) \geqq 0$$

より，$f(x_1) \leqq f(x_2)$ が成り立つ．x_1 と x_2 は任意なので，f は $[a,b]$ 上で単調増加である．

(2) $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の x_1 と x_2 をとる．このとき，平均値の定理より

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c), \qquad x_1 < c < x_2$$

となる c が存在する．ここで，定理の仮定より $f'(c) > 0$ であるから

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2-x_1) > 0$$

より，$f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つ．x_1 と x_2 は任意なので，f は $[a,b]$ 上で狭義単調増加である．

□

注意 5.10. 定理 5.9(2) の逆である

$$f \text{ は } [a,b] \text{ 上で狭義単調増加} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) > 0 \qquad (a < x < b)$$

は成り立たない．例えば $f(x) = x^3$ は狭義単調増加だが，$f'(x) = 3x^2$ であるから $f'(0) = 0$ となる．このときでも，$f'(x) \geqq 0$ は当然成り立っている．また，1 点 $x = p$ で $f'(p) > 0$ でも，$x = p$ の近くで関数 $f(x)$ が増加しているとは限らない．ある区間で $f'(x) \geqq 0$ となることが重要である．

次に関数の増減を利用した極値の求め方について復習する．

定義 5.11. **（極大・極小）**
関数 $f(x)$ は点 a の近傍で定義されているとする．

(1) ある正の数 δ が存在して

$$0 \fallingdotseq |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(a)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は点 a で**極大**であるといい，$f(a)$ を**極大値**という．

(2) ある正の数 δ が存在して

$$0 \fallingdotseq |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(a)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は点 a で**極小**であるといい，$f(a)$ を**極小値**という．

(3) 極大値と極小値をまとめて**極値**という．

前にも述べたが，重要なのでもう一度繰り返しておくと

定理 5.12. 関数 $f(x)$ は点 a で極値をとり，かつ点 a で微分可能ならば，$f'(a)=0$ である．

証明. 定理 5.1（Rolle の定理）とほとんど同様であるから，練習問題とする． □

注意 5.13. 上の定理は $f(x)$ が点 a で微分可能ならば $f'(a)=0$ ということを主張しているのであって，一般には微分不可能な点で極値をとることがある．
例えば，$f(x)=|x|$ は $x=0$ で極小値 $f(0)=0$ をとるが，$x=0$ で微分可能ではないから，もちろん $f'(0)=0$ などは成り立たない．

例題 5.14. 関数 $f(x)=\dfrac{4x^2+2x+4}{x^2+1}$ の極値および最大値，最小値があれば求めよ．

（解答） 導関数を計算すれば

$$f'(x)=\frac{(8x+2)\cdot(x^2+1)-(4x^2+2x+4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

より，$f'(x)=0$ となるのは $x=\pm 1$ のときである．また，極限を計算すると

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=4$$

となる．以上のことより，増減表は

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(4)	$\searrow$	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	(4)

となる．ゆえに

$x=1$ のとき極大値 5,　　$x=-1$ のとき極小値 3

をとる．また，このときそれぞれが最大値，最小値にもなっているから

$x=1$ のとき最大値 5,　　$x=-1$ のとき最小値 3

をとる．

（解答終）

もしこの例題で極値だけを求めるのならば，極限 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ を求める必要はない．もちろん常に極大値が最大値になるわけではないので注意すること．

例題 5.15. 関数 $f(x) = \log\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ の極値を求めよ.

（解答） $f(x) = \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ なので，導関数を計算すれば

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x - \sqrt{3}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{x-\sqrt{3}}{x^2+1}$$

より，$f'(x) = 0$ となるのは $x = \sqrt{3}$ のときである．ここで

$$f(\sqrt{3}\,) = \log\sqrt{4} - \sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3} = \log 2 - \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} = \log 2 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

であるから，増減表は

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(∞)	$\searrow$	$\log 2 - \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	(∞)

となる．ゆえに

$$x = \sqrt{3} \text{ のとき極小値 } \log 2 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

をとる．

（解答終）

例題 5.16. 関数 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\,x - 2\sqrt{1-x^2}$ の $-1 \leq x \leq 1$ における最大値と最小値を求めよ.

（解答） $-1 < x < 1$ のときに関数 $f(x)$ は微分可能で，その導関数は

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = \frac{1+2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから，$f'(x) = 0$ を解くと $x = -\dfrac{1}{2}$ である．また

$$f(1) = \mathrm{Sin}^{-1}\,1 = \frac{\pi}{2}, \qquad f(-1) = \mathrm{Sin}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\sqrt{1-\frac{1}{4}} = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$$

と合わせて，$f(x)$ の増減表は

x	-1	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{\pi}{6} - \sqrt{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$

となる．ゆえに

$$x = 1 \text{ のとき最大値 } \frac{\pi}{2}, \qquad x = -\frac{1}{2} \text{ のとき最小値 } -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$$

をとる．

（解答終）

練習問題 5.1. 定理 5.12 を示せ.

定義 5.17. （凸関数）

区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が**凸関数**であるとは，I の任意の 2 点 a, b $(a < b)$ に対して

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqq \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \qquad (a < x < b) \tag{5.1}$$

が成り立つことである．このとき，$f(x)$ は**下に凸**であるという．

さらに

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \qquad (a < x < b) \tag{5.2}$$

が成り立つとき，$f(x)$ は**狭義の凸関数**という．

また，$-f(x)$ が下に凸であるとき，$f(x)$ は**上に凸**であるという．

注意 5.18. 凸関数の定義式 (5.1) において $x = (1-t)a + tb$ とおくと，条件式は次のように表せる．

I の任意の 2 点 a, b $(a < b)$ に対して，$0 < t < 1$ ならば

$$f\big((1-t)a + tb\big) \leqq (1-t)f(a) + tf(b) \tag{5.3}$$

が成り立つとき，$f(x)$ を I における凸関数という．

これを凸関数の定義式としている本も多い．この条件式の図形的な意味を考えると，凸関数とは $y = f(x)$ のグラフ上のどの異なる 2 点をとっても，その 2 点を結んだ線分が $y = f(x)$ のグラフの下側にはこないということである．

例 5.19. 凸関数の例や凸関数でない例を挙げ，以下では数式による説明を示す．各自で関数のグラフを描いてどのような様子を表しているかを確認すること．

$f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ 上の凸関数であり，特に狭義の凸関数である．実際，$a < x < b$ に対して

$$\frac{f(b)-f(x)}{b-x} - \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{b^2-x^2}{b-x} - \frac{x^2-a^2}{x-a} = (b+x)-(x+a) = b-a > 0$$

であるから (5.2)が成り立つ．

$g(x) = |x|$ は $\mathbb{R}$ 上の凸関数であるが，狭義の凸関数ではない．実際，$a < b$ と $0 < t < 1$ に対して，三角不等式より

$$g\big((1-t)a+tb\big) = |\,(1-t)a+tb\,| \leqq |(1-t)a| + |tb| = (1-t)|a| + t|b| = (1-t)g(a) + tg(b)$$

であるから (5.3)が成り立つ．等号は a と b が同符号ならば成り立つから，狭義の凸関数ではない．

$h(x) = x^3$ は $\mathbb{R}$ 上の凸関数ではない．実際，$a = -2,\ x = 0,\ b = 1$ とすると，$a < x < b$ であるが

$$\frac{h(b)-h(x)}{b-x} - \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{1-0}{1-0} - \frac{0-(-8)}{0-(-2)} = 1-4 < 0$$

であるから (5.1)をみたさない．ただし，$h(x)$ は $[0, \infty)$ 上の狭義の凸関数である．実際，$0 \leqq a < x < b$ ならば

$$\frac{h(b)-h(x)}{b-x} - \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{b^3-x^3}{b-x} - \frac{x^3-a^3}{x-a} = (b^2+bx+x^2)-(x^2+ax+a^2) = (b-a)(b+x+a) > 0$$

であるから (5.2)が成り立つ．

このように関数が凸かどうかはその定義域によって変化しうる．また，上で述べた 2 種類の不等式 (5.1)と (5.3) は同値なものであるが，どちらが便利かは関数の形や考える問題によって異なる．

定理 5.20. （2 階導関数と凸関数）

関数 $f(x)$ が区間 I 上で連続で，I の端点を除いた開区間 $\tilde{I}$ で 2 回微分可能であるとする．

(1) $f(x)$ が I 上の凸関数であるための必要十分条件は，開区間 $\tilde{I}$ で $f''(x) \geqq 0$ となることである．

(2) 開区間 $\tilde{I}$ で $f''(x) > 0$ ならば，$f(x)$ は I 上の狭義の凸関数である．

証明.

(1) $f(x)$ が I で凸関数であるとする．$\tilde{I}$ の任意の 2 点 a, b $(a < b)$ に対して，$a < x < b$ ならば

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqq \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \tag{5.4}$$

が成り立つ．ここで，$f(x)$ は微分可能だから，(5.4)において $x \to b-0$ とすると

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{x\to b-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqq \lim_{x\to b-0} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'_-(b) = f'(b)$$

であり，また $x \to a+0$ とすると

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqq \lim_{x\to a+0} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

となる．よって，これらをまとめると

$$f'(a) \leqq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqq f'(b) \qquad \therefore\ f'(a) \leqq f'(b)$$

が成り立つ．つまり，$\tilde{I}$ において $f'(x)$ は単調増加であるから，$f''(x) \geqq 0$ が成り立つ．

逆に，開区間 $\tilde{I}$ で $f''(x) \geqq 0$ であるとする．このとき，$f'(x)$ は I で単調増加である．区間 I の任意の 2 点 a, b $(a < b)$ をとる．任意の点 $a < x < b$ に対して，平均値の定理より

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_1), \quad a < c_1 < x, \qquad \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(c_2), \quad x < c_2 < b \tag{5.5}$$

となる c_1 と c_2 が存在する．ここで，$c_1 < x$ かつ $x < c_2$ より $c_1 < c_2$ であるから，f' の単調増加性より

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_1) \leqq f'(c_2) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

より (5.1) が成り立つので，$f(x)$ は凸関数である．

(2) 開区間 $\tilde{I}$ で $f''(x) > 0$ ならば，$f'(x)$ は I で狭義単調増加である．区間 I の任意の 2 点 a, b $(a < b)$ をとる．任意の点 $a < x < b$ に対して，平均値の定理より (5.5) を満たすような c_1 と c_2 が存在する．ここで，$c_1 < c_2$ であるから，f' の狭義単調増加性より

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

より (5.2) が成り立つので，$f(x)$ は狭義の凸関数である．

□

例題 5.21.　関数 $f(x) = \dfrac{4x^2+2x+4}{x^2+1}$ の凹凸を調べよ．

（解答）　導関数を計算すれば

$$f'(x) = \frac{(8x+2)\cdot(x^2+1)-(4x^2+2x+4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

より

$$f''(x) = \frac{-4x\cdot(x^2+1)^2-(-2x^2+2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = \frac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

であるから，$f''(x)=0$ となるのは $x=0, \pm\sqrt{3}$ のときである．よって

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	(∞)
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

より

$$(-\infty, -\sqrt{3}] \text{ および } [0, \sqrt{3}] \text{ で上に狭義の凸}, \qquad [-\sqrt{3}, 0] \text{ および } [\sqrt{3}, \infty) \text{ で下に狭義の凸}$$

である．

（解答終）

練習問題 5.2.　次の関数の増減・凹凸を調べ，グラフをかけ．

(1) $y = x + \sqrt{4-x^2}$　　(2) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

例題 5.22.　関数 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の凸関数で $f(x) \geqq 0$, $f(0)=0$ とする．さらに，$f(x)$ が上に有界ならば，$f(x)$ は恒等的に 0 と等しいことを示せ．

（解答）　関数 $f(x)$ は上に有界なので，ある正の定数 M が存在して

$$f(x) \leqq M \qquad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ．よって，$t>1$ とすれば，任意の実数 x に対して

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\cdot tx + \left(1-\frac{1}{t}\right)0\right) \leqq \frac{1}{t}\,f(tx) + \left(1-\frac{1}{t}\right)f(0) = \frac{f(tx)}{t} \leqq \frac{M}{t}$$

が成り立つ．さらに，この不等式と仮定より

$$0 \leqq f(x) \leqq \frac{M}{t} \quad\longrightarrow\quad 0 \qquad (t\to\infty)$$

が得られるので，$f(x)=0$ となる．

（解答終）

5.3　微分法の応用その 3：不定形の極限（l'Hospital の定理）

次の l'Hospital の定理を用いれば，微分法を利用して分数型の不定形の極限を求めることができる．使うと面倒なことが多く有用な定理ではないため特に扱う必要性は無いのだが，定理の知名度は高いので説明しておく．

定理 5.23.（l'Hospital の定理）
関数 $f(x)$ と $g(x)$ はともに点 a のある近傍上で点 a を除いて微分可能で，$g'(x) \neq 0$ とする．このとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

であり，さらに極限 $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば（$\pm\infty$ でもよい），$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在し

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ．

証明．　必要ならば $f(a) = g(a) = 0$ として $f(x)$ と $g(x)$ は点 a を含めて連続としても極限には影響しない．$x > a$ とすれば，$g'(x) \neq 0$ より区間 $[a, x]$ において定理 5.4（Cauchy の平均値の定理）の仮定をすべてみたすので，$f(a) = g(a) = 0$ とあわせて

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad a < c < x$$

となる c が存在する．よって，$x \to a + 0$ のとき $c \to a + 0$ で，さらに仮定より極限 $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するから

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ．$x \to a - 0$ の場合もまったく同様なので，結局

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となる．□

$f(x)$ と $g(x)$ がともに $x = a$ で微分可能で $f(a) = g(a) = 0$ のときは

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

とすれば，さらに $g'(a) \neq 0$ ならば微分係数の定義より

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

が成り立つ．つまり，このような場合にはわざわざロピタルの定理を持ち出す必要はない．
もちろん導関数が連続でなければ

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

が成り立つとは限らないし，$g'(a) = 0$ の場合にも困るから，その意味ではより一般的な状況でも適用できる可能性をもつ定理ではある．

$\frac{0}{0}$ の不定形の極限以外にも，$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形の極限でもロピタルの定理を適用できることがある．

定理 5.24. （l'Hospital の定理）

関数 $f(x)$ と $g(x)$ は区間 (a,b) 上で微分可能で，$g'(x) \neq 0$ とする．このとき

$$\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$$

であり，さらに極限 $\displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば（$\pm\infty$ でもよい），$\displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在し

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ．

証明． 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在する場合を示す．$L = \displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ とおくと，任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対して，ある $\delta_1 = \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$ が存在して

$$a < x < a + \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．$a < x < d < a + \delta_1$ のとき，区間 $[x,d]$ で定理 5.4（Cauchy の平均値の定理）を適用すれば

$$\frac{f(d) - f(x)}{g(d) - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad x < c < d$$

となる c が存在する．仮定 $\displaystyle\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$ より $g(x) > 0$ としてよいので，これを変形すると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(d)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 - \frac{g(d)}{g(x)}\right)$$

なので，$a < c < a + \delta_1$ より

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| &= \left| \frac{f(d)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 - \frac{g(d)}{g(x)}\right) - L \right| \\
&\leqq \frac{|f(d)|}{g(x)} + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(d)}{g(x)} \right| \\
&\leqq \frac{|f(d)|}{g(x)} + \frac{\varepsilon}{3} + \left(|L| + \frac{\varepsilon}{3}\right) \frac{g(d)}{g(x)}
\end{aligned}$$

が成り立つ．d を固定すれば $\displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{|f(d)|}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{g(d)}{g(x)} = 0$ であるから，ある $\delta_2 > 0$ を適切に選べば

$$a < x < a + \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqq \frac{|f(d)|}{g(x)} < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad 0 < \frac{g(d)}{g(x)} < \frac{\varepsilon}{3(|L|+1)}$$

とできる．そこで，$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおけば，$a < x < a + \delta(\varepsilon)$ ならば

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left(|L| + \frac{\varepsilon}{3}\right) \frac{\varepsilon}{3(|L|+1)} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

が成り立つから，$\displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ である． □

まず強調しておきたいのは，**ロピタルの定理の使用は推奨しません**．不定形の極限計算においては，初等関数の極限公式を用いる，微分係数の定義に戻る，次節で紹介するテイラー展開や漸近展開を利用したり，それから導かれる関数の増大度の比較などを用いたりした方が，式の意味が明確なことが多いです．極限の学習を通して身につけてほしい内容や感覚（関数の漸近挙動）について，ロピタルの定理の使用はその視点を見失わせ，学習の妨げになりえます．実際，ロピタルの定理を扱っていない（あるいは演習問題として紹介だけする）本は結構あります．

ロピタルの定理は計算テクニックとして便利だと紹介されることもありますが，少なくともそのようなことはありません．一般的には微分すれば積の微分法や合成関数の微分法により導関数は複雑になるため，むしろ計算や記述が煩雑になる方が多いと思います．ロピタルの定理で簡単に求まるなら，他の方法でも簡単に求まります．

以上の内容から使用は勧めませんが，どうしてもロピタルの定理を使う場合には以下のことに注意すること．

注意 5.25. (1) 証明からもわかるが，ロピタルの定理は $x \to \infty$ や $x \to -\infty$ の場合や，$x \to a+0$ のような右極限，左極限の場合にも適用できる．

(2) おそらくこれまでに学んだ定理と比べて確認すべき条件が多いと感じているかもしれない．1 つでも仮定をみたさないと適用できないのできちんと確認すること．特に $\dfrac{0}{0}$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$ **などの不定形の場合**に適用が考えられる．これを確認せずに勝手に分母・分子を微分して

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+3}{1} = 3, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

などとしても誤りである．

(3) 1 回分母と分子を微分してもまだ不定形の極限になっている場合には，さらにもう一度ロピタルの定理の適用を試みてよい．ただし，いくら分母と分子を微分しても不定形が解消されない場合，および $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在しない場合などは別の方法を考えなければならない．例えば

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

である．ここで，不等式 $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqq \dfrac{1}{x}$ とはさみうちの定理を用いた．一方，この極限は $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形だからとロピタルの定理を適用しようとしてみると

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty} (1+\cos x)$$

は存在しないから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ とはならない．これはロピタルの定理の仮定をみたしていないのでおかしなことではない．

(4) 以前に公式として証明した極限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

などについてはきちんと憶えておくこと．これらをロピタルの定理を利用して

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

と求めることできない．なぜならば，$\sin x$ や e^x の導関数の公式の証明において上記の極限公式を用いたので，循環論法になってしまうからである．

ロピタルの定理と基本的な極限公式の関係は上記のように認識していたのですが，いろいろ調べてみると数学科以外を出身とする応用系の教員によっては定期試験で『極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ を求めよ』と出題し，解答例を『ロピタルの定理より〜』としていることもあるようです．このような議論はまったくおかしなものなので，数学においては何を基点としどのような議論を適用して定理や事実を導いたかという流れを理解することを学生には望みます．その視点を忘れず「なぜこのような概念に着目し用語を定義して準備するのか」や「なぜこのような定理・公式を導いたのか」という疑問をもって物事を理解しようとする練習を積めば，数学のみでなく理工学系の科目における理解が深まります．また，導関数の公式を別の方法で導出したなら循環論法となりませんが，それならなおのこと後で述べる漸近展開を使わないのは不自然だと思います．

これからロピタルの定理の計算例をいくつか挙げておくが，すべての例において

- 適切に変数を置き換えるなどして，極限の基本公式を利用する
- 微分係数の定義を利用する
- 後で学ぶテイラーの定理から得られる漸近展開や関数の増大度の比較方法を利用する

などにより，もっと楽に計算できる．これらの問題を普段からロピタルの定理を利用して計算するのは筋が悪いので，後で習う内容を用いて再度これらの問題を考えてみてほしい．

例題 5.26.　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(x+1)}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-3x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{e^{\sin x}-e}{\log(\sin x)}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}$

（解答）

(1)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(x+1)}{x^2}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\{x-\log(x+1)\}=0,\ \lim_{x\to 0}x^2=0$ である．
- $0<|x|<1$ において，$(x^2)'=2x\fallingdotseq 0$ が成り立つ．
- 分母と分子を微分した極限は

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\log(x+1))'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{2}$$

と存在する．

よって，ロピタルの定理を適用すれば，求める極限は存在し

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\log(x+1))'}{(x^2)'}=\frac{1}{2}$$

が成り立つ．

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\tan x-x)=0,\ \lim_{x\to 0}(x-\sin x)=0$ である．
- $0<|x|<\pi$ において，$(x-\sin x)'=1-\cos x\fallingdotseq 0$ が成り立つ．
- 分母と分子を微分した極限は

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2$$

と存在する．

よって，ロピタルの定理を適用すれば，求める極限は存在し

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-x)'}{(x-\sin x)'}=2$$

が成り立つ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{3x}}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{3x} = \infty$ である．
- $x > 0$ において，$(e^{3x})' = 3e^{3x} \fallingdotseq 0$ が成り立つ．

である．さらに，分母と分子を微分した極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{3x})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3e^{3x}}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2x = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 3e^{3x} = \infty$ である．
- $x > 0$ において，$(3e^{3x})' = 9e^{3x} \fallingdotseq 0$ が成り立つ．
- 分母と分子を微分した極限は

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x)'}{(3e^{3x})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{9e^{3x}} = 0$$

と存在する．

よって，ロピタルの定理を適用すれば，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3e^{3x}}$ は存在し

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3e^{3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)'}{(3e^{3x})'} = 0$$

が成り立つ．ゆえに，再度ロピタルの定理を適用すれば，求める極限は存在し

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{3x})'} = 0$$

が成り立つ．

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} (x - \sin x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^3 = 0$ である．
- $0 < |x| < 1$ において，$(x^3)' = 3x^2 \fallingdotseq 0$ が成り立つ．

である．さらに，分母と分子を微分した極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} 3x^2 = 0$ である．
- $0 < |x| < 1$ において，$(3x^2)' = 6x \fallingdotseq 0$ が成り立つ．
- 分母と分子を微分した極限は

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

と存在する．

よって，ロピタルの定理を適用すれば，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$ は存在し

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \frac{1}{6}$$

が成り立つ．ゆえに，再度ロピタルの定理を適用すれば，求める極限は存在し

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \frac{1}{6}$$

が成り立つ．

(5)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{e^{\sin x}-e}{\log(\sin x)}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}(e^{\sin x}-e)=e-e=0,\ \lim_{x\to\pi/2}\log(\sin x)=\log 1=0$ である．
- $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ において，$(\log(\sin x))'=\dfrac{\cos x}{\sin x}\fallingdotseq 0$ が成り立つ．
- 分母と分子を微分した極限は

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{(e^{\sin x}-e)'}{(\log(\sin x))'}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{e^{\sin x}\cos x}{\dfrac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to\pi/2}e^{\sin x}\sin x=e$$

と存在する．

よって，ロピタルの定理を適用すれば，求める極限は存在し

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{e^{\sin x}-e}{\log(\sin x)}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(e^{\sin x}-e)'}{(\log(\sin x))'}=e$$

が成り立つ．

(6)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log x=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$ である．
- $x>0$ において，$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\fallingdotseq 0$ が成り立つ．
- 分母と分子を微分した極限は

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(\sqrt{x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

と存在する．

よって，ロピタルの定理を適用すれば，求める極限は存在し

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(\sqrt{x})'}=0$$

が成り立つ．

（解答終）

繰り返しになるが，いずれの問題もロピタルの定理を使わない計算方法が自然である．後で習う知識を使って再度これらの計算に取り組んでみてほしい．

形式的に $0 \cdot \infty$ となる不定形は分数の形に変形して計算すればよい．ただし，やはり以下の例も分数の形に直した後は極限の基本公式やテイラーの定理などを利用すれば 2〜3 行程度で計算できるので，このように計算する必要はない．ロピタルの定理を使うと計算が面倒になる例を紹介していると考えてもらえばよい．

例題 5.27.　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x$　　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \log \frac{x+1}{x-1}$

（解答）

(1)　極限 $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = \lim_{x \to +0} \frac{\log x}{x^{-1}}$ について

- $\displaystyle\lim_{x \to +0} \log x = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^{-1} = +\infty$ である．
- $0 < x < 1$ において，$(x^{-1})' = -x^{-2} \fallingdotseq 0$ が成り立つ．
- 分母と分子を微分した極限は

$$\lim_{x \to +0} \frac{(\log x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \to +0} (-x) = 0$$

　と存在する．

よって，ロピタルの定理を適用すれば，求める極限は存在し

$$\lim_{x \to +0} x \log x = \lim_{x \to +0} \frac{\log x}{x^{-1}} = \lim_{x \to +0} \frac{(\log x)'}{(x^{-1})'} = 0$$

が成り立つ．

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \log \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\log \frac{x+1}{x-1}}{x^{-1}}$ について

- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \log \frac{x+1}{x-1} = \log 1 = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^{-1} = 0$ である．
- $x > 1$ において，$(x^{-1})' = -x^{-2} \fallingdotseq 0$ が成り立つ．
- 分母と分子を微分した極限は

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\log \frac{x+1}{x-1}\right)'}{(x^{-1})'} \lim_{x \to \infty} \frac{\{\log(x+1) - \log(x-1)\}'}{-x^{-2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2$$

　と存在する．

よって，ロピタルの定理を適用すれば，求める極限は存在し

$$\lim_{x \to \infty} x \log \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\log \frac{x+1}{x-1}}{x^{-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\log \frac{x+1}{x-1}\right)'}{(x^{-1})'} = 2$$

が成り立つ．

（解答終）

形式的に $\infty-\infty$ となる不定形については通分や分子の有理化などをすれば計算できる．ただし，やはり以下の例も通分した後は極限の基本公式やテイラーの定理・漸近展開などを利用すれば 2〜3 行程度で計算できるので，このように計算する必要はない．ロピタルの定理を使うと計算が面倒になる例を紹介していると考えてもらえばよい．

例題 5.28.　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)$

（解答）

(1)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\log x-x+1}{(x-1)\log x}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to1}(\log x-x+1)=0,\ \lim_{x\to1}(x-1)\log x=0$ である．
- $0<x<1,\ 1<x<2$ において，$\displaystyle((x-1)\log x)'=\log x+\frac{x-1}{x}\fallingdotseq 0$ が成り立つ．

である．さらに，分母と分子を微分した極限

$$\lim_{x\to1}\frac{(\log x-x+1)'}{((x-1)\log x)'}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\log x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x\log x+x-1}$$

について

- $\displaystyle\lim_{x\to1}(1-x)=0,\ \lim_{x\to1}(x\log x+x-1)=0$ である．
- $e^{-2}<x<1,\ 1<x<2$ において，$(x\log x+x-1)'=\log x+2\fallingdotseq 0$ が成り立つ．
- 分母と分子を微分した極限は

$$\lim_{x\to1}\frac{(1-x)'}{(x\log x+x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{\log x+2}=-\frac{1}{2}$$

　と存在する．

よって，ロピタルの定理を適用すれば，極限 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x\log x+x-1}$ は存在し

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x\log x+x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)'}{(x\log x+x-1)'}=-\frac{1}{2}$$

が成り立つ．ゆえに，再度ロピタルの定理を適用すれば，求める極限は存在し

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\log x-x+1}{(x-1)\log x}=\lim_{x\to1}\frac{(\log x-x+1)'}{((x-1)\log x)'}=-\frac{1}{2}$$

が成り立つ．

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2\sin x}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\sin x - x)=0,\ \lim_{x\to 0}x^2\sin x = 0$ である．
- $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ において，$(x^2\sin x)' = 2x\sin x + x^2\cos x \fallingdotseq 0$ が成り立つ．

である．さらに，分母と分子を微分した極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x^2\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x\sin x + x^2\cos x}$$

について

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x - 1)=0,\ \lim_{x\to 0}(2x\sin x + x^2\cos x)=0$ である．
- $0<|x|<1$ において

$$(2x\sin x + x^2\cos x)' = 2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x = (2-x^2)\sin x + 4x\cos x \fallingdotseq 0$$

  が成り立つ．
- 分母と分子を微分した極限は

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(2x\sin x + x^2\cos x)'} &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2+4\dfrac{x}{\sin x}\cos x - x^2} = -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

  と存在する．

よって，ロピタルの定理を適用すれば，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x\sin x + x^2\cos x}$ は存在し

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x\sin x + x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(2x\sin x + x^2\cos x)'}=-\frac{1}{6}$$

が成り立つ．ゆえに，再度ロピタルの定理を適用すれば，求める極限は存在し

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x^2\sin x)'}=-\frac{1}{6}$$

が成り立つ．

（解答終）

もし見通しよく計算できれば

$$\frac{\sin x - x}{x^2\sin x}=\frac{\sin x - x}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}$$

より答えを得ることもできる．ただし，これよりも後で学習する漸近展開の公式を用いた方が計算は簡単である．

形式的に 0^0, 1^∞, ∞^0 となる不定形については対数をとって指数を積に直せば計算できる．ただし，やはり以下の例も対数をとった後は極限の基本公式やテイラーの定理・漸近展開などを利用すれば2〜3 行程度で計算できるので，このように計算する必要はない．ロピタルの定理を使うと計算が面倒になる例を紹介していると考えてもらえばよい．

例題 5.29. 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{\sqrt{x}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\right)^x$

（解答）

(1) 0^0 の不定形なので対数をとれば，極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{1/\sqrt{x}}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ である．
- $0 < x < 1$ において，$\displaystyle\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \fallingdotseq 0$ が成り立つ．
- 分母と分子を微分した極限は

$$\lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{(1/\sqrt{x}\,)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}\,) = 0$$

と存在する．

よって，ロピタルの定理を適用すれば，極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x^{\sqrt{x}}$ は存在し

$$\lim_{x\to+0}\log x^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{(1/\sqrt{x}\,)'} = 0$$

が成り立つ．ゆえに，指数関数の連続性より $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\sqrt{x}} = e^0 = 1$ である．

(2) 1^∞ の不定形なので対数をとれば，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\right)}{1/x}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\right) = \log 1 = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ である．
- $x > 0$ において，$(x^{-1})' = -x^{-2} \fallingdotseq 0$ が成り立つ．
- 分母と分子を微分した極限は

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\log\left(\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\right)\right)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\mathrm{Tan}^{-1}\,x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{Tan}^{-1}\,x} = -\frac{2}{\pi}$$

と存在する．

よって，ロピタルの定理を適用すれば，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\right)^x$ は存在し

$$\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\right)}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\log\left(\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\right)\right)'}{(1/x)'} = -\frac{2}{\pi}$$

が成り立つ．ゆえに，指数関数の連続性より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\right)^x = e^{-2/\pi}$ である．

（解答終）

5.4　微分法の応用その4：微分法の方程式・不等式への応用

高校数学でも微分法を用いて関数のグラフを描くことで『方程式の解の個数の判定』や『不等式の証明』へ応用することは学習済みであるが，ここでも復習を兼ねて例題を挙げておくことにする．

例題 5.30.　k を定数とするとき，方程式 $\log x = kx$ の異なる実数解の個数を求めよ．

（解答）　真数条件より $x > 0$ で考えればよい．このとき，方程式は $\dfrac{\log x}{x} = k$ であるから，$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおく．$f(x)$ の導関数を計算すれば

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

より，$f'(x) = 0$ となるのは $x = e$ のときである．また，$x \to \infty$ では $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

となる（ロピタルの定理を適用し，等号は右からさかのぼって成り立つ．後で扱う関数の増大度の比較を用いるともっと楽にわかる）．以上のことより，増減表は

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	(0)

となる．

方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数は $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ の異なる共有点の個数に一致する．ゆえに，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} k > \dfrac{1}{e} & \text{のとき　} 0 \text{ 個} \\ k \leqq 0,\ k = \dfrac{1}{e} & \text{のとき　} 1 \text{ 個} \\ 0 < k < \dfrac{1}{e} & \text{のとき　} 2 \text{ 個} \end{cases}$$

である．

（解答終）

例題 5.31.　$0 < a < b$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{b-a} \log \frac{b}{a} < \frac{1}{a}$$

（解答）　$f(x) = \log x$ とおくと，区間 $[a, b]$ 上で微分可能なので平均値の定理を適用すれば，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ より

$$\frac{1}{b-a} \log \frac{b}{a} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) = \frac{1}{c}, \qquad a < c < b$$

となる c が存在する．ここで，$\dfrac{1}{x}$ は $x > 0$ で狭義単調減少であるから

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

より，示すべき不等式 $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{b-a} \log \dfrac{b}{a} < \dfrac{1}{a}$ が成り立つ．

（解答終）

例題 5.32. k を定数とするとき，方程式 $x^2 = ke^x$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(解答) 方程式は $x^2e^{-x} = k$ であるから，$f(x) = x^2e^{-x}$ とおく．$f(x)$ の導関数を計算すれば

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

より，$f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, 2$ のときである．また，$x \to \infty$ では $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

となる（ロピタルの定理を 2 回適用し，等号は右からさかのぼって成り立つ．後で扱う関数の増大度の比較を用いるともっと楽にわかる）．以上のことより，増減表は

x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(∞)	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	(0)

となる．

方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数は $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ の異なる共有点の個数に一致する．ゆえに，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} k < 0 & \text{のとき}\quad 0\,\text{個} \\ k = 0,\ k > 4e^{-2} & \text{のとき}\quad 1\,\text{個} \\ k = 4e^{-2} & \text{のとき}\quad 2\,\text{個} \\ 0 < k < 4e^{-2} & \text{のとき}\quad 3\,\text{個} \end{cases}$$

である．

（解答終）

例題 5.33. $x > 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{x}{1+x^2} < \mathrm{Tan}^{-1}\, x < x$$

(解答) $f(x) = x - \mathrm{Tan}^{-1}\, x$ とおく．$x > 0$ のとき

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$$

であるから，$f(x)$ は $x \geqq 0$ で狭義単調増加である．また，$f(0) = 0$ より，$x > 0$ のとき $f(x) > 0$ となる．

$g(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\, x - \dfrac{x}{1+x^2}$ とおく．$x > 0$ のとき

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0$$

であるから，$g(x)$ は $x \geqq 0$ で狭義単調増加である．また，$g(0) = 0$ より，$x > 0$ のとき $g(x) > 0$ となる．

したがって，$x > 0$ のとき，示すべき不等式 $\dfrac{x}{1+x^2} < \mathrm{Tan}^{-1}\, x < x$ が成り立つ．

（解答終）

例題 5.34. a を定数とする．方程式 $ax^2 - 2(a+1)x + 3a + 1 = 0$ について

(1) 異なる実数解の個数を求めよ．

(2) 実数解をもち，さらに解がすべて正となるような定数 a の範囲を求めよ．

(3) 正と負の解をもつような定数 a の範囲を求めよ．

(4) 実数解をもち，さらに解がすべて 1 より大きいような定数 a の範囲を求めよ．

（解答） 方程式は $a(x^2-2x+3) = 2x-1$ であり，$x^2-2x+3 = (x-1)^2+2 > 0$ より

$$\frac{2x-1}{x^2-2x+3} = a$$

となる．そこで，$f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-2x+3}$ とおく．$f(x)$ の導関数を計算すれば

$$f'(x) = \frac{2(x^2-2x+3)-(2x-1)(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2} = \frac{-2x^2+2x+4}{(x^2-2x+3)^2} = \frac{-2(x-2)(x+1)}{(x^2-2x+3)^2}$$

より，$f'(x) = 0$ となるのは $x = 2, -1$ のときである．よって，増減表は

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	(0)

となる．

(1) 方程式 $f(x) = a$ の異なる実数解の個数は，曲線 $C\colon y = f(x)$ と直線 $l\colon y = a$ の異なる共有点の個数に一致する．ゆえに，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} a < -\dfrac{1}{2},\ 1 < a & \text{のとき}\quad 0\,\text{個} \\ a = -\dfrac{1}{2}, 0, 1 & \text{のとき}\quad 1\,\text{個} \\ -\dfrac{1}{2} < a < 0,\ 0 < a < 1 & \text{のとき}\quad 2\,\text{個} \end{cases}$$

である．

(2) C と l の異なる共有点がすべて $x > 0$ の範囲にあればよいから，求める a の範囲は $0 \leqq a \leqq 1$ である．

(3) C と l が $x > 0$ の部分と $x < 0$ の部分の両方で共有点をもてばよい．$f(0) = -\dfrac{1}{3}$ なので，求める a の範囲は $-\dfrac{1}{3} < a < 0$ である．

(4) C と l が $x > 1$ の部分のみで共有点をもてばよい．$f(1) = \dfrac{1}{2}$ なので，求める a の範囲は $\dfrac{1}{2} < a \leqq 1$ である．

（解答終）

このような問題を $a > 0,\ a = 0,\ a < 0$ にわけて判別式や頂点の x 座標，解と係数の関係などを用いて計算することもできるが，定数分離すればすべての場合を視覚的に網羅できる．最初に習ったときの解法に固執せずに，新しい知識はどんどん利用していくこと．

例題 5.35.　関数 $f(x) = x^4 - 4x^3 - 12x^2$ とおく．

(1) $y = f(x)$ のグラフの 2 重接線（2 点で接する接線）を求めよ．

(2) a を定数とする．点 $(0, a)$ を通る $y = f(x)$ のグラフの接線の本数を求めよ．

（解答）

(1)　$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 24x$ であるから，$(t, f(t))$ における $y = f(x)$ のグラフの接線は

$$y = f'(t)(x - t) + f(t) = (4t^3 - 12t^2 - 24t)x - 3t^4 + 8t^3 + 12t^2$$

である．これが $y = f(x)$ のグラフと $x = t$ 以外でも接するような t の値を求めればよい．よって

$$x^4 - 4x^3 - 12x^2 = (4t^3 - 12t^2 - 24t)x - 3t^4 + 8t^3 + 12t^2$$

$$\therefore\ (x - t)^2\{x^2 + 2(t - 2)x + 3t^2 - 8t - 12\} = 0$$

であるから，これが $x = t$ 以外の重解をもつためには 2 次方程式 $x^2 + 2(t-2)x + 3t^2 - 8t - 12 = 0$ の判別式 D が 0 であることが必要である．よって

$$D/4 = (t-2)^2 - (3t^2 - 8t - 12) = -2t^2 + 12t + 16 = -2(t-4)(t+2) = 0$$

より，$t = 4, -2$ となる．このときの重解は $x = t, 2 - t$ であるから，t がどちらの値でも接点の x 座標は $x = 4, -2$ となり，これが確かに求める 2 重接線の接点である（$t \fallingdotseq 1$ より 4 重解ではない）．ゆえに，上の接線の方程式に $t = 4$ または $t = -2$ を代入すれば，求める 2 重接線の方程式は $y = -32x - 64$ となる．

(2)　$(t, f(t))$ における接線 $y = (4t^3 - 12t^2 - 24t)x - 3t^4 + 8t^3 + 12t^2$ が点 $(0, a)$ を通るので

$$-3t^4 + 8t^3 + 12t^2 = a$$

となる．この方程式の異なる実数解の個数を求めるために $g(t) = -3t^4 + 8t^3 + 12t^2$ とおく．このとき

$$g'(t) = -12t^3 + 24t^2 + 24t = -12t(t^2 - 2t - 2) = 0$$

より，$t = 0, 1 \pm \sqrt{3}$ である．また，多項式の除法により

$$g(t) = (t^2 - 2t - 2)(-3t^2 + 2t + 10) + 24t + 20$$

であることを利用すれば，増減表は

t	$(-\infty)$	$\cdots$	$1 - \sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$1 + \sqrt{3}$	$\cdots$	(∞)
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$44 - 24\sqrt{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$44 + 24\sqrt{3}$	$\searrow$	$(-\infty)$

となる．

4 次関数に直線が 3 点以上で接することはないから，2 重接線以外に関しては接点の個数と接線の本数が一致する．ゆえに，(1) より $a = -64$ のときは方程式 $g(t) = -64$ は $t = 4, -2$ と 2 個の解をもつが，この場合は 2 重接線なので 1 本である．$a \fallingdotseq -64$ のときは方程式 $g(t) = a$ の異なる実数解の個数は $y = g(t)$ のグラフと直線 $y = a$ の異なる共有点の個数に一致する．ゆえに，求める接線の本数は次のようになる．

$$\begin{cases} a > 44 + 24\sqrt{3} & \text{のとき}\quad 0\,\text{本} \\ a = 44 + 24\sqrt{3},\ a = -64 & \text{のとき}\quad 1\,\text{本} \\ a < -64,\ -64 < a < 0,\ 44 - 24\sqrt{3} < a < 44 + 24\sqrt{3} & \text{のとき}\quad 2\,\text{本} \\ a = 44 - 24\sqrt{3},\ a = 0 & \text{のとき}\quad 3\,\text{本} \\ 0 < a < 44 - 24\sqrt{3} & \text{のとき}\quad 4\,\text{本} \end{cases}$$

（解答終）

6　Taylor の定理とその応用

6.1　Taylor の定理

以前に接線の方程式を利用した 1 次近似計算を説明した．そこでは次のような疑問点があった．

- 真の値がわからないときでも，計算した近似値の誤差がどの程度の大きさかわかるか？
- 近似値の計算精度を上げるにはどのようにすればよいか．

後半については，曲線を直線で近似しているから誤差が大きそうなので，2 次関数，3 次関数などの曲線で近似するとよさそうな気もする（既に "1 次近似" と説明しているから，おそらくそうなのだろう）．しかし，個別に考えると大変そうなので，まとめて n 次関数などで近似してみたい．

高校数学における無限等比級数の和の公式より，$-1 < x < 1$ のときは

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

が成り立っていた．この式を眺めてみると，$\dfrac{1}{1-x}$ は "無限次の多項式"（正確にはべき級数と呼ぶ）で表せている．

関数をべき級数で表すことができれば，好きな次数で打ち切って近似式が作れるので便利そうである．そこで，もし関数 $f(x)$ が

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{6.1}$$

と表せると仮定すると，係数はどうなるだろうか．係数 a_n を形式的に求めてみる．まず (6.1)の両辺に $x = 0$ を代入して

$$f(0) = a_0$$

となる．次に，(6.1)の両辺を微分すると

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots$$

となる．この両辺に $x = 0$ を代入して

$$f'(0) = a_1$$

となる．さらに，(6.1)の両辺を 2 回微分すると

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots$$

となる．この両辺に $x = 0$ を代入して

$$f''(0) = 2a_2 \qquad \therefore\ a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

が得られる．さらに，(6.1)の両辺を 3 回微分すると

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4 x + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \cdots$$

となる．この両辺に $x = 0$ を代入して

$$f'''(0) = 6a_3 \qquad \therefore\ a_3 = \frac{f'''(0)}{6}$$

が得られる．これを繰り返すと

$$a_0 = f(0), \qquad a_1 = f'(0), \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2}, \qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{6}, \qquad a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{24},\ \ldots$$

となる．

同様に，(6.1)の両辺を n 回微分すると

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n\cdots 2a_{n+1}x + \cdots$$

となる．この両辺に $x=0$ を代入して

$$f^{(n)}(0) = n!a_n \qquad\qquad \therefore\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

この計算結果より，どうやら関数 $f(x)$ がべき級数で表せるとすると

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

となるが，途中で関数を微分したので $f(x)$ に条件が必要そうである．実際に次の定理が成り立つ．

定理 6.1. （Maclaurin **の定理**）

関数 $f(x)$ は 0 を含む開区間 I 上で n 回微分可能であるとする．このとき，各 $x \in I$ に対して，ある θ $(0 < \theta < 1)$ が存在して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\, x^n$$

が成り立つ．ここで

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\, x^n$$

とおき，これを Lagrange **の剰余項**という．

マクローリンの定理をシグマ記号を用いずに表すと

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}\, x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}\, x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\, x^{n-1} + R_n(x)$$

となる．つまり，マクローリンの定理とは，関数 $f(x)$ を「$n-1$ 次多項式」と「剰余項」の和に表せるということを主張している．また，多項式の部分の係数は前の計算結果と一致している．

マクローリンの定理の右辺が n 次多項式に見えるかもしれないが，x^n の係数が $\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$ となり x を含む式であるからそうではない．剰余項は多項式とは限らない関数 $f(x)$ を $n-1$ 次多項式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$ で近似したときのずれを表している．つまり，$f(x)$ と $n-1$ 次多項式の誤差をすべて剰余項に押し込んでいるので，一般に $R_n(x)$ はかなり複雑な形となることが多い．

マクローリンの定理の中に出てくる θ は関数 $f(x)$ によって決まるものであるが，さらに x や n が変わるとそれに応じて変化する．そのために θ を具体的に x や n の式で表すことは一般に困難である．しかし，その形がわからなくても $0 < \theta < 1$ であることが重要であり，この情報だけで議論できることは多い．

マクローリンの定理において 1 次式で打ち切ると，$x=0$ における $y=f(x)$ の接線の方程式

$$y = f(0) + f'(0)x$$

の右辺が得られる．このことからわかるように，0 に十分近い x については $R_n(x)$ は小さいので $f(x)$ のよい多項式近似を与えていることが期待できる．もちろん 0 から離れた x でも剰余項が小さいかどうかは場合による．マクローリンの定理の応用例については次節以降を参照すること．

説明の都合上マクローリンの定理を先に紹介したが，実際には次に述べるテイラーの定理の特別な場合（$a=0$）である．テイラーの定理は $x=a$ の近くで関数を多項式近似した定理なので，こちらがより一般的な状況を考えている．

定理 6.2. （テイラー の定理）
関数 $f(x)$ は点 a を含む開区間 I 上で n 回微分可能であるとする．このとき，各 $x \in I$ に対して，ある θ $(0<\theta<1)$ が存在して

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}\bigl(a+\theta(x-a)\bigr)}{n!}(x-a)^n$$

が成り立つ．ここで

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}\bigl(a+\theta(x-a)\bigr)}{n!}(x-a)^n$$

とおき，これを Lagrange の剰余項という．

証明. 　任意の $x \in I,\ x \fallingdotseq a$ をとり固定する（x は以下では定数である）．定数 K を

$$K=\frac{1}{(x-a)^n}\left\{f(x)-f(a)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right\}$$

とおき，a と x を含む区間上の関数 $F(t)$ を

$$F(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k+K(x-t)^n$$

により定義する．このとき，$F(x)=f(x)$ である．さらに，定数 K の決め方より $F(a)=f(x)$ が成り立つ．よって，$F(x)=F(a)$ であるから，Rolle の定理より x と a の間の数 c で $F'(c)=0$ となるものが存在する．

そこで，$F(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned}
F'(t)&=f'(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\frac{f^{(k)}(t)}{k!}\cdot k(x-t)^{k-1}\cdot(-1)\right\}-nK(x-t)^{n-1}\\
&=f'(t)+\left\{\sum_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right\}-nK(x-t)^{n-1}\\
&=f'(t)+\left\{\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-f'(t)\right\}-nK(x-t)^{n-1}\\
&=n(x-t)^{n-1}\left(\frac{f^{(n)}(t)}{n!}-K\right)
\end{aligned}$$

となる．よって

$$F'(c)=n(x-c)^{n-1}\left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!}-K\right)=0$$

となり，$x \fallingdotseq c$ より $K=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$ が得られる．ゆえに

$$f(x)=F(a)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

が成り立つ．ここで，x と a の間の数 c は，ある $0<\theta<1$ を用いて

$$c=(1-\theta)a+\theta x=a+\theta(x-a)$$

と表せるので，定理の主張が成り立つ． □

例題 6.3.　次の初等関数 $f(x)$ について，具体的にマクローリンの定理を適用して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\, x^n \qquad (0 < \theta < 1)$$

の形に表せ．また，5 次多項式と剰余項の和で表せ．

(1) e^x　　(2) $\sin x$　　(3) $\cos x$　　(4) $\log(1+x)$

（解答）

(1)　n 階導関数は $f^{(n)}(x) = e^x \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ であるから

$$f^{(n)}(0) = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x}$$

なので

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\, x^k + \frac{e^{\theta x}}{n!}\, x^n \qquad (0 < \theta < 1)$$

である．5 次の項までの展開は

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{e^{\theta x}}{720}\, x^6$$

(2)　n 階導関数は $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ であるから

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{k-1} & (n = 2k-1) \\ 0 & (n = 2k) \end{cases}$$

となる．そこで，$n = 2m+1$ とすると

$$f^{(2m+1)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta x + m\pi) = (-1)^m \cos\theta x$$

なので

$$\sin x = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\, x^{2k-1} + \frac{(-1)^m \cos\theta x}{(2m+1)!}\, x^{2m+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

である．5 次の項までの展開は

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{\cos\theta x}{7!}\, x^7$$

(3)　n 階導関数は $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ であるから

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n = 2k-1) \\ (-1)^k & (n = 2k) \end{cases}$$

となる．そこで，$n = 2m+2$ とすると

$$f^{(2m+2)}(\theta x) = \cos\bigl(\theta x + (m+1)\pi\bigr) = (-1)^{m+1} \cos\theta x$$

なので

$$\cos x = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} + \frac{(-1)^{m+1} \cos\theta x}{(2m+2)!}\, x^{2m+2} \qquad (0 < \theta < 1)$$

である．5 次の項までの展開は

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\cos\theta x}{6!}\, x^6$$

(4)　n 階導関数は $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ であるから

$$f(0) = \log 1 = 0, \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

となる．また

$$f^{(n)}(\theta x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+\theta x)^n}$$

なので

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k + \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n}\, x^n \qquad (0 < \theta < 1)$$

である．5 次の項までの展開は

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6(1+\theta x)^6}$$

（解答終）

例 6.4.　α を実数とするとき，$f(x) = (1+x)^\alpha$ のマクローリンの定理による展開を求めてみる．n 階導関数は

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

であるから

$$f(0) = 1, \qquad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ここで，**一般二項係数**を

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定める．この記号を用いれば

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n} (1+\theta x)^{\alpha-n} x^n \qquad (0 < \theta < 1)$$

と表せる．

重要な記号なのでもう一度繰り返しておく．

定義 6.5.（一般二項係数）

一般二項係数 $\dbinom{\alpha}{k}$ を

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定義する．これは二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ の拡張になっている．実際，n を自然数とすると

$$\binom{n}{k} = {}_n\mathrm{C}_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つ．

マクローリンの定理を用いて次の事実を証明することができる．

例題 6.6.　ネイピア数 e は無理数であることを示せ．

（解答）　ネイピア数の定義より $2 \leqq e \leqq 3$ であることは既に分かっている．そこで，e が有理数である，つまり互いに素な自然数 m と n を用いて $e = \dfrac{n}{m}$ と表せると仮定する．

e^x にマクローリンの定理を適用すれば，ある $0 < \theta < 1$ が存在して

$$e^x = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(m+2)!}\, x^{m+2}$$

と表せるから，$x = 1$ を代入すれば

$$e = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\theta}}{(m+2)!}$$

となる．この両辺に $(m+1)!$ をかけて移項すれば

$$\frac{e^{\theta}}{m+2} = (m+1)!e - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(m+1)!}{k!} = (m+1)!\,\frac{n}{m} - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(m+1)!}{k!}$$

であり，シグマ記号の各項 $\dfrac{(m+1)!}{k!}$ は $k = 0, 1, 2, \ldots, m+1$ のときすべて自然数であるから，右辺は整数となる．よって，$\dfrac{e^{\theta}}{m+2}$ も整数となる．

一方，$2 \leqq e \leqq 3$ と $0 < \theta < 1$ および m が自然数であることより

$$0 < \frac{e^{\theta}}{m+2} < \frac{e}{m+2} \leqq \frac{3}{m+2} \leqq 1$$

であるから，$0 < \dfrac{e^{\theta}}{m+2} < 1$ より $\dfrac{e^{\theta}}{m+2}$ は整数とはなりえない．これは矛盾である．したがって，e は有理数ではないから無理数である．

（解答終）

この例題はやや技巧的なマクローリンの定理の応用例となっている．マクローリンの定理の本質的に重要な応用例は，次節から説明する「関数の多項式近似」を利用した計算である．

6.2　微分法の応用その 5：誤差評価付きの近似値の計算

ここでは正確な値がわからないものについて，その近似値をテイラーの定理を用いて計算してみる．ポイントは『多項式に値を代入したものは直接計算しやすい』ということである．

例 6.7.　ネイピア数 e の近似値を計算する（ネイピア数については第 3 章定義 5.6 を参照）．

e^x にマクローリンの定理を適用し 6 次多項式と剰余項の和に表せば，ある $0 < \theta < 1$ が存在して

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!}\, x^k + \frac{e^{\theta x}}{7!}\, x^7 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{1}{24}\, x^4 + \frac{1}{120}\, x^5 + \frac{1}{720}\, x^6 + \frac{e^{\theta x}}{7!}\, x^7 \end{aligned}$$

となる．さらに，この式に $x = 1$ を代入すれば

$$\begin{aligned} e &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{e^\theta}{7!} \\ &= \frac{1957}{720} + \frac{e^\theta}{7!} \end{aligned}$$

が得られる．ここで，$0 < \theta < 1$ であり，また e の定義より $2 \leqq e \leqq 3$ であるから

$$0 < \frac{e^\theta}{7!} < \frac{e}{7!} \leqq \frac{3}{7!}$$

より

$$\frac{1957}{720} < e < \frac{1957}{720} + \frac{3}{7!} = \frac{13702}{5040}$$

が成り立つ．実際に割り算をすると

$$\begin{aligned} \frac{1957}{720} &= 2.71805\cdots > 2.71805 \\ \frac{13702}{5040} &= 2.71865\cdots < 2.71866 \end{aligned}$$

であるから

$$2.71805 < e < 2.71866$$

となる．よって，e の小数第 3 位までの正しい近似値として 2.718 を得る．

e^x を 6 次多項式と剰余項の和で表して計算したが，多項式の次数を上げればこの求めた近似値はさらに精度が上がっていく．ただし，当然ながら次数を上げれば計算量が増えてしまうので，場合に応じて適切な次数を選ぶ必要がある．なお，割り切れない無限小数に関してはきちんと計算すること．いい加減に有限小数で切り捨てたり切り上げたりすると誤差がわからなくなるので，上の計算のように不等式を用いて議論すること。

このように正確な値がわからない無理数に対し，適切に設定すればテイラーの定理を用いてその近似値を計算できる．ネイピア数 e の他には，円周率 π や平方根，三角関数，対数関数の値などが計算できる．

練習問題 6.1.　e^x を 8 次多項式と剰余項の和で表すことにより，より正確な e の近似値を求めよ．

例題 6.8.　$e^{0.1}$ の小数第 4 位までの値を求めよ．

（解答）　e^x にマクローリンの定理を適用し 3 次多項式と剰余項の和に表せば，ある $0 < \theta < 1$ が存在して

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!}\, x^k + \frac{e^{\theta x}}{4!}\, x^4 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{e^{\theta x}}{4!}\, x^4 \end{aligned}$$

となる．さらに，この式に $x = 0.1$ を代入すれば

$$\begin{aligned} e^{0.1} &= 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{6} + \frac{0.1^4}{24}\, e^{0.1\theta} \\ &= 1.105 + \frac{0.001}{6} + \frac{0.1^4}{24}\, e^{0.1\theta} \end{aligned}$$

となる．まず $\dfrac{0.001}{6} = 0.0001666\cdots$ より

$$0.000166 < \frac{0.001}{6} < 0.000167$$

である．また，$0 < \theta < 1$ と $e < 3$ より

$$0 < \frac{0.1^4}{24}\, e^{0.1\theta} < \frac{0.1^4}{24}\, e^{0.1} < \frac{0.1^4}{24}\, e < \frac{0.1^4}{8} = 0.0000125$$

であるから

$$1.105 + 0.000166 + 0 < e^{0.1} < 1.105 + 0.000167 + 0.0000125$$

が成り立つ．これを計算すれば

$$1.105166 < e^{0.1} < 1.1051795$$

となる．よって，$e^{0.1}$ の小数第 4 位までの正しい近似値として 1.1051 を得る．

（解答終）

上の例題で 3 次多項式と剰余項の和で表したのは最初から確信があって 3 次多項式を選んだのではなく，そうして試したみたらうまくいっただけである．ただし，剰余項を見ることである程度見当をつけることは可能である．ここでは剰余項は

$$R_n(0.1) = \frac{0.1^n}{n!}\, e^{0.1\theta}$$

であるから，これは 0.1^n よりもかなり小さいと考えられる．そこで $n = 4$ とすれば，これは $0.1^4 = 0.0001$ よりもかなり小さいだろうから，誤差が小数第 5 位以下にしか影響しないのでは $\cdots$? と期待できるので実行してみたらうまくいったのが上の解答である．もしかしたら最後に足し合わせるときに小数第 5 位からの繰り上がりで小数第 4 位に影響が出るかもしれないが，その場合には n を増やしてやり直せばいつかは解決できる．

なお，上の式をもっと細かく調べると，剰余項について $1 < e^{0.1\theta} < e < 3$ より

$$0.0000041 < 0.00000416\cdots = \frac{0.1^4}{24} < \frac{0.1^4}{24}\, e^{0.1\theta} < \frac{0.1^4}{8} = 0.0000125$$

とすれば

$$1.105 + 0.000166 + 0.000004 < e^{0.1} < 1.105 + 0.000167 + 0.0000125$$

$$1.10517 < e^{0.1} < 1.1051795$$

となる．よって，$e^{0.1}$ の小数第 5 位までの正しい近似値として 1.10517 を得ることができる．ただし，精度を上げるなら多項式の次数を上げた方が楽なことが多い．

例題 6.9. $\sqrt{17}$ の小数第 3 位までの値を求めよ．

（解答） $\sqrt{1+x}$ のマクローリンの定理による展開式を利用したいが，$\sqrt{1+x}$ に $x=16$ を代入したものと見ると誤差が大きくなる．そこで

$$\sqrt{17} = 4\sqrt{1+\frac{1}{16}}$$

として，$4\sqrt{1+x}$ のマクローリン展開式を利用する．

$$\binom{1/2}{n} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

であるから，例 6.4 より

$$\begin{aligned}4\sqrt{1+x} &= 4\sum_{k=0}^{n-1}\binom{1/2}{k}x^k + 4\binom{1/2}{n}(1+\theta x)^{(1/2)-n}x^n \\ &= 4 + 4\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k k!}\,x^k + 4\cdot\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!}\,(1+\theta x)^{(1/2)-n}x^n\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$n=3$ として

$$4\sqrt{1+x} = 4 + 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\,(1+\theta x)^{-5/2}\,x^3$$

となる．さらに，$x=\dfrac{1}{16}$ を代入すると

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{8} - \frac{1}{512} + \frac{1}{16384}\left(1+\frac{\theta}{16}\right)^{-5/2} = \frac{2111}{512} + \frac{1}{16384}\left(1+\frac{\theta}{16}\right)^{-5/2}$$

であり，割り算を計算すると

$$\frac{2111}{512} = 4.1230\cdots \qquad \therefore\ 4.1230 < \frac{2111}{512} < 4.1231$$

となる．

そこで，剰余項の大きさを調べる．$0<\theta<1$ より

$$0 < \frac{1}{16384}\left(1+\frac{\theta}{16}\right)^{-5/2} < \frac{1}{16384} < \frac{1}{10000} = 0.0001$$

であるから

$$4.1230 + 0 < \sqrt{17} < 4.1231 + 0.0001 = 4.1232$$

が成り立つ．ゆえに，$\sqrt{17}$ の小数第 3 位までの正しい近似値として 4.123 を得る．

（解答終）

もし $f(x)=\sqrt{1+x}$ を 2 次多項式と剰余項の和で表すだけならば，n 階導関数の公式を用いなくても

$$f(x) = (1+x)^{1/2}, \qquad f'(x) = \frac{1}{2}\,(1+x)^{-1/2}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}\,(1+x)^{-3/2}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8}\,(1+x)^{-5/2}$$

と具体的に導関数を求めれば

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f'''(\theta x)}{6}\,x^3 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}\,(1+\theta x)^{-5/2}x^3$$

と計算することができる．

また，今回は小数第 3 位まで求めればよいので，剰余項については繰り上がりを加味しても小数第 3 位に影響を与えないことを示せばよい．例えば上のように 10^{-4} で挟むなど，慣れてくれば計算が楽なように工夫すればよい．

6.3 漸近展開

ここまでに関数の極限の計算方法をいろいろ説明してきた．不定形の極限の例を考えてみると

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^3+4x^2+3x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

左のように多項式だけなら簡単に計算できる（分母と分子を最低次数の x で割ればよい）が，右のように三角関数，指数・対数関数やべき乗根などが出てくると何か工夫が必要となることが多い．しかし，前節のテイラーの定理（マクローリンの定理）より，初等関数は剰余項でずれを表すことで多項式により近似できた．つまり，上の例の右側の極限も実は多項式の極限に直せるのではないか？と期待できる．

正直なところ，剰余項はたいてい複雑な形になってしまうので扱いにくい．ただし，例えば

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{x^5+2x^3+3x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^6-7x^3+3x}{-x^4+3x^2+3x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^5-x^2+3x}{4x^3+3x}$$

はすべて極限値 1 である．$x\to 0$ の場合には x の高次の項は重要ではなく，分母と分子の最低次数とその係数が重要になる．ということは，剰余項の部分は高次の項とみなせるから，丁寧に計算する必要はあまりないかもしれない．

定義 6.10. （ランダウの記号）

a を実数とする．自然数 n に対して，関数 $f(x)$ が次の条件

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}=0$$

をみたすとき，

$$f(x)=o((x-a)^n) \qquad (x\to a)$$

で表す．o は小文字のオーで書く（本当はギリシャ語のオミクロンだが気にしなくてよい）．この記号 $o((x-a)^n)$ を**ランダウの記号**という．

大文字にして $O((x-a)^n)$ と書くと意味が変わるので注意．小文字とわかるように書くこと．また，必ず $x\to a$ もセットで書くこと．

ここでは主に $a=0$ の場合を考える．具体例を挙げておくと

$$\begin{aligned}
x+x^2+x^3+x^4 &= o(1) && (x\to 0)\\
x+x^2+x^3+x^4 &= x+o(x) && (x\to 0)\\
x+x^2+x^3+x^4 &= x+x^2+o(x^2) && (x\to 0)
\end{aligned}$$

となる．ランダウの記号は最初はとっつきにくいこともあるので，$x\to 0$ のときには **$o(x^n)$ は $n+1$ 次以上の項をまとめて表しているとイメージすれば**計算しやすい．ただし，正確には $\sqrt{|x|^3}=o(x)$ $(x\to 0)$ のようにべき乗関数も含まれるので注意すること．

ランダウの記号 $o(x^n)$ は $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=0$ となる関数 $f(x)$ をすべてまとめて一つの記号で表しているので，$o(x^n)$ を通常の関数だと思うような計算はできない．例えば

$$
\begin{aligned}
3x+x^2+x^3 &= 3x+o(x) && (x\to 0)\\
-x+3x^2+5x^3 &= -x+o(x) && (x\to 0)\\
2x-4x^2+x^7 &= 2x+o(x) && (x\to 0)
\end{aligned}
$$

において，それぞれの $o(x)$ が表す関数は異なる．そのため，1 本目と 2 本目の式で辺々引いて

$$4x-2x^2-4x^3=4x$$

と計算することはできない．この式の左辺と右辺は明らかに関数として異なっている．正しくは，辺々引いても

$$4x-2x^2-4x^3=4x+o(x) \qquad (x\to 0)$$

である．

例題 6.11. 次が成り立つことを示せ．

(1) $\cos x-1=o(x) \qquad (x\to 0)$

(2) $\sin x-x=o(x) \qquad (x\to 0)$

(3) 3 以上の自然数 n と $\displaystyle f(x)=\sum_{k=3}^{n}a_kx^k$ に対して，$f(x)=o(x^2) \qquad (x\to 0)$

（解答）

(1) x で割って極限をとると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{-\sin x}{1+\cos x}=1\cdot 0=0$$

なので，$\cos x-1=o(x)$ $(x\to 0)$ が成り立つ．

(2) x で割って極限をとると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=1-1=0$$

であるから，$\sin x-x=o(x)$ $(x\to 0)$ が成り立つ．

(3) x^2 で割って極限をとると，$n\geqq 3$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\sum_{k=3}^{n}a_kx^{k-2}=\lim_{x\to 0}\left(a_3x+a_4x^2+\cdots+a_nx^{n-2}\right)=0$$

であるから，$f(x)=o(x^2)$ $(x\to 0)$ が成り立つ．

（解答終）

注意 6.12. 関数をランダウの記号を用いて

$$\cos x=1+o(x) \qquad (x\to 0)$$

や

$$\sin x=x+o(x) \qquad (x\to 0)$$

のように表すこともある．

関数が n 回微分可能よりもさらによい性質をもてば，ランダウの記号を用いて次のように表せる．

定理 6.13. （漸近展開）
関数 $f(x)$ は点 0 を含む開区間 I 上で C^n 級関数であるとする．このとき

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + o(x^n) \qquad (x \to 0)$$

が成り立つ．

証明. マクローリンの定理より，各 $x \in I$ に対して，ある $0 < \theta < 1$ が存在して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\, x^n$$

と表せる．これより

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

となる．

ここで，$h(x) = \dfrac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ とおくと，$f(x)$ は C^n 級だから n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ は連続なので

$$|\theta x| < |x| \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0)$$

とあわせると

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0) - f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

が得られる．よって，$h(x) = o(x^n) \ \ (x \to 0)$ であるから

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + o(x^n) \qquad (x \to 0)$$

が成り立つ． □

マクローリンの定理は n 回微分可能という仮定だが，もし **n 階導関数が連続（C^n 級）ならば**上のように n 次多項式と「x^n より高次の微小項 $o(x^n)$」の和で表せる．

漸近展開の $o(x^n)$ の部分が具体的にどのような形かはこの定理からはわからない．あくまで，**関数 $f(x)$ と n 次近似多項式のずれが $o(x^n)$ である**ことのみを主張している．そのため，漸近展開を利用して誤差評価付きの近似計算はできない．ただし，剰余項の具体的な表示を必要としない場合には扱いやすい．例えば，次に紹介する不定形の極限計算には便利である．

定理 6.13 より，初等関数の漸近展開について次の公式が成り立つ．

命題 6.14. （初等関数の漸近展開）

$x \to 0$ のときに，すべての自然数 n に対して以下が成り立つ．

(1) $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad (x \to 0)$

(2) $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad (x \to 0)$

(3) $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \qquad (x \to 0)$

(4) $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) \qquad (x \to 0)$

(5) $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \qquad (x \to 0)$

最初の 2〜3 項までの漸近展開はよく使われるので，すぐに書けるようにしておくこと．$x \to 0$ のときの漸近展開をいくつか具体的に書いておく．問題に応じて必要な次数までの公式を用いればよい．

e^x については

$$e^x = 1 + x + o(x) \qquad (x \to 0)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad (x \to 0)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

となる．

$\sin x$ については，奇数次数しか現れないので

$$\sin x = x + o(x^2) \qquad (x \to 0)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad (x \to 0)$$

となる．$\cos x$ については，偶数次数しか現れないので

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \qquad (x \to 0)$$

となる．次数が 1 つとびで現れるので，ランダウの記号の次数に注意すること．

$\log(1+x)$ については

$$\log(1+x) = x + o(x) \qquad (x \to 0)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad (x \to 0)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

となる．定数項はなく 1 次の項から始まり，分母が階乗ではないので注意すること．

また，ランダウの記号に関しては次が成り立つことがわかる．

定理 6.15. **（ランダウの記号の演算）**

$x \to 0$ とするとき，以下が成り立つ．

(1) $o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m}) \qquad (x \to 0)$

(2) $x^n o(x^m) = o(x^{n+m}) \qquad (x \to 0)$

(3) $m \geqq n$ ならば，$o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^n) \qquad (x \to 0)$

(4) 定数 C に対して，$Co(x^n) = o(x^n) \qquad (x \to 0)$

証明. いずれもランダウの記号の定義を確認すればよい．

(1) $$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)o(x^m)}{x^{n+m}} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} \cdot \frac{o(x^m)}{x^m} = 0 \cdot 0 = 0$$

(2) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^n o(x^m)}{x^{n+m}} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^m)}{x^m} = 0$$

(3) $$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n) \pm o(x^m)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{o(x^n)}{x^n} \pm \frac{o(x^m)}{x^m} \cdot x^{m-n} \right) = 0 \pm 0 \cdot 0 = 0$$

(4) $$\lim_{x\to 0} \frac{Co(x^n)}{x^n} = \lim_{x\to 0} C \frac{o(x^n)}{x^n} = C \cdot 0 = 0$$

□

大雑把に言えば，積については指数法則のようなものが成り立ち，$x \to 0$ のときは和について次数の低い方にまとまる．以下で $x \to 0$ のときのランダウの記号の計算例を示すので，上の公式と照らし合わせてみること．感覚的には（とりあえずべき乗関数を考えずに）$o(x^n)$ とは x^{n+1} 以上の次数をもつ項のこととイメージすれば，計算法則が理解しやすい．

$$\begin{aligned}\bigl(1 + x + 3x^3 + o(x^3)\bigr) - \bigl(2x - 6x^2 + o(x^2)\bigr) &= 1 - x + 6x^2 + \bigl(3x^3 + o(x^3) - o(x^2)\bigr) \\ &= 1 - x + 6x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

ランダウの記号については次数の低いものにまとまる．例えば $o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)\ \ (x \to 0)$ である．また上の例では $x^3 = o(x^2)\ \ (x \to 0)$ であるから，この項もランダウの記号にまとまってしまう．したがって，$o(x^n)$ という項がある和や差については，次数が n の項まで計算すればよく，$n+1$ 次以上の項は気にしなくてもよい．普段は

$$\bigl(1 + x + 3x^3 + o(x^3)\bigr) - \bigl(2x - 6x^2 + o(x^2)\bigr) = 1 - x + 6x^2 + o(x^2)$$

と計算すればよい．積については，まじめにやれば

$$\begin{aligned}&\bigl(1 + x + x^2 + o(x^2)\bigr)\bigl(2x - x^2 + o(x^2)\bigr) \\ &\qquad = 2x - x^2 + o(x^2) + 2x^2 - x^3 + xo(x^2) + 2x^3 - x^4 + x^2 o(x^2) + 2xo(x^2) - x^2 o(x^2) + o(x^2)o(x^2) \\ &\qquad = 2x - x^2 + o(x^2) + 2x^2 - o(x^2) + o(x^3) + o(x^2) - o(x^3) + o(x^4) + o(x^3) - o(x^4) + o(x^4) \\ &\qquad = 2x + x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

であるが，かなり無駄が多い．ランダウの項が絡む積で次数が一番低い項に着目すれば $o(x^2)$ であるから，3 次以上の項はすべて $o(x^2)$ にまとまるので 2 次以下の項のみについて計算すればよく

$$\bigl(1 + x + x^2 + o(x^2)\bigr)\bigl(2x - x^2 + o(x^2)\bigr) = 2x + (-1 + 2)x^2 + o(x^2) = 2x + x^2 + o(x^2)$$

とすればよい．

6.4 微分法の応用その 6：漸近展開を利用した不定形の極限の計算例

漸近展開を利用すると次のような極限計算ができる．

例題 6.16. 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$

（解答）

(1) $\sin x = x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)\ \ (x\to 0)$ であるから

$$x-\sin x=\frac{x^3}{6}+o(x^4)\qquad (x\to 0)$$

となるので

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}+\frac{o(x^4)}{x^4}\cdot x\right)=\frac{1}{6}+0=\frac{1}{6}$$

(2) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\ \ (x\to 0)$ であるから

$$e^x-1-x=\frac{x^2}{2}+o(x^2)\qquad (x\to 0)$$

となるので

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

(3) $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\ \ (x\to 0)$ であるから

$$\log(1+x)-x=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\qquad (x\to 0)$$

となるので

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}+0=-\frac{1}{2}$$

（解答終）

上では丁寧に解答したが，実際にはここまで説明を書かなくてもよい．ランダウの記号を利用した計算に慣れてくれば，このレベルの計算については漸近展開を頭の中で描くことですぐに極限値がわかるのが望ましい．

まずはランダウの記号の計算に慣れておくこと．例えば (1) で

$$x-\sin x=\frac{x^3}{6}-o(x^4)\qquad (x\to 0)$$

なのでは？と思うかもしれない（別に間違いではないが）．ただし，ランダウの記号の意味を考えれば，その前の符号には意味がないのですべてプラスで書いてよい．

これらの不定形の極限は漸近展開からすぐに求まるので，わざわざロピタルの定理を使う必要はない．むしろロピタルの定理による計算は問題の本質を捉えていない．まずは漸近展開に慣れるために，よく計算練習をしておくこと．

前に挙げた例ではロピタルの定理からも極限計算が実行できるが，もっと複雑な問題に関しては漸近展開の方が有効である．

例題 6.17.　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-\sin x)(x-\sin x)}{x(1-\cos x)^2}$$

（解答）　各項に漸近展開を代入すれば，$x\to 0$ のとき

$$e^x-1-\sin x=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1-\big(x+o(x^2)\big)=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

および

$$x-\sin x=x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)=\frac{x^3}{6}+o(x^4)$$

より，分子は

$$(e^x-1-\sin x)(x-\sin x)=\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)=\frac{x^5}{12}+o(x^5)$$

また

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

より

$$(1-\cos x)^2=\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2=\frac{x^4}{4}+o(x^5)$$

なので，分母は

$$x(1-\cos x)^2=x\left(\frac{x^4}{4}+o(x^5)\right)=\frac{x^5}{4}+o(x^6)$$

となる．

よって，求める極限値は

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-\sin x)(x-\sin x)}{x(1-\cos x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{12}+o(x^5)}{\frac{x^5}{4}+o(x^6)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}+\frac{o(x^5)}{x^5}}{\frac{1}{4}+\frac{o(x^6)}{x^6}\cdot x}=\frac{\frac{1}{12}+0}{\frac{1}{4}+0}=\frac{1}{3}$$

（解答終）

どの次数まで漸近展開すればよいかは問題によって異なる．$x\to 0$ の場合には x の最も次数が低い項が残るようにすればよく，ランダウの記号のみが残ってしまうとうまくいかない．具体的には上の例題で

$$e^x-1-\sin x=\big(1+x+o(x)\big)-1-\big(x+o(x^2)\big)=o(x)$$

としてしまうと極限値は求められない（各自で確かめてみよ）．

また，必要以上に細かく計算しても面倒になるだけで意味はないので，上手い計算をできるよう練習しておくこと．例えばこの例題では

$$x-\sin x=x-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+o(x^6)$$

のようにしても，計算の手間が増えるだけで何も実入りはない．

例題 6.18.　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\log(1+x)}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - xe^x + x^2}{x(\cos x - 1)}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)$

（解答）

(1)　各項に漸近展開を代入すれば，$x\to 0$ のとき

$$\sin x - x\cos x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

および

$$x^2\log(1+x) = x^2\bigl(x + o(x)\bigr) = x^3 + o(x^3)$$

となる．よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\log(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{3} + \dfrac{o(x^4)}{x^4}\cdot x}{1 + \dfrac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1}{3}$$

(2)　各項に漸近展開を代入すれば，$x\to 0$ のとき

$$\sin x - xe^x + x^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + x^2 = -\frac{2}{3}\,x^3 + o(x^3)$$

および

$$x(\cos x - 1) = x\left\{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - 1\right\} = -\frac{1}{2}\,x^3 + o(x^4)$$

となる．よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - xe^x + x^2}{x(\cos x - 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{3}\,x^3 + o(x^3)}{-\dfrac{1}{2}\,x^3 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{3} + \dfrac{o(x^3)}{x^3}}{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{o(x^4)}{x^4}\cdot x} = \frac{4}{3}$$

(3)　通分して漸近展開を代入すれば，$x\to 0$ のとき

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin x} = \frac{\sin x - x}{x^2\sin x} = \frac{\left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - x}{x^2\bigl(x + o(x^2)\bigr)} = \frac{-\dfrac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^3 + o(x^4)}$$

であるから

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^3 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{6} + \dfrac{o(x^4)}{x^4}\cdot x}{1 + \dfrac{o(x^4)}{x^4}\cdot x} = -\frac{1}{6}$$

（解答終）

ランダウの記号と極限計算に慣れるまでは，解答を清書する前にその次数の漸近展開でよいかを確認する方がよいかもしれない．

既に漸近展開を知っている関数の合成関数やそれらを組み合わせてできる関数については，次のように漸近展開を求めることができる．

例題 6.19.　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x}$

（解答）

(1)　$e^y = 1+y+o(y)\quad (y\to 0)$ であるから，この式で $y=x^2$ とおけば

$$e^{x^2} = 1+x^2+o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

と漸近展開できる．よって，各項に漸近展開を代入すれば，$x\to 0$ のとき

$$e^{x^2}-\cos x = \big(1+x^2+o(x^2)\big) - \left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = \frac{3}{2}\,x^2+o(x^2)$$

および

$$x\sin x = x\big(x+o(x^2)\big) = x^2+o(x^3)$$

となる．ゆえに

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}\,x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}\cdot x} = \frac{3}{2}$$

(2)　分母は

$$x-\sin x = \frac{x^3}{6}+o(x^4) \qquad (x\to 0)$$

であるから，$\tan x$ の x^3 の項までの漸近展開を求めたい．ここで，$\tan x$ は奇関数で，$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ の $x=0$ での値は 1 だから

$$\tan x = x+ax^3+o(x^3) \qquad (x\to 0)$$

とおける．また，$\tan x\cos x = \sin x$ であるから

$$\tan x\cos x = \big(x+ax^3+o(x^3)\big)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) = x+\left(a-\frac{1}{2}\right)x^3+o(x^3)$$

が $\sin x$ の漸近展開と一致するので

$$a-\frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \qquad \therefore\ a=\frac{1}{3}$$

となる．よって，分子は

$$\tan x - x = \frac{x^3}{3}+o(x^3) \qquad (x\to 0)$$

である．ゆえに

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6}+\frac{o(x^4)}{x^4}\cdot x} = 2$$

（解答終）

もっと係数を設定し，$\cos x$ の方も次数を上げて計算すれば

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}\,x^5+o(x^6) \qquad (x\to 0)$$

とわかる．もちろん実際に $\tan x$ を微分して係数を決定してもよい．$\tan x$ については $x=0$ のまわりで C^∞ 級であることがわかっているので，次数の低い項だけ必要ならばこのように計算することができる．

漸近展開の公式を知らない関数については，必要な次数まで n 階微分係数を求めて自分で作ればよい．

例題 6.20.　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\log(1-x)-1}{x-\mathrm{Tan}^{-1}x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x-\sqrt{1+2x}}{x^2(e^x-1)}$

（解答）

(1)　$\log(1+y)=y-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y^3}{3}+o(y^3)$ $(y\to 0)$ であるから，この式で $y=-x$ とおけば

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\qquad(x\to 0)$$

と漸近展開できる．よって，分子は

$$e^x+\log(1-x)-1=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-1=-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

となるので，分母を x^3 の項まで漸近展開すればよい．そこで，$f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x$ とおけば，例題 4.13 より $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=-2$ であるから

$$\mathrm{Tan}^{-1}x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\qquad(x\to 0)$$

が成り立つ．ゆえに，分母は $x-\mathrm{Tan}^{-1}x=\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ $(x\to 0)$ となるので

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\log(1-x)-1}{x-\mathrm{Tan}^{-1}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}{\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{6}+\dfrac{o(x^3)}{x^3}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{o(x^3)}{x^3}}=-\frac{1}{2}$$

(2)　分母は

$$x^2(e^x-1)=x^2\bigl(x+o(x)\bigr)=x^3+o(x^3)\qquad(x\to 0)$$

なので，分子を x^3 の項まで漸近展開すればよい．そこで，$f(x)=\sqrt{1+2x}$ とおけば

$$f'(x)=(1+2x)^{-1/2},\qquad f''(x)=-(1+2x)^{-3/2},\qquad f'''(x)=3(1+2x)^{-5/2}$$

より，$f(0)=1$，$f'(0)=1$，$f''(0)=-1$，$f'''(0)=3$ であるから

$$\sqrt{1+2x}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\qquad(x\to 0)$$

が成り立つ．ゆえに，分子は

$$\begin{aligned}\sin x+\cos x-\sqrt{1+2x}&=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)+\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)-\left(1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)\\&=-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\qquad(x\to 0)\end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x-\sqrt{1+2x}}{x^2(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{3}+\dfrac{o(x^3)}{x^3}}{1+\dfrac{o(x^3)}{x^3}}=-\frac{2}{3}$$

（解答終）

例題 6.21.　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$ を求めよ．

（解答）　分母が x であるから，分子を x の項まで漸近展開すればよい．ここで，$(1+x)^{1/x}=e^{\log(1+x)^{1/x}}$ と変形する．$y=\log(1+x)^{1/x}$ とおけば，$x\to 0$ のとき $y\to 1$ であり，e^y を $y=1$ を中心に漸近展開すれば

$$e^y=e+e(y-1)+o(y-1)=ey+o(y-1)\quad(y\to 1)$$

となる．また，$x\to 0$ のとき

$$y=\frac{\log(1+x)}{x}=\frac{x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}{x}=1-\frac{x}{2}+o(x)\qquad\therefore\ y-1=-\frac{x}{2}+o(x)$$

であるから，$o(y-1)=o(x)\ \ (x\to 0)$ となる．よって

$$(1+x)^{1/x}=e^y=ey+o(y-1)=e\left(1-\frac{x}{2}\right)+o(x)=e-\frac{e}{2}x+o(x)$$

となるので

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e-\left(e-\dfrac{e}{2}x+o(x)\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e}{2}x+o(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e}{2}+\frac{o(x)}{x}\right)=\frac{e}{2}$$

（解答終）

例題 6.22.　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ を求めよ．

（解答）　分母を漸近展開すれば，$x\to 0$ のとき

$$x-\sin x=x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)=\frac{x^3}{6}+o(x^4)$$

なので，分子を x^3 の項まで漸近展開すればよい．ここで，$\sin x=x+o(x^2)$ より $o(\sin^3 x)=o(x^3)$ であるから

$$\begin{aligned}
e^{\sin x}&=1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{6}+o(\sin^3 x)\\
&=1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o(x^3)\\
&=1+\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{6}\cdot x^3+o(x^3)\\
&=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)
\end{aligned}$$

より，分子は

$$e^x-e^{\sin x}=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

となる．よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}{\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{6}+\dfrac{o(x^3)}{x^3}}{\dfrac{1}{6}+\dfrac{o(x^4)}{x^4}\cdot x}=\frac{\dfrac{1}{6}+0}{\dfrac{1}{6}+0}=1$$

（解答終）

これはロピタルの定理や Cauchy の平均値の定理を利用しても求められるが（各自で計算してみよ），漸近展開を用いた計算にも慣れておくと今後が楽になる．

6.5　微分法の応用その 7：漸近展開による極大・極小の判定

2 次導関数を利用した極大・極小の判定法を高校数学 III で学習した．

定理 6.23. （2 階導関数を用いた極大・極小の判定）
関数 $f(x)$ は点 a の近傍上で C^2 級で，$f'(a)=0$ をみたすとする．

(1) $f''(a)>0$ ならば，$f(x)$ は $x=a$ で極小となる．

(2) $f''(a)<0$ ならば，$f(x)$ は $x=a$ で極大となる．

証明.　関数を平行移動しても極大・極小には関係ないので $g(x)=f(x+a)-f(a)$ を代わりに考えることにより，$a=0$ として $f(0)=f'(0)=0$ のもとで定理の主張を示せばよい．

$f(x)$ は C^2 級なので $x=0$ のまわりで漸近展開すれば，$f(0)=f'(0)=0$ より

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2\left(1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right) \qquad (x\to 0)$$

が成り立つ．さらに，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=1$ より，ある $\delta>0$ が存在して

$$0<|x|<\delta \quad\Longrightarrow\quad 1+\frac{o(x^2)}{x^2}>\frac{1}{2}$$

も成り立つ．

(1)　$f''(0)>0$ とすると，$0<|x|<\delta$ ならば

$$f(x)=\frac{f''(0)}{2}x^2\left(1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)>\frac{f''(0)}{4}x^2>0$$

より，$x=0$ のときの $f(0)=0$ は極小値である．

(2)　$f''(0)<0$ とすると，$0<|x|<\delta$ ならば

$$f(x)=\frac{f''(0)}{2}x^2\left(1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)<\frac{f''(0)}{4}x^2<0$$

より，$x=0$ のときの $f(0)=0$ は極大値である．

□

関数 $f(x)$ が $x=a$ で

$$f'(a)=f''(a)=0$$

となったときには，2 階導関数では極大・極小の判定はできない．また，具体的な問題では $f''(x)$ の計算が大変なので，定理 6.23 はあまり有効ではないことも少なくない．ただし，理論としては重要なので必ず理解はしておくこと．実は後で学習する 2 変数関数 $f(x,y)$ の極大・極小の判定には増減表が使えないので，いつも 2 階偏導関数を利用して考えることになる．

比較として，前と同じ問題を定理 6.23 を利用して求めてみる．

例題 6.24.　次の関数 $f(x)$ の極値を 2 階導関数を利用して求めよ．

(1) $f(x) = \dfrac{4x^2+2x+4}{x^2+1}$　　(2) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$　　(3) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$

（解答）

(1)　導関数を計算すれば

$$f'(x) = \frac{(8x+2)\cdot(x^2+1)-(4x^2+2x+4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

より，$f'(x)=0$ となるのは $x=\pm 1$ のときである．また

$$f''(x) = \frac{-4x\cdot(x^2+1)^2-(-2x^2+2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

であるから

$$f''(1) = \frac{-8}{8} = -1 < 0, \qquad f''(-1) = \frac{8}{8} = 1 > 0$$

となる．ゆえに，$x=1$ のとき極大値 $f(1)=5$，$x=-1$ のとき極小値 $f(-1)=3$ をとる．

(2)　導関数を計算すれば

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

より，$f'(x)=0$ となるのは，$x=e$ のときである．また

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\log x - 3}{x^3}$$

であるから

$$f''(e) = \frac{2-3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$$

となる．ゆえに，$x=e$ のとき極大値 $f(e)=\dfrac{1}{e}$ をとる．

(3)　導関数を計算すれば，$f(x)=x^2e^{-x}$ より

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

より，$f'(x)=0$ となるのは，$x=0,2$ のときである．また

$$f''(x) = (2-2x)e^{-x} - (2x-x^2)e^{-x} = (x^2-4x+2)e^{-x}$$

であるから

$$f''(0) = 2 > 0, \qquad f''(2) = -2e^{-2} < 0$$

となる．ゆえに，$x=0$ のとき極小値 $f(0)=0$，$x=2$ のとき極大値 $f(2)=\dfrac{4}{e^2}$ をとる．

（解答終）

このように簡単な関数については，2 階導関数の符号を計算するよりも増減表を書いた方が計算量は大幅に少ない．このように解いた方がいいというわけではないので注意すること．

同様にして高階導関数を用いて極大・極小を判定できることがある．

定理 6.25. （高階導関数を用いた極大・極小の判定）
関数 $f(x)$ は点 a の近傍上で C^n 級で

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0, \qquad f^{(n)}(a)\fallingdotseq 0$$

とする．

(1) n が偶数で $f^{(n)}(a)>0$ ならば，$f(x)$ は $x=a$ で極小となる．

(2) n が偶数で $f^{(n)}(a)<0$ ならば，$f(x)$ は $x=a$ で極大となる．

(3) n が奇数ならば，$f(x)$ は $x=a$ で極値をとらない．

証明． 関数を平行移動しても極大・極小には関係ないので $g(x)=f(x+a)-f(a)$ を代わりに考えることにより，$a=0$ として $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$, $f^{(n)}(0)\fallingdotseq 0$ のもとで定理の主張を示せばよい．

$f(x)$ は C^n 級なので $x=0$ のまわりで漸近展開すれば，仮定より

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\left(1+\frac{o(x^n)}{x^n}\right) \qquad (x\to 0)$$

が成り立つ．さらに，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{o(x^n)}{x^n}\right)=1$ より，ある $\delta>0$ が存在して

$$0<|x|<\delta \quad\Longrightarrow\quad 1+\frac{o(x^2)}{x^2}>\frac{1}{2}$$

も成り立つ．

(1) $n=2k$ でかつ $f^{(n)}(0)>0$ とすると，$0<|x|<\delta$ ならば

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{2k}\left(1+\frac{o(x^n)}{x^n}\right)>\frac{f^{(n)}(0)}{2\cdot n!}x^{2k}>0$$

より，$x=0$ のときの $f(0)=0$ は極小値である．

(2) $n=2k$ でかつ $f^{(n)}(0)<0$ とすると，$0<|x|<\delta$ ならば

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{2k}\left(1+\frac{o(x^n)}{x^n}\right)<\frac{f^{(n)}(0)}{2\cdot n!}x^{2k}<0$$

より，$x=0$ のときの $f(0)=0$ は極大値である．

(3) $n=2k-1$ でかつ $f^{(n)}(0)>0$ とすると，$0<x<\delta$ ならば

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{2k-1}\left(1+\frac{o(x^n)}{x^n}\right)>\frac{f^{(n)}(0)}{2\cdot n!}x^{2k-1}>0$$

であり，$-\delta<x<0$ ならば $x^{2k-1}<0$ より

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{2k-1}\left(1+\frac{o(x^n)}{x^n}\right)<\frac{f^{(n)}(0)}{2\cdot n!}x^{2k-1}<0$$

となる．よって，$x=0$ のときの $f(0)=0$ は極値ではない．$f^{(n)}(0)<0$ の場合も同様である．

□

具体的な関数について高階導関数を利用して極大・極小を判定する場合には，定理の証明のように漸近展開を利用するのがよい．定数項以外で係数が 0 にならない次数が一番低い項について，その次数が偶数ならば係数の符号を見ればよく，次数が奇数ならばそこで極値をとらないことがわかる．

例題 6.26. 次の関数 $f(x)$ が $x=0$ で極値をとるかどうか調べよ．

(1) $f(x)=x^2\log(1+x)-x^3$

(2) $f(x)=x^3e^x-x^2\sin x$

(3) $f(x)=x^2\sin x-x\sin^2 x$

（解答）

(1) $f(x)$ を $x=0$ のまわりで漸近展開すれば

$$f(x)=x^2\log(1+x)-x^3=x^2\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-x^3=-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

となるので，$x=0$ で極大となる．

(2) $f(x)$ を $x=0$ のまわりで漸近展開すれば

$$f(x)=x^3e^x-x^2\sin x=x^3\big(1+x+o(x)\big)-x^2\big(x+o(x^2)\big)=x^4+o(x^4)$$

となるので，$x=0$ で極小となる．

(3) $f(x)$ を $x=0$ のまわりで漸近展開すれば

$$\begin{aligned}f(x)=x^2\sin x-x\sin^2 x&=x^2\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)-x\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2\\&=x^3-\frac{x^5}{6}+o(x^6)-x\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^5)\right)=\frac{x^5}{6}+o(x^6)\end{aligned}$$

となるので，$x=0$ で極値をとらない．

（解答終）

このように具体的な関数については漸近展開により特徴をつかめばよい．大雑把に述べれば，(1) については

$$f(x)=x^2\log(1+x)-x^3=-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\qquad(x\to 0)$$

であり，$o(x^4)$ は $x=0$ の十分近くでは x^4 より小さい項なので，$f(x)$ は $-\dfrac{x^4}{2}$ に近いと考えられるから，$f(x)$ は $x=0$ で極大となるということである．この部分をきちんと説明するには定理 6.25 の証明のように，$\delta>0$ を十分小さくとれば，$0<|x|<\delta$ ならば

$$f(x)=-\frac{x^4}{2}\left(1+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)<-\frac{x^4}{2}\cdot\frac{1}{2}<0=f(0)$$

であることを述べればよい．

また，(3) では

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^5)\right)=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^5)$$

と計算してもよい．

6.6 関数のテイラー展開

テイラーの定理より，微分可能な関数はその微分可能な回数に応じた次数の多項式と剰余項 $R_n(x)$ の和で表せることがわかった．ここで，この剰余項が $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ をみたせば，関数が "無限次の多項式" で表せることが期待される．

定義 6.27. （整級数）

実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，変数 x を含んだ級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

を $x = 0$ を中心とする**整級数**という．一般に

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

を $x = c$ を中心とする整級数という．

定義 6.28. （**Taylor 展開・Maclaurin 展開**）

関数 $f(x)$ は開区間 I 上で C^{∞} 級であるとする．このとき，$a \in I$ に関するテイラーの定理における剰余項 $R_n(x)$ について，各 $x \in I$ に対して $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が成り立つならば

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

を $f(x)$ の $x = a$ における**テイラー展開**という．

特に $0 \in I$ であるとき，各 $x \in I$ に対して $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が成り立つならば

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

を $f(x)$ の**マクローリン展開**という．

実際に関数が整級数で表せるかどうかは，マクローリンの定理における剰余項 $R_n(x)$ について

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

であるかどうかを確認すればよい．すでに代表的な関数については $R_n(x)$ の形を具体的に求めてあるので，次の例のように展開できることがわかる．

例題 6.29.　次の初等関数のマクローリン展開を求めよ．

(1) e^x　　(2) $\sin x$　　(3) $\cos x$

（解答）　第 3 章例題 3.9 より，$a \in \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ である．

(1)　剰余項は $R_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{n!}\, x^n$ であるから，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，$0 < \theta < 1$ より

$$|R_n(x)| \leqq \frac{|x|^n}{n!}\, e^{\theta x} \leqq \frac{|x|^n}{n!}\, e^{|x|} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つ．よって，はさみうち法より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ であるから

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

(2)　剰余項は $R_n(x) = \dfrac{x^n}{n!} \sin\left(\theta x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ であるから，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，$0 < \theta < 1$ より

$$|R_n(x)| \leqq \frac{|x|^n}{n!} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つ．よって，はさみうち法より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ であるから

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

(3)　剰余項は $R_n(x) = \dfrac{x^n}{n!} \cos\left(\theta x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ であるから，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，$0 < \theta < 1$ より

$$|R_n(x)| \leqq \frac{|x|^n}{n!} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つ．よって，はさみうち法より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ であるから

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

（解答終）

この結果より，実数 x の部分に形式的に虚数単位をかけた ix を形式的に代入すれば

$$\begin{aligned} e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{x^{4n}}{(4n)!} + \frac{ix^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{ix^{4n+3}}{(4n+3)!} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

となる．これが有名なオイラーの公式である．これは厳密な証明ではないので，詳細は複素関数論の講義で学習すること．なお，この公式で $x = \pi$ とすれば

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$$

より，オイラーの等式 $e^{\pi i} + 1 = 0$ が得られる．

例 6.30. $\log(1+x)$ と $(1+x)^\alpha$ のマクローリン展開については，剰余項について $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が成り立つことを示すのは難しい．そこで，積分の知識を得た後に戻ってくることにする．結果は，$|x| < 1$ のとき

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots$$

および

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots$$

となる．詳しくは第 7 章例題 4.19 と例題 4.21 で扱う．

無限等比級数の和の公式が適用できる場合には，マクローリンの定理を経由しなくても直接にマクローリン展開を求めることができる．このときには剰余項の計算をする必要はない．

例題 6.31. 次の関数のマクローリン展開を求めよ．収束する x の範囲も求めること．

(1) $\dfrac{1}{3+2x}$　　(2) $\dfrac{x}{1+x^2}$　　(3) $\dfrac{x-1}{2x^2+3x-2}$

（解答）

(1) $\dfrac{1}{3+2x} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1-\dfrac{-2x}{3}}$ であるから，$\left|\dfrac{-2x}{3}\right| < 1$ つまり $|x| < \dfrac{3}{2}$ のとき

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{-2x}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^{n+1}}x^n$$

(2) $\dfrac{x}{1+x^2} = x \cdot \dfrac{1}{1-(-x^2)}$ であるから，$|-x^2| < 1$ つまり $|x| < 1$ のとき

$$\frac{x}{1+x^2} = x \cdot \frac{1}{1-(-x^2)} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$$

(3) 部分分数分解すれば

$$\frac{x-1}{2x^2+3x-2} = \frac{x-1}{(2x-1)(x+2)} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{x+2} - \frac{1}{2x-1}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{-x}{2}} + \frac{1}{1-2x}\right)$$

であるから，$\left|\dfrac{-x}{2}\right| < 1$ かつ $|2x| < 1$，つまり $|x| < \dfrac{1}{2}$ ならば

$$\frac{x-1}{2x^2+3x-2} = \frac{1}{5}\left\{\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}\left\{\frac{3(-1)^n}{2^{n+1}} + 2^n\right\}x^n$$

（解答終）

具体的な関数のマクローリン展開を求めるには，既に示したマクローリン展開の公式が利用できるように式変形するのが基本である．

例題 6.32.　次の関数のマクローリン展開を求めよ．x の範囲も求めること．

(1) $\sin^2 x$　　(2) $\sinh x$　　(3) $\log(1+x-6x^2)$

(4) x^2e^{2x}　　(5) 2^x

（解答）

(1)　$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ であるから，すべての実数 x に対して

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}\,x^{2n}$$

(2)　$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ であるから，すべての実数 x に対して

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2}\cdot\frac{x^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

(3)　真数条件より，$1+x-6x^2 = (1+3x)(1-2x) > 0$ であるから，$-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{2}$ となる．このとき

$$\log(1+x-6x^2) = \log(1+3x) + \log(1-2x)$$

であるから，$|3x| < 1$ かつ $|-2x| < 1$，つまり $|x| < \dfrac{1}{3}$ ならば

$$\log(1+x-6x^2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{3^n+(-2)^n}{n}\,x^n$$

(4)　すべての実数 x に対して

$$x^2e^{2x} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\,x^{n+2}$$

(5)　$2^x = e^{x\log 2}$ であるから，すべての実数 x に対して

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\log 2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log 2)^n}{n!}\,x^n$$

（解答終）

関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めるには，単に $f^{(n)}(0)$ を求めて

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

に代入すれば良さそうであるが，それでは誤りである．上の例題はすでに紹介したマクローリン展開の公式を利用したから剰余項を考える必要がなかっただけで，そうでない場合には剰余項が 0 に収束することを示さなければならない．

例題 6.33.　$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を次で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

(1) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^∞ 級であることを示せ．

(2) $f(x)$ はマクローリン展開不可能であることを示せ．

（解答）

(1)　$f(x)$ が $x > 0$ で C^∞ 級なこと，および $f^{(n)}(x) = 0$ $(x < 0)$ であることは明らかである．あとは $f(x)$ が $x = 0$ で何回も微分できることを示せばよいので，その準備としてある $2n$ 次多項式 $p_n(t)$ が存在して

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x} \qquad (x > 0)$$

と表せることを数学的帰納法により証明する．

(i)　$n = 1$ のとき，$x > 0$ では

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\,e^{-1/x}$$

であるから，$p_1(t) = t^2$ とおけば $f'(x) = p_1\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x}$ が成り立つ．

(ii)　$n = k$ $(k \geqq 1)$ のときにある $2k$ 次多項式 $p_k(t)$ が存在して

$$f^{(k)}(x) = p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x} \qquad (x > 0)$$

と表せると仮定する．この両辺を微分すれば

$$f^{(k+1)}(x) = p_k'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2}\,e^{-1/x} + p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}\,\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left\{p_k\left(\frac{1}{x}\right) - p_k'\left(\frac{1}{x}\right)\right\}e^{-1/x}$$

であるから

$$p_{k+1}(t) = t^2\{p_k(t) - p_k'(t)\}$$

とおけば，これは $2k+2$ 次多項式で，$f^{(k+1)}(x) = p_{k+1}\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x}$ より $n = k+1$ のときも成り立つ．

以上より上で述べたことが成り立つ．

次に，任意の自然数 m に対して，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t^m}{e^t} = 0$ が成り立つ．これは $t > 0$ において

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} > \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \qquad \therefore\ 0 < \frac{t^m}{e^t} < \frac{(m+1)!}{t}$$

が成り立つことからわかる．これを用いて，$f(x)$ は $x = 0$ で何回でも微分可能で $f^{(n)}(0) = 0$ であることを数学的帰納法で示す．

(i)　$n = 1$ のとき

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{e^{-1/x} - 0}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} = 0$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{0 - 0}{x} = \lim_{x\to-0} 0 = 0$$

であるから，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ となる．よって，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = 0$ である．

(ii) $n=k$ $(k \geqq 1)$ のときに $f^{(k)}(x)$ が $x=0$ で微分可能で $f^{(k)}(0)=0$ であると仮定する．このとき

$$\lim_{x\to+0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{p_k\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x}-0}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{tp_k(t)}{e^t}=0$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{0-0}{x}=\lim_{x\to-0}0=0$$

であるから，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}=0$ となる．よって，$f^{(k)}(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f^{(k+1)}(0)=0$ である．

以上より上で述べたことが成り立つ．ゆえに，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^∞ 級である．

(2) もし $f(x)$ がマクローリン展開可能であると仮定すると，ある $\delta>0$ が存在して

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (|x|<\delta)$$

と表せることになる．しかし，(1) の結果より $f^{(n)}(0)=0$ なので上式は

$$f(x)=0 \qquad (|x|<\delta)$$

となり，$0<x<\delta$ においてこの等式は成り立たない．よって，これは矛盾であるから $f(x)$ はマクローリン展開不可能な関数である．

（解答終）

$x>0$ のときは $f(x)=e^{-1/x}$ であるから，$x\to+0$ のときに指数関数的に $f(x)$ は 0 に収束する．よって，任意の自然数 n に対して，x^n よりも速く $f(x)$ の方が 0 に収束するため，$x=0$ のまわりで多項式では近似できない．これがこの関数 $f(x)$ がマクローリン展開不可能な理由である．詳細は次節も参照すること．

このように関数が何回でも微分できるからといって，マクローリン展開が必ずできるとは限らない．初等関数の既知のマクローリン展開の公式が適用できない場合には剰余項こみできちんと計算すること．

発展問題 6.2. $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を次で定義する．

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & (|x|<1) \\ 0 & (|x|\geqq 1)\end{cases}$$

(1) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^∞ 級であることを示せ．

(2) $f(x)$ は $x=1$ のまわりでテイラー展開できるかどうか調べよ．

6.7 関数の増大速度の比較

ここでは多項式と指数関数・対数関数の関係する極限の計算の際に便利である増大速度の比較について考える．

$x > 0$ のとき，任意の自然数 m に対して

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}$$

より

$$0 < \frac{x^m}{e^x} < \frac{(m+1)!}{x}$$

となるから，はさみうちの定理より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^x} = 0$$

が成り立つ．これより

$$x^m \ll e^x \qquad (x \to \infty)$$

つまり，**どんな次数の多項式よりも指数関数の方が増大速度が圧倒的に速い**ことがわかる．

同様にして，$\alpha > 0,\ \beta > 0$ ならば $m = [\beta]$ とおけば，$x > 0$ のとき

$$e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} > \frac{(\alpha x)^{m+1}}{(m+1)!}$$

より

$$0 < \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} < \frac{(m+1)!}{\alpha^{m+1} x^{m+1-\beta}}$$

となるから，$m+1-\beta > 0$ とはさみうちの定理より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$$

が成り立つ．よって，べき乗関数でも同様である．

次に，多項式と対数関数を比較する．$\alpha > 0,\ \beta > 0$ ならば，$t = \log x$ とおくことにより

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^\beta}{x^\alpha} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^\beta}{e^{\alpha t}} = 0$$

となる．これより，**対数関数は多項式よりも増大速度が圧倒的に遅い**ことがわかる．

命題 6.34. （増加速度の比較）
$\alpha > 0$ とする．$x \to \infty$ における関数の増大速度について

$$\log x \ll x^\alpha \ll e^x$$

が成り立つ．つまり

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$$

となる．

これは覚えておくのが便利だが，理由も説明できるようにしておくこと．

次に $x \to +0$ についての $0 \cdot (-\infty)$ の不定形の極限

$$\lim_{x \to +0} x \log x$$

を考えてみる．これは $t = -\log x$ とおけば，多項式と指数関数の比較になって

$$\lim_{x \to +0} x \log x = \lim_{t \to \infty} \frac{-t}{e^t} = 0$$

とわかる．同様に，$\alpha > 0$ ならば

$$\lim_{x \to +0} x^\alpha \log x = \lim_{t \to \infty} \frac{-t}{e^{\alpha t}} = 0$$

である．つまり，どんな次数の多項式でも $x \to +0$ で **0** に収束する速さが，対数関数が $x \to +0$ で発散する速度よりも速いことがわかる．

命題 6.35. （$x \to +0$ での多項式と対数関数の収束・発散速度の比較）

$\alpha > 0$ とするとき

$$\lim_{x \to +0} x^\alpha \log x = 0$$

が成り立つ．

これも覚えておくのが便利だが，理由も説明できるようにしておくこと．

6.8 微分法の応用その 8：Newton 法

関数 $f(x)$ に対して，方程式 $f(x)=0$ の実数解の近似値を求める方法を考える．特に関数 $f(x)$ が凸関数の時には，次の **Newton 法**が知られている．

定理 6.36. （Newton 法）
関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で 2 回微分可能で，$f(a)=0,\ f'(a)\geqq 0$ かつ開区間 (a,b) 上で $f''(x)>0$ とする．このとき，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$x_1=b, \qquad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

で定めると，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は狭義単調減少で a に収束する．

注意 6.37. 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\big(x_n, f(x_n)\big)$ における接線の方程式

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$$

の x 軸との交点は，$y=0$ として

$$-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n) \qquad \therefore\ x=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

これを x_{n+1} として数列を構成している．

証明． まず仮定より $a<x<b$ において $f''(x)>0$ であるから，導関数 $f'(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で狭義単調増加である．さらに，$f'(a)\geqq 0$ より

$$f'(x)>0 \qquad (a<x\leqq b) \tag{6.2}$$

となる．また，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で狭義単調増加となるので，$f(a)=0$ より

$$f(x)>0 \qquad (a<x\leqq b) \tag{6.3}$$

が成り立つ．

次に，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が定義できて，特にすべての自然数 n について

$$a<x_n\leqq b$$

であることを数学的帰納法で証明する．

(i) $n=1$ のときは，$x_1=b$ なので，$a<x_1\leqq b$ が成り立つ．

(ii) $n=k\ (k\geqq 1)$ のときに，不等式

$$a<x_k\leqq b$$

が成り立つと仮定する．このとき，区間 $[a,x_k]$ で Taylor の定理を適用すると

$$f(a)=f(x_k)+f'(x_k)(a-x_k)+\frac{f''(c)}{2}(a-x_k)^2, \qquad a<c<x_k$$

となる c が存在する．これに $x_k=x_{k+1}+\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ と $f(a)=0$ を代入して

$$\begin{aligned} 0&=f(x_k)+f'(x_k)\left\{a-x_{k+1}-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right\}+\frac{f''(c)}{2}(a-x_k)^2 \\ &=(a-x_{k+1})f'(x_k)+\frac{f''(c)}{2}(a-x_k)^2 \\ \therefore\ x_{k+1}f'(x_k)&=af'(x_k)+\frac{f''(c)}{2}(a-x_k)^2 \end{aligned}$$

ここで，帰納法の仮定から $a < x_k \leqq b$ なので，(6.2)から $f'(x_k) > 0$ であり，さらに $f''(c) > 0$ であるから

$$x_{k+1} = a + \frac{f''(c)}{2f'(x_k)}(a - x_k)^2 > a$$

また，(6.2)と (6.3)より

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} < x_k \leqq b$$

ゆえに $a < x_{k+1} \leqq b$ となるので，$n = k+1$ のときにも成り立つ．

(i),(ii) より，すべての自然数 n について不等式 $a < x_n \leqq b$ が成り立つ．

ゆえに，$a < x_n \leqq b$ と漸化式および (6.2)と (6.3)より

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$$

が成り立つので，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な狭義単調減少数列であるから収束する．そこで，その極限値を

$$\beta = \lim_{n\to\infty} x_n$$

とおく．このとき，$a < x_n \leqq b$ より，$a \leqq \beta \leqq b$ である．そこで，漸化式を変形した

$$f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1})$$

において極限をとると，$f(x)$ と $f'(x)$ は連続なので

$$f(\beta) = f'(\beta)(\beta - \beta) = 0$$

となる．ここで (6.3)より，$\beta = a$ となることがわかる．よって，$\lim_{n\to\infty} x_n = \beta = a$ が成り立つ． □

注意 6.38. x_n と a の誤差を調べるために $f(x)$ を x_n のまわりで Taylor 展開すると

$$f(a) = f(x_n) + f'(x_n)(a - x_n) + \frac{f''(c)}{2}(a - x_n)^2$$

となる $a < c < x_n$ が存在する．これに $f(a) = 0$ と $f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1})$ を代入して

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x_n)(x_n - x_{n+1}) + f'(x_n)(a - x_n) + \frac{f''(c)}{2}(a - x_n)^2 \\ &= f'(x_n)(a - x_{n+1}) + \frac{f''(c)}{2}(a - x_n)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore\ x_{n+1} - a = \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(x_n - a)^2$$

が得られる．これは数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に 2 次収束することを表している．そのため，十分大きい n に対して x_n を計算すれば，それは a の近似値となっており，収束の速さ的にも効率が良い計算方法である．

7　章末問題

練習問題 7.1.　$p > 1$ とする．任意の $x > 0,\ y > 0$ に対して，不等式

$$(x+y)^p \leqq 2^{p-1}(x^p + y^p)$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するための条件を求めよ．

練習問題 7.2.　次の関数の定義域，増減，凹凸などを調べてグラフをかけ．

(1) $y = \dfrac{x^3+1}{x}$　　(2) $y = x\sqrt{2x - x^2}$　　(3) $y = x \log x$

練習問題 7.3.

(1) $x > -1$ のとき，不等式 $x \geqq \log(x+1)$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つ条件を求めよ．

(2) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \log(a_n + 1)\quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ により定まる数列の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

練習問題 7.4.　半径 a の円に内接する三角形の面積の最大値を求めよ．

練習問題 7.5.　関数

$$y = \mathrm{Tan}^{-1}\, x + \frac{2x}{1+x^2}$$

の増減・凹凸を調べ，グラフの概形を描け．変曲点の y 座標は求めなくてよい．

発展問題 7.6.　関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上で連続，開区間 (a, b) 上で微分可能で，$f(a) = f(b) = 0$ とする．このとき，任意の実数 λ に対して

$$f'(c) = \lambda f(c), \qquad a < c < b$$

となる c が存在することを示せ.（ヒント：$F(x) = e^{\lambda x} f(x)$）

第6章　積分法

この章では積分の本来の定義を説明し，連続関数は積分可能で微分積分学の基本定理が成り立つことを示すことが最初の目標である．次に初等関数に対する積分の代表的な計算手法（有理関数の部分分数分解，三角関数や根号・累乗根を含む関数の置換積分）などを扱う．

それから，広義積分と呼ばれる概念を紹介する．これにより積分区間内で被積分関数が無限大に発散していたり，非有界区間における積分を考えることができるようになる．グラフを描いて考えれば “無限の広がりを持つ図形の面積” を求めているようなものなので，広義積分の収束と発散の判定ができるようになることが重要である．積分の計算を実行して値を求めることは難しいことが多いが，広義積分が収束するとわかればガンマ関数やベータ関数に代表される特殊関数を導入することで議論が行えるようになる．

最後に面積や曲線の長さの計算などの応用例を紹介する．積分の応用は後の章で扱う多重積分も学習することで広がるので，体積の計算などはそちらで扱うことにする．

この章においては高校数学からの脱却が本質的な理解のために重要なので，導入部分を 1 つの節として述べることにする．

1　大学数学における積分論のイントロダクション

高校数学では積分とは『微分の逆演算』として学習した．つまり

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x, \qquad (\sin x)' = \cos x$$

より

$$\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \qquad \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$$

のように計算してきた．

しかし，例えば次の関数

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \fallingdotseq 1) \\ 2 & (x = 1) \end{cases} \tag{1.1}$$

に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ の値はどうなるだろうか？具体的に $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を見つけることは難しそうである．実際，正確に論証すればこのような関数 $F(x)$ は存在しないことが分かる．それではこの積分値は計算できないのであろうか．

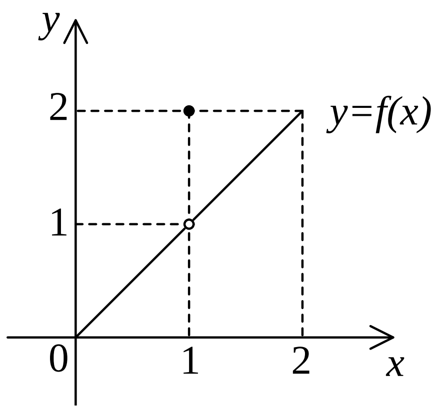


図 6.1: $y = f(x)$ のグラフ

実は高校で学ぶ数学においては，計算や理解のしやすさを優先して厳密にはごまかされている項目がいくつもある．これまでに説明した内容では「極限の定義」「ネイピア数 e の定義」が代表的なものだが，積分法の単元もその代表例である．

まず，積分の本来の定義は『微分の逆計算』ではない．歴史的には微分法と積分法は独立に生まれ発展してきた．さらに積分法の起源の方が古いので，積分の定義が微分の逆というのは順番としておかしい．

また，なぜ『微分の逆計算』で面積が求められるのだろうか？これを疑問に思っていた人もいるかもしれない．これも高校数学の教科書ではうまくごまかされている内容である．ところで，そもそも『面積』とは何だろうか？その定義の説明を求められると意外と答えられないのではないかと思う．そこで，積分の本当の定義に対する理解を通して，なぜ積分を用いて面積が求められるかという問いに答えられるようになってほしい．

後で見るように積分の本来の定義による計算は非常に大変なものである．しかし，17 世紀にニュートンやライプニッツにより

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

が（被積分関数 $f(x)$ が連続ならば）成り立つという「微分積分学の基本定理」が発見された．この定理により，それまで別々の分野だった微分法と積分法が結び付き，積分は微分の逆計算で以前よりも簡単に計算できるようになった．これが本来の流れである．なお，高校数学の教科書では原始関数と不定積分は同じものという扱いだが，実際にはこれらは異なる概念である．後で原始関数と不定積分の正しい定義を与え，被積分関数 $f(x)$ が積分区間上で連続ならばこの 2 つは一致することを示すことで，上で述べた微分積分学の基本定理を証明することができる．

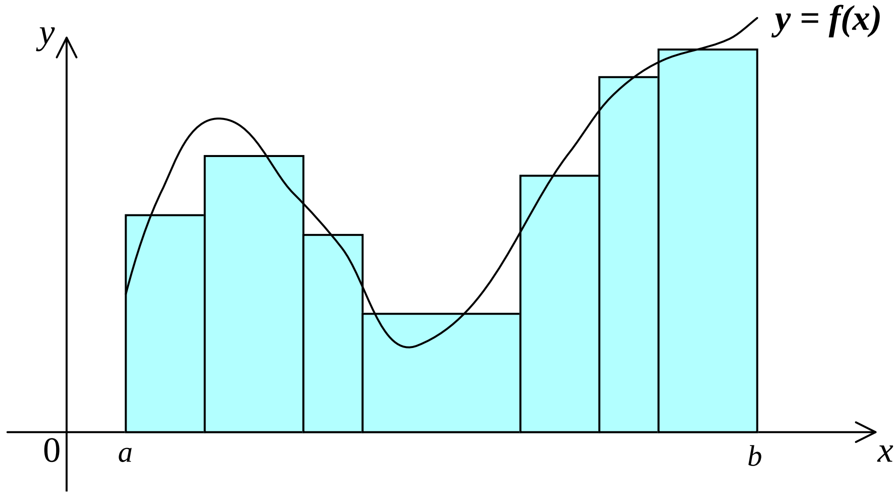
このように，最後には高校数学の内容と合流するのではあるが，積分論の本質的な理解のために**「高校数学で習った積分論は忘れて」**新たな気持ちで 6.3 節までの理解に努めてほしい．「積分は微分の逆計算が定義」という先入観を捨てて読まないと，何を前提としてどのような議論を展開しているのかを見失ってしまうかもしれない．この章に高校数学の内容はすべて正しい形で含まれているので，高校の内容を忘れていても次から説明する重要な定義と計算法を理解できていれば問題はない．

2　積分の定義と性質

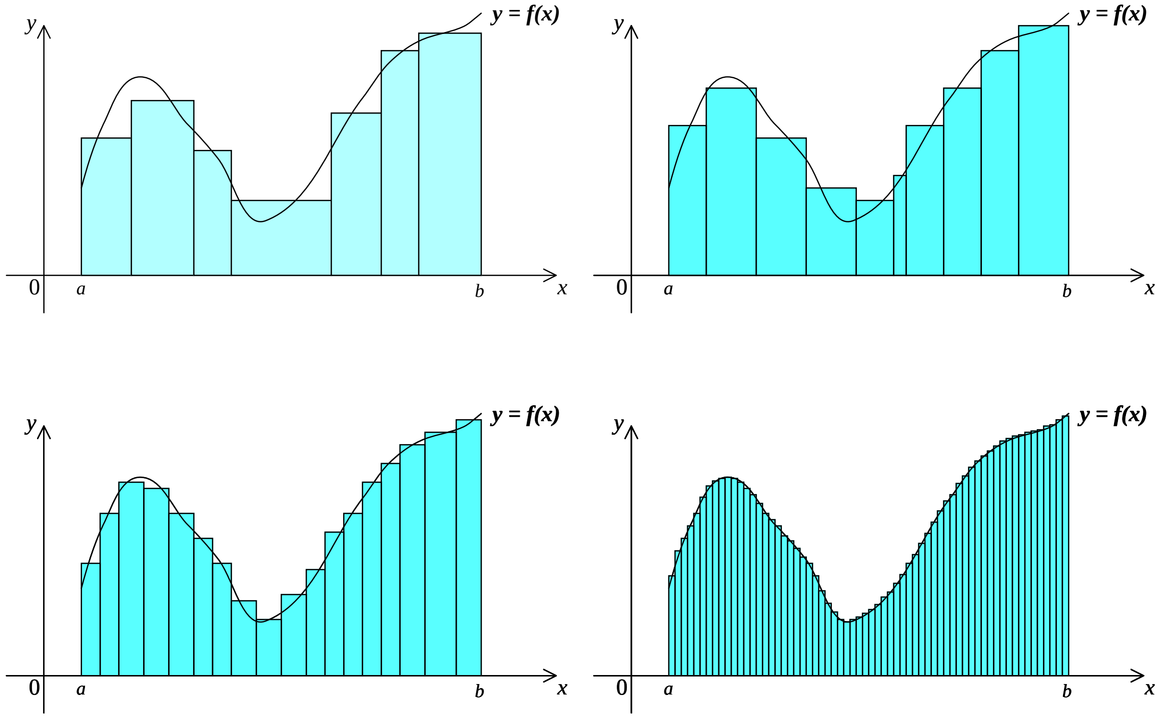
2.1　Riemann 和による定積分の定義

まずは曲線で囲まれた『面積』をどのように求めればよいか？その方法を考えてみる．例えば小学校の算数の授業において，方眼紙に円を描き，円の内部にあるマス目や円周が通っているマス目を数えることで円の面積の近似値を計算したことがあると思う．他にも古代から面積を求めたい図形に三角形を敷き詰めて近似値を計算する「取り尽くし法」と呼ばれる方法が行われてきた．このように，面積を計算しやすい図形で近似することで，曲線で囲まれた図形の面積を計算しようという発想は自然なものである．

そこで，閉区間 $I=[a,b]$ 上で定義された 0 以上の値をとる連続関数 $f(x)$ があったときに，グラフ $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれる図形 D の “面積” を求めることを考えてみよう．上で述べたように三角形を敷き詰めて計算する方法もあるが，ここでは長方形を並べて D を近似したい．



上の図はそのようなものの一例である．ただ，これだと長方形の横幅が大きいため，並べた長方形の面積の和と D の面積が等しいとは思えない．そこで，長方形の個数を増やしながらそれぞれの横幅を限りなく小さくしていけば，長方形の面積の和は D の面積に近づいていくことが期待できそうである．



以下では，関数 $f(x)$ が定義域で有界であるとする．もし $f(x)$ が正の無限大や負の無限大に発散していると，図形 D が無限に伸びて囲まれていないことになってしまう．そうするとまた別の難しい点が発生するのでここでは除外し，後の「広義積分」の節で扱うことにする．なお，第 4 章定理 2.17 より，$f(x)$ が有界閉区間 I で連続ならば，I における $f(x)$ の最大値と最小値が存在するので，$f(x)$ は有界である．つまり連続関数はすべて前提となる条件をみたしている．ここから先の議論は有界ならば連続でない関数も対象としているが，主に連続関数のグラフをイメージしながら読むとよい．

次の手順によって，有界閉区間 $I = [a, b]$ 上で有界な関数 $f(x)$ に対する Riemann 和を定義する．まず最初に，並べる長方形の横幅を与える．

定義 2.1. **（区間の分割）**
閉区間 $I = [a, b]$ に対して，次のような I の分点の組

$$\Delta\colon a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

を $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ で表し，**I の分割**という．ここで，自然数 n も自由に選んでよい．また，I の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ に対して

$$|\Delta| \coloneqq \max\{\, x_k - x_{k-1} \mid k = 1, 2, \ldots, n \,\}$$

を**分割 Δ の幅**という．

ここで，分割 Δ は n 等分ではなくてもよい．自由に区間を分割したものを考えている．分割の幅 $|\Delta|$ という記号を用意したのは，並べた長方形の横幅をすべて限りなく小さくしていきたいからである．実際，$|\Delta| \to 0$ という極限を考えると，分割 Δ の分点を増やしながら細かく分けていく際に最も長い横幅も 0 に近づくということだから，すべての長方形の横幅が限りなく小さくなることを表している．

長方形の縦幅については，分割で得られた各小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ から 1 つ代表となる点 ξ_k を選び，その点における関数の値 $f(\xi_k)$ を採用することで，関数の Riemann 和を次のように定義する．

定義 2.2. **（Riemann 和）**
$f(x)$ を閉区間 $I = [a, b]$ で有界な関数とする．I の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ と**代表点** $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ を決めたとき

$$S(f; \Delta, \{\xi_k\}) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

を $(\Delta, \{\xi_k\})$ に関する $f(x)$ の **Riemann 和**という．

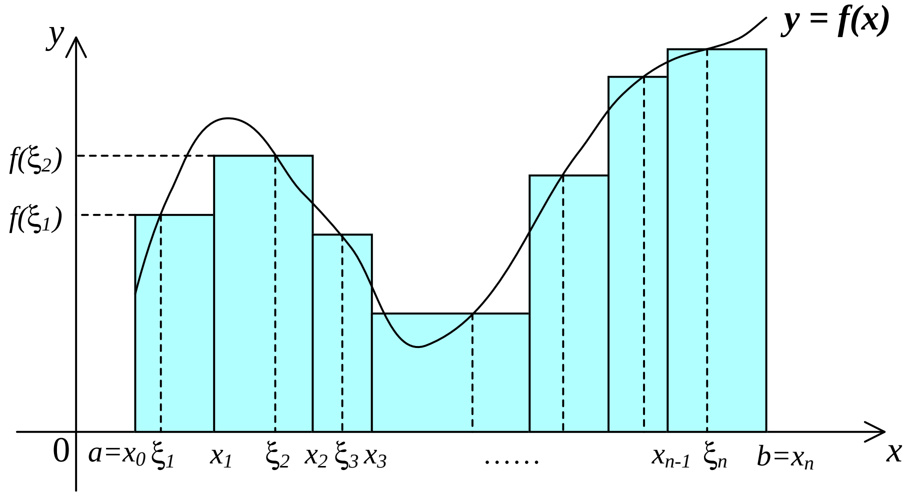


図 6.2: Riemann 和 $S(f; \Delta, \{\xi_k\})$

上の図においては長方形の縦×横の和が Riemann 和 $S(f; \Delta, \{\xi_k\})$ である．定義から，同じ関数 $f(x)$ と分割 Δ に対しても，代表点 $\{\xi_k\}$ の選び方を変えれば，その Riemann 和の値は異なることに注意すること．

閉区間で有界な関数の積分可能性および積分の値は次のようにリーマン和を用いて定義される．アイデアの元となったのは，閉区間 $I=[a,b]$ 上で定義された 0 以上の値をとる連続関数 $f(x)$ があったときに，グラフ $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれる図形 D の "面積" を求めることであったが，以下の定義は負の値をとる有界な関数や不連続である有界な関数なども対象として積分という概念を定めるものである．

定義 2.3. （積分の定義）
関数 $f(x)$ は有界閉区間 $I=[a,b]$ 上で有界であるとする．このとき，ある実数 α が存在して，代表点 $\{\xi_k\}$ の選び方によらず

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(f;\Delta,\{\xi_k\})=\alpha$$

が成り立つとき，$f(x)$ は I 上で**積分可能**であるという．
極限の部分を正確に表せば，ある実数 α が存在して，『任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon)>0$ が存在して，$|\Delta|<\delta(\varepsilon)$ をみたす I の任意の分割 Δ と任意の代表点 $\{\xi_k\}$ に対して

$$|S(f;\Delta,\{\xi_k\})-\alpha|<\varepsilon$$

が成り立つ』とき，$f(x)$ は I 上で**積分可能**であるという．このとき

$$\int_a^b f(x)\,dx=\alpha$$

と表し，これを $f(x)$ の I 上での**積分**または **Riemann 積分**という．定積分ということもある．

注意 2.4. 積分の定義においては $a<b$ であるが，そうでない場合には

$$\int_a^a f(x)\,dx=0,\qquad \int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$$

と記号を約束する．

簡単に述べれば，積分可能な関数に対してその定積分の値は

$$\int_a^b f(x)\,dx\coloneqq \lim_{|\Delta|\to 0} S(f;\Delta,\{\xi_k\})$$

とリーマン和の極限値で定義される．つまり，積分とは細かいものを足し合わせたものの極限とイメージすればよい．実際，インテグラルの記号 $\displaystyle\int$ は総和を表すラテン語 Summa の頭文字 S を引き伸ばしたものが由来となっている．

有界閉区間 $I=[a,b]$ 上で有界な関数 $f(x)$ が積分可能であることの定義をもう少し日本語で表してみると『ある実数 α を先に 1 つ決める．次に区間 I の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^n$ をとって，その一番長い部分の幅 $|\Delta|$ が小さくなるようにきちんと細かくしていけば，各小区間 $[x_{k-1},x_k]$ のどこに代表点 ξ_k をとって Riemann 和 $S(f;\Delta,\{\xi_k\})$ を作っても，それは α に近づいていく』ということである．図 2.1 のように $f(x)\geqq 0$ であるような場合を考えてみると，分割 Δ をどんどん細かくしていけば，長方形の面積の和である Riemann 和は $y=f(x)$ のグラフと x 軸および $x=a,\ x=b$ で囲まれる面積に近づいていくように思える．
なお，詳しくは重積分の単元で学習するが，閉区間 $I=[a,b]$ 上で定義された 0 以上の値をとる連続関数 $f(x)$ があったときに，グラフ $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれる図形 D の "面積" の定義は，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値である．つまり，（後で示すように連続ならば積分可能とわかるので）細かい長方形を並べて作ったリーマン和の極限値を面積と定めるのである．そのため，高校生によく質問される「なぜ積分すると面積が求まるの？」という質問には「では面積の定義って何？」と答えることにしている．

また，高校数学 III で学習した**区分求積法**は，関数 $f(x)$ が積分可能（主に連続関数）なときに，分割 Δ を区間の n 等分，代表点 ξ_k を各分割の端点に選んだ特別なリーマン和の極限値が定積分になることを利用して，級数の極限値を求める方法である．もしかしたら高校の授業中に「区分求積法は積分のもともとのアイデアに近い計算法」だと聞いたことがあるかもしれない．

2.2　定義に基づいた積分の計算例

例題 2.5.　$f(x) = c$（定数関数）は任意の有界閉区間 $I = [a, b]$ 上で積分可能で

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

であることを示せ．

（解答）　I の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ と代表点 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ を任意にとると

$$S(f; \Delta, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c(x_n - x_0) = c(b-a)$$

となる．これは Δ や $\{\xi_k\}$ のとり方に無関係な定数だから

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(f; \Delta, \{\xi_k\}) = \lim_{|\Delta|\to 0} c(b-a) = c(b-a)$$

が成り立つ．よって，$f(x) = c$ は I 上で積分可能で，$\displaystyle\int_a^b c\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} S(f; \Delta, \{\xi_k\}) = c(b-a)$ である．

（解答終）

例題 2.6.　$f(x) = x$ は任意の有界閉区間 $I = [a, b]$ 上で積分可能で

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2)$$

（解答）　$\alpha = \dfrac{1}{2}\,(b^2 - a^2)$ とおく．また，I の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ を任意にとる．

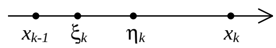
特別な代表点 $\eta_k = \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2} \in [x_{k-1}, x_k]$ をとると，この数列 $\{\eta_k\}$ に関する Riemann 和は

$$S(f; \Delta, \{\eta_k\}) = \sum_{k=1}^n \eta_k(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n ({x_k}^2 - {x_{k-1}}^2) = \frac{1}{2}\,({x_n}^2 - {x_0}^2) = \alpha$$

である．

次に，代表点 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ を任意にとると，上の計算と合わせて

$$S(f; \Delta, \{\xi_k\}) - \alpha = S(f; \Delta, \{\xi_k\}) - S(f; \Delta, \{\eta_k\}) = \sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)(x_k - x_{k-1})$$



と表せる．よって，三角不等式と $x_k - x_{k-1} > 0$ より

$$|\,S(f; \Delta, \{\xi_k\}) - \alpha\,| = \left|\,\sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)(x_k - x_{k-1})\right| \leqq \sum_{k=1}^n |\,\xi_k - \eta_k\,|(x_k - x_{k-1})$$

となる．ここで，ξ_k と η_k はともに区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の中にあるから

$$|\,\xi_k - \eta_k\,| \leqq x_k - x_{k-1} \leqq |\Delta|$$

が成り立つので

$$|\,S(f; \Delta, \{\xi_k\}) - \alpha\,| \leqq \sum_{k=1}^n |\,\xi_k - \eta_k\,|(x_k - x_{k-1}) \leqq \sum_{k=1}^n |\Delta|(x_k - x_{k-1}) = |\Delta|(x_n - x_0) = |\Delta|(b-a)$$

となる．この最右辺は代表点 $\{\xi_k\}$ によらず，さらに $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} (b-a)|\Delta| = 0$ である．ゆえに，はさみうちの定理より

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(f; \Delta, \{\xi_k\}) = \alpha$$

が成り立つ．したがって，$f(x) = x$ は I 上で積分可能で，$\displaystyle\int_a^b x\,dx = \alpha = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2)$ である．

（解答終）

次に積分不可能な関数の例についてみる．

例題 2.7. **(積分不可能な関数の代表例)**
区間 $I=[a,b]$ 上の関数 $\varphi(x)$ を

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ が有理数})\\ 0 & (x\text{ が無理数})\end{cases}$$

で定めると，$\varphi(x)$ は I 上で積分不可能であることを示せ．

（解答）　I の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ を任意にとる．

各 k に対して代表点 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ を常に有理数であるようにとると，$\varphi(\xi_k)=1$ であるから

$$S(\varphi;\Delta,\{\xi_k\})=\sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=b-a$$

となる．これは Δ に無関係な定数だから，当然 $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}S(\varphi;\Delta,\{\xi_k\})=b-a$ である．

一方，各 k に対して代表点 $\eta_k\in[x_{k-1},x_k]$ を常に無理数であるようにとると，$\varphi(\eta_k)=0$ であるから

$$S(\varphi;\Delta,\{\eta_k\})=\sum_{k=1}^{n}\varphi(\eta_k)(x_k-x_{k-1})=0$$

となる．よって，$\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}S(\varphi;\Delta,\{\eta_k\})=0$ である．

ゆえに，代表点を変えると Riemann 和の $|\Delta|\to 0$ での極限値が異なるから，$\varphi(x)$ は I 上で積分可能ではない．

（解答終）

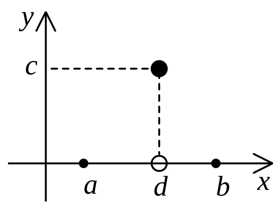
上で挙げた関数 $\varphi(x)$ は不連続であるが，不連続ならばすべて積分不可能ということではない．

例題 2.8. （1 点でジャンプしている関数の積分）
区間 $I=[a,b]$ 上の関数 $\psi(x)$ を $c>0,\ a<d<b$ として

$$\psi(x)=\begin{cases}c & (x=d)\\ 0 & (x\fallingdotseq d)\end{cases}$$

で定めると，$\psi(x)$ は I 上で積分可能で，$\displaystyle\int_a^b\psi(x)\,dx=0$ であることを示せ．

（解答）　I の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ と代表点 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ を任意にとる．このとき，ほとんどの k については $\psi(\xi_k)=0$ である．また，$\psi(\xi_k)=c$ となる k が最も多くなるのは，ある k_0 に対して分点が $x_{k_0}=d$ となり，さらに代表点 $\xi_{k_0}\in[x_{k_0-1},x_{k_0}]$，$\xi_{k_0+1}\in[x_{k_0},x_{k_0+1}]$ を $\xi_{k_0}=\xi_{k_0+1}=d$ と選んだときである．よって，$\psi(\xi_k)=c$ となる k は多くても 2 個だから



$$0\leqq S(\psi;\Delta,\{\xi_k\})=\sum_{k=1}^{n}\psi(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\leqq\sum_{k=1}^{n}\psi(\xi_k)|\Delta|\leqq 2c|\Delta|$$

となる．ゆえに，代表点 $\{\xi_k\}$ の選び方によらず，はさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}S(\psi;\Delta,\{\xi_k\})=0$ が成り立つ．したがって，$\psi(x)$ は I 上で積分可能で，$\displaystyle\int_a^b\psi(x)\,dx=0$ である．

（解答終）

この関数 $\psi(x)$ に対して，微分可能な関数 $F(x)$ で $F'(x)=\psi(x)$ となるものは存在しない．そのために高校での積分計算法が通用しないので，積分の本来の定義に戻って上のように計算するしかない．また，例 2.8 と後で述べる定理 2.10 を用いると，前書きで述べた (1.1) の関数 $f(x)$ の積分値がわかる．各自で考えてみよ．

同じような計算の繰り返しになるので，次の例は概略を述べて細かい部分の確認は演習問題とする．

例題 2.9. $0 \leqq a < b$ とする．このとき，$f(x) = x^2$ は区間 $I = [a, b]$ 上で積分可能で

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}\,(b^3 - a^3)$$

（解答） $\alpha = \dfrac{1}{3}\,(b^3 - a^3)$ とおく．また，I の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ を任意にとる．

区間 $[x_{k-1}, x_k]$ において，関数 $g(x) = \dfrac{x^3}{3}$ に平均値の定理を適用すると

$$\frac{g(x_k) - g(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = g'(c), \qquad x_{k-1} < c < x_k$$

となる c が存在する．各 $k = 1, \ldots, n$ に対して，この c を $c = \eta_k$ とおけば

$$\frac{g(x_k) - g(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = g'(\eta_k) = \eta_k^2$$

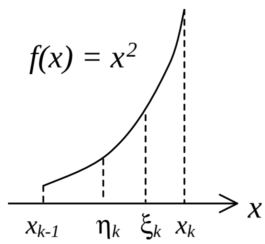
となる．この $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ を特別な代表点にとると，$\{\eta_k\}$ に関する Riemann 和は

$$S(f; \Delta, \{\eta_k\}) = \sum_{k=1}^n \eta_k^2 (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \{g(x_k) - g(x_{k-1})\} = g(b) - g(a) = \alpha$$

である．

次に，代表点 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ を任意にとると，上の計算と合わせて

$$|\,S(f; \Delta, \{\xi_k\}) - \alpha\,| \leqq \sum_{k=1}^n |\,f(\xi_k) - f(\eta_k)\,|(x_k - x_{k-1})$$



となる．ここで，$f(x) = x^2$ は区間 $[x_{k-1}, x_k]$ において単調増加だから

$$|\,f(\xi_k) - f(\eta_k)\,| \leqq f(x_k) - f(x_{k-1})$$

が成り立つので，$0 < x_k - x_{k-1} \leqq |\Delta|$ と合わせて

$$|\,S(f; \Delta, \{\xi_k\}) - \alpha\,| \leqq \sum_{k=1}^n |\,f(\xi_k) - f(\eta_k)\,|(x_k - x_{k-1}) \leqq \sum_{k=1}^n \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}|\Delta| = |\Delta|(b^2 - a^2)$$

である．ゆえに，代表点 $\{\xi_k\}$ の選び方によらず，はさみうちの定理より

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(f; \Delta, \{\xi_k\}) = \alpha$$

となる．よって，$f(x) = x^2$ は I 上で積分可能で，$\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \alpha = \frac{1}{3}\,(b^3 - a^3)$ である．

（解答終）

このように積分の定義に従って計算をするのは，簡単な形の関数に対しても難しい．もっと複雑な関数になると，直接定義のみから計算をするのはほとんど不可能である．上の解答でも前半部分では $g'(x) = f(x)$ であることを念頭に置いており，後は定積分の定義に合わせて体裁を整えているだけである．そこで簡単な計算方法として『被積分関数が連続な場合には，積分は微分の逆演算である』という**微分積分学の基本公式**を後で証明する．

練習問題 2.1. $a < b$ のとき，次が成り立つことを積分の定義に基づいて示せ．

(1) $\displaystyle\int_a^b x^3\,dx = \frac{1}{4}\,(b^4 - a^4)$ (2) $\displaystyle\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$

2.3　積分の性質その 1

ここでは前に与えた積分の定義に基づいて，高校で既習の積分の性質を再確認し，さらに新しい定理も紹介する．

定理 2.10.（積分の線形性）

関数 $f(x)$ と $g(x)$ はともに有界閉区間 $I = [a, b]$ 上で積分可能とする．このとき，定数 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して，関数 $\lambda f(x) + \mu g(x)$ も I 上で積分可能で

$$\int_a^b \{\lambda f(x) + \mu g(x)\}\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

が成り立つ．

証明.　I の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ と代表点 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ を任意にとると，$\lambda f(x) + \mu g(x)$ の Riemann 和は

$$\begin{aligned} S(\lambda f + \mu g; \Delta, \{\xi_k\}) &= \sum_{k=1}^n \{\lambda f(\xi_k) + \mu g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \mu \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \lambda S(f; \Delta, \{\xi_k\}) + \mu S(g; \Delta, \{\xi_k\}) \end{aligned}$$

となる．ここで，$f(x)$ と $g(x)$ は I 上で積分可能であるから，代表点 $\{\xi_k\}$ の選び方によらず

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(f; \Delta, \{\xi_k\}) = \int_a^b f(x)\, dx, \qquad \lim_{|\Delta| \to 0} S(g; \Delta, \{\xi_k\}) = \int_a^b g(x)\, dx$$

である．よって

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(\lambda f + \mu g; \Delta, \{\xi_k\}) = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

が成り立つ．ゆえに，$\lambda f(x) + \mu g(x)$ も I 上で積分可能で

$$\int_a^b \{\lambda f(x) + \mu g(x)\}\, dx = \lim_{|\Delta| \to 0} S(\lambda f + \mu g; \Delta, \{\xi_k\}) = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

である．　□

証明からもわかるように，定積分において線形性が成り立つのは

- 有限和が線形性

  $$\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k$$

  をもつこと（有限和なので収束性などは気にしなくてよい）

- 和や実数倍の形の極限は，各項の極限値が存在すれば

  $$\lim_{x \to a} \{\lambda F(x) + \mu G(x)\} = \lambda \lim_{x \to a} F(x) + \mu \lim_{x \to a} G(x)$$

  と極限を分けてよいこと

による．つまり，有限和で成り立つ性質が極限操作で保たれるならば，Riemann 和の極限で定義される定積分でも成り立つということである．

定理 2.11. （積分の単調性）
関数 $f(x)$ と $g(x)$ はともに有界閉区間 $I=[a,b]$ 上で積分可能とする．このとき

$$f(x) \leqq g(x) \qquad (x \in I)$$

をみたすならば

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ．特に

$$g(x) \geqq 0 \quad (x \in I) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b g(x)\,dx \geqq 0$$

である．

証明． I の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ と代表点 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ を任意にとる．このとき，仮定より

$$f(\xi_k) \leqq g(\xi_k) \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

であるから，それぞれの Riemann 和について

$$S(f;\Delta,\{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leqq \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = S(g;\Delta,\{\xi_k\})$$

となる．ここで，$f(x)$ と $g(x)$ は I 上で積分可能であるから，$|\Delta| \to 0$ とすれば

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} S(f;\Delta,\{\xi_k\}) \leqq \lim_{|\Delta|\to 0} S(g;\Delta,\{\xi_k\}) = \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ． □

関数の大小関係が定積分でも保存されるのも線形性と同様の理由である．なお，高校数学では『$f(x)$ と $g(x)$ がすべての x に対しては一致しない』や（同じことではあるが別表現として）『$f(x) < g(x)$ となる x がある』場合には

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

とすることがあるが，これは一般には成り立たない．さらに条件がないと

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$$

であることしかわからない．これは定積分の定義に極限操作を含むためであり，極限値が存在する場合でも

$$a_n < b_n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$$

は**一般に成り立たない**ことを思い出せば納得できると思う．次の定理や連続関数の積分の節の定理 2.22 も参照すること．

定理 2.12. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ はともに有界閉区間 $I=[a,b]$ 上で有界な関数とし，I の有限個の点を除いて $f(x)=g(x)$ であるとする．このとき，$f(x)$ が I 上で積分可能ならば，$g(x)$ も I 上で積分可能で

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ．

証明. まず 1 点 $x=d$ を除いて $f(x)=g(x)$ である場合を証明する．このとき，関数 $\psi(x)$ を

$$\psi(x)=g(x)-f(x)$$

で定義する．$\psi(x)$ は 1 点 $x=d$ でのみ 0 でないから，例 2.8 と同様にして区間 I 上で積分可能で

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = 0$$

である．仮定より $f(x)$ も I 上で積分可能なので，定理 2.10 より

$$g(x)=f(x)+\bigl(g(x)-f(x)\bigr)=f(x)+\psi(x)$$

も I 上で積分可能で

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つ．

次に n 個の点 $x=d_1,\ldots,d_n$ を除いて $f(x)=g(x)$ である場合を示す．このとき，$j=1,2,\ldots,n$ に対して

$$c_j = g(d_j)-f(d_j) \fallingdotseq 0$$

とおいて，関数 $\psi_j(x)$ を

$$\psi_j(x)=\begin{cases} c_j & (x=d_j) \\ 0 & (x \fallingdotseq d_j) \end{cases}$$

とおけば，上で述べたことより $\psi_j(x)$ は I 上で積分可能で

$$\int_a^b \psi_j(x)\,dx = 0$$

である．さらに

$$g(x)=f(x)+\psi_1(x)+\cdots+\psi_n(x)$$

と表せるので

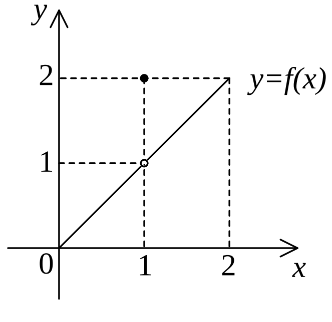
$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{j=1}^n \int_a^b \psi_j(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つ． □

この定理より，有限個の点での関数の値は積分値には影響を与えないことがわかる．例えば，前書きで述べた (1.1) の関数 $f(x)$ の積分値は 1 点を除けば $y=x$ と一致するから，特に 1 点での違いを気にすることはなく

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx = \frac{2^2-0^2}{2} = 2$$

とすればよい．



2.4　積分可能であるための条件

積分の定義に基づいて積分可能性を判定するのは非常に大変である．その理由は『どのように』分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ をとって，さらに『どのように』代表点 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ を選んでも，リーマン和 $S(f;\Delta,\{\xi_k\})$ が $|\Delta| \to 0$ ですべて同じ値に収束するかを調べればならないからである．このように 2 つも自由に選べてしまうと計算が大変なので，代表点を表に出さないような判定法を紹介する．そのためにいくつか記号を用意する．

定義 2.13.（不足和・過剰和）
関数 $f(x)$ は有界閉区間 $I = [a,b]$ 上で有界とする．I の分割を $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ とし，$I_k = [x_{k-1}, x_k]$ および

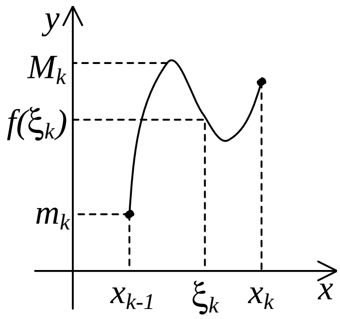
$$m_k(f;\Delta) = \inf_{x\in I_k} f(x), \qquad M_k(f;\Delta) = \sup_{x\in I_k} f(x)$$

とおくとき

$$s_\Delta(f) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} m_k(f;\Delta)(x_k - x_{k-1}), \qquad S_\Delta(f) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} M_k(f;\Delta)(x_k - x_{k-1})$$

をそれぞれ $f(x)$ の分割 Δ に関する**不足和**，**過剰和**という．

$f(x)$ の不足和 $s_\Delta(f)$ と過剰和 $S_\Delta(f)$ はともに分割 Δ だけで決まる量である．これらを計算するには各小区間から代表点を選ぶ必要がないので，リーマン和よりも扱いやすいのが利点である．また，上の記号に関して



$$m_k(f;\Delta) \leqq f(x) \leqq M_k(f;\Delta) \qquad (x \in I_k)$$

となる．よって，代表点 $\xi_k \in I_k$ をどう決めても，$f(x)$ のリーマン和に関して

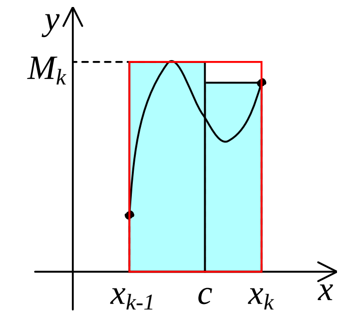
$$\sum_{k=1}^{n} m_k(f;\Delta)(x_k - x_{k-1}) \leqq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leqq \sum_{k=1}^{n} M_k(f;\Delta)(x_k - x_{k-1})$$

より

$$s_\Delta(f) \leqq S(f;\Delta,\{\xi_k\}) \leqq S_\Delta(f) \tag{2.1}$$

が成り立つ．

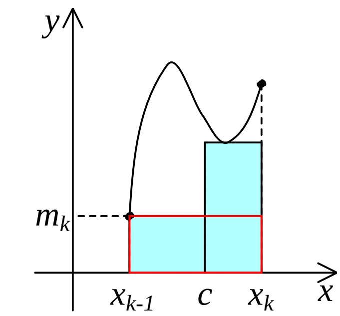
I の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ に新しい分点 c を 1 つ加えて得られる分割を Δ' とおく．このとき，$x_{k-1} < c < x_k$ となる k がただ 1 つあるので，区間 $[x_{k-1}, x_k]$ における図を考えてみると右図のようになる．



区間 $[x_{k-1}, x_k]$ における過剰和については，分割 Δ については赤い四角で囲まれた長方形の面積，分割 Δ' については水色の長方形 2 個の面積の和となる．他の小区間においては分点が増えてないから変化はない．これより，分割の分点を増やせば過剰和は減少する，つまり

$$0 \leqq S_\Delta(f) - S_{\Delta'}(f) \leqq (M_k(f;\Delta) - m_k(f;\Delta))(x_k - x_{k-1}) \tag{2.2}$$

が成り立つ．特に $S_{\Delta'}(f) \leqq S_\Delta(f)$ である．



区間 $[x_{k-1}, x_k]$ における不足和については，分割 Δ については赤い四角で囲まれた長方形の面積，分割 Δ' については水色の長方形 2 個の面積の和となる．他の小区間においては分点が増えてないから変化はない．これより，分割の分点を増やせば不足和は増加する，つまり

$$0 \leqq s_{\Delta'}(f) - s_\Delta(f) \leqq (M_k(f;\Delta) - m_k(f;\Delta))(x_k - x_{k-1}) \tag{2.3}$$

が成り立つ．特に $s_\Delta(f) \leqq s_{\Delta'}(f)$ である．

上の考察は分点を 1 個追加した場合だが，有限個の分点を追加した場合も同様なので，一般に

$$s_\Delta(f) \leqq s_{\Delta'}(f) \leqq S_{\Delta'}(f) \leqq S_\Delta(f) \qquad (\Delta \subset \Delta') \tag{2.4}$$

が成り立つことがわかる．ここで，Δ の分点がすべて Δ' の分点であるときに，集合の記法を援用して $\Delta \subset \Delta'$ と表した．

I の任意の 2 個の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ と $\Delta' = \{y_l\}_{l=0}^{m}$ に対して，これらの分点を合わせて得られる分割を $\Delta'' = \{x_k\}_{k=0}^{n} \cup \{y_l\}_{l=0}^{m}$ とおく．このとき，$\Delta \subset \Delta''$, $\Delta' \subset \Delta''$ であるから

$$s_\Delta(f) \leqq s_{\Delta''}(f) \leqq S_{\Delta''}(f) \leqq S_{\Delta'}(f)$$

より，$s_\Delta(f) \leqq S_{\Delta'}(f)$ が成り立つ．よって，不足和 $s_\Delta(f)$ は Δ に関して上に有界であり，過剰和 $S_\Delta(f)$ は Δ に関して下に有界となる．そこで，次のように用語を定義する．

定義 2.14. **（上積分・下積分）**
関数 $f(x)$ は有界閉区間 $I = [a, b]$ 上で有界とする．

(1) 過剰和 $S_\Delta(f)$ について，I のすべての分割 Δ に関する下限を

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_\Delta S_\Delta(f)$$

とおき，$f(x)$ の I における**上積分**という．

(2) 不足和 $s_\Delta(f)$ について，I のすべての分割 Δ に関する上限を

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_\Delta s_\Delta(f)$$

とおき，$f(x)$ の I における**下積分**という．

上での議論より I の任意の分割 Δ と Δ' に対して，$s_\Delta(f) \leqq S_{\Delta'}(f)$ となる．よって，常に

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

が成り立つ．

例題 2.15. 区間 $I = [a, b]$ 上の関数 $\varphi(x)$ を

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数}) \\ 0 & (x \text{ が無理数}) \end{cases}$$

で定めるとき，$\varphi(x)$ の I における上積分と下積分を求めよ．

（解答） I の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ を任意にとる．各小区間 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ は有理数と無理数を必ず含むから，すべての k に対して

$$m_k(\varphi; \Delta) = 0, \qquad M_k(\varphi; \Delta) = 1$$

である．よって，不足和と過剰和はそれぞれ

$$s_\Delta(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} m_k(\varphi; \Delta)(x_k - x_{k-1}) = 0, \qquad S_\Delta(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} M_k(\varphi; \Delta)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = b - a$$

となるから，これらは分割 Δ によらない定数である．ゆえに

$$\underline{\int_a^b} \varphi(x)\,dx = \sup_\Delta s_\Delta(\varphi) = 0, \qquad \overline{\int_a^b} \varphi(x)\,dx = \inf_\Delta S_\Delta(\varphi) = b - a$$

（解答終）

例題 2.7 より，この関数 $\varphi(x)$ は I 上で積分不可能で，また $\underline{\int_a^b} \varphi(x)\,dx < \overline{\int_a^b} \varphi(x)\,dx$ となっている．実は有界な関数 $f(x)$ が I 上で積分可能であるための必要十分条件は，$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ が成り立つことである．この事実を示唆する不等式が (2.1)であり，以下この節では実際に必要十分条件であることを証明する．

積分可能性の判定には次の定理が重要な役割を果たす．

定理 2.16. （ダルブーの定理）
関数 $f(x)$ は有界閉区間 $I=[a,b]$ 上で有界とする．このとき，$f(x)$ の過剰和 $S_\Delta(f)$ と不足和 $s_\Delta(f)$ は $|\Delta|\to 0$ で収束して

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx, \qquad \lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta(f) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

が成り立つ．

証明. $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ が成り立つことを示す．$\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta(f) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ についても以下の議論と同様である．

任意の $\varepsilon>0$ をとる．上積分の定義より $\displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_\Delta S_\Delta(f)$ であるから，$\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ に対して

$$S_{\Delta_0}(f) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

となる I の分割 Δ_0 が存在する．Δ_0 の分点の数を n とする．

$f(x)$ は I 上で有界であるから，$M=\displaystyle\sup_{x\in I} f(x),\ m=\inf_{x\in I} f(x)$ とおく．I の任意の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^{l}$ に対して，Δ のある 1 つの小区間 $[x_{k-1},x_k]$ 内に分点を 1 個増やしたものを Δ_1 とすれば

$$m \leqq m_k(f;\Delta) \leqq M_k(f;\Delta) \leqq M, \qquad 0 < x_k - x_{k-1} \leqq |\Delta|$$

と (2.2)より

$$0 \leqq S_\Delta(f) - S_{\Delta_1}(f) \leqq (M_k(f;\Delta)-m_k(f;\Delta))(x_k-x_{k-1}) \leqq (M-m)|\Delta|$$

となる．そこで，Δ と上で用意した Δ_0 の分点を合わせた分割を Δ' とおけば，Δ に高々n 個の分点が追加されるから

$$0 \leqq S_\Delta(f) - S_{\Delta'}(f) \leqq n(M-m)|\Delta|$$

が成り立つ．

そこで，$\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{2n(M-m)}>0$ とおけば，$|\Delta|<\delta(\varepsilon)$ となる I の任意の分割に対して，上のように Δ と Δ_0 の分点を合わせた分割 Δ' をとれば

$$0 \leqq S_\Delta(f) - S_{\Delta'}(f) \leqq n(M-m)|\Delta| < n(M-m)\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$$

となる．また，$\Delta_0\subset\Delta'$ より

$$S_{\Delta'}(f) \leqq S_{\Delta_0}(f)$$

である．ゆえに

$$\begin{aligned} 0 \leqq S_\Delta(f) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx &= \big(S_\Delta(f)-S_{\Delta'}(f)\big) + \big(S_{\Delta'}(f)-S_{\Delta_0}(f)\big) + \left(S_{\Delta_0}(f) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

より，$\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ が成り立つ． □

上積分の定義 $\displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_\Delta S_\Delta(f)$ より，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$S_{\Delta_0}(f) < \displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$ となる分割 Δ_0 が少なくとも 1 つは存在する．ダルブーの定理の重要なところは，ある $\delta(\varepsilon)$ が存在して，$|\Delta|<\delta(\varepsilon)$ となる任意の分割 Δ に対して，$S_\Delta(f) < \displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$ が成り立つことである．

定義 2.17. （関数の振幅）
関数 $f(x)$ は有界閉区間 $I=[a,b]$ 上で有界とする．このとき

$$\omega(f,I) \coloneqq \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x) = \sup_{x,y\in I} |\, f(x)-f(y)\,|$$

とおき，これを $f(x)$ の I における**振幅**という．

関数 $f(x)$ の I における振幅 $\omega(f,I)$ はその定義から常に 0 以上である．また，振幅が 0 になるのは定数関数の場合に限る．

例 2.18. 具体的な関数について振幅を計算してみる．グラフを描いて確認してみよ．

(1) $I=[1,3],\ f(x)=x^2$ ならば

$$\sup_{x\in I} f(x) = 9, \quad \inf_{x\in I} f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \omega(f,I) = 9-1 = 8$$

(2) $I=[0,6\pi],\ f(x)=3\sin x$ ならば

$$\sup_{x\in I} f(x) = 3, \quad \inf_{x\in I} f(x) = -3 \quad \Longrightarrow \quad \omega(f,I) = 3-(-3) = 6$$

(3) $I=[-1,1],\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & (x \fallingdotseq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ ならば

$$\sup_{x\in I} f(x) = 1, \quad \inf_{x\in I} f(x) = -1 \quad \Longrightarrow \quad \omega(f,I) = 1-(-1) = 2$$

区間 $I=[a,b]$ の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^n$ をとると

$$\omega(f,I_k) = \sup_{x\in I_k} f(x) - \inf_{x\in I_k} f(x) = M_k(f;\Delta) - m_k(f;\Delta)$$

であるから，振幅と過剰和・不足和の間には次の関係

$$\sum_{k=1}^n \omega(f,I_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (M_k(f;\Delta) - m_k(f;\Delta))(x_k - x_{k-1}) = S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \tag{2.5}$$

が成り立つ．よって，過剰和と不足和の差を調べるには振幅を考えればよいことがわかる．

これらの概念を利用して，積分可能であるための次の必要十分条件が得られる．

定理 2.19. **（積分可能であるための必要十分条件）**
有界閉区間 $I=[a,b]$ 上の有界な関数 $f(x)$ に対して，次の条件はすべて同値である．

(1) $f(x)$ は I 上で積分可能

(2) $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(f)=\lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta(f)$，つまり $\displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

(3) I の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^n$ に対して，$I_k=[x_{k-1},x_k]$ とおけば，$\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^n \omega(f,I_k)(x_k-x_{k-1})=0$

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2) $\displaystyle\alpha=\int_a^b f(x)\,dx$ とおき，$\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(f)=\alpha$ であることを示す．

任意の $\varepsilon>0$ をとり，$\varepsilon^*=\dfrac{\varepsilon}{b-a+1}>0$ とおく．I の任意の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^n$ をとると，$M_k=\displaystyle\sup_{x\in I_k} f(x)$ なので

$$x_{k-1}\leqq \xi_k\leqq x_k,\qquad M_k-\varepsilon^*<f(\xi_k)$$

となる ξ_k が存在する．この $\{\xi_k\}$ を代表点に選んだときのリーマン和と過剰和を比較すると

$$0\leqq S_\Delta(f)-S(f;\Delta,\{\xi_k\})=\sum_{k=1}^n\bigl(M_k-f(\xi_k)\bigr)(x_k-x_{k-1})<\sum_{k=1}^n\varepsilon^*(x_k-x_{k-1})=\varepsilon^*(b-a)$$

が成り立つ．また，$f(x)$ は I 上で積分可能なので，ある $\delta_1(\varepsilon^*)>0$ が存在して，$|\Delta|<\delta_1(\varepsilon^*)$ となる I の任意の分割 Δ に対して，各小区間から上記のような代表点 ξ_k を選んでも

$$|\,S(f;\Delta,\{\xi_k\})-\alpha\,|<\varepsilon^*$$

となる．よって，$\delta(\varepsilon)=\delta_1(\varepsilon^*)$ とおけば，$|\Delta|<\delta(\varepsilon)$ である I の任意の分割 Δ に対して

$$|\,S_\Delta(f)-\alpha\,|\leqq|\,S_\Delta(f)-S(f;\Delta,\{\xi_k\})\,|+|\,S(f;\Delta,\{\xi_k\})-\alpha\,|<\varepsilon^*(b-a)+\varepsilon^*=\varepsilon^*(b-a+1)=\varepsilon$$

となるから，$\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(f)=\alpha$ が成り立つ．同様にして，$\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta(f)=\alpha$ であるから (2) が成り立つ．

(2) $\Longrightarrow$ (1) $\displaystyle\alpha=\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(f)=\lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta(f)$ とおく．(2.1)より，任意の分割 Δ と代表点 ξ_k に対して

$$s_\Delta(f)\leqq S(f;\Delta,\{\xi_k\})\leqq S_\Delta(f)$$

であるから，はさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} S(f;\Delta,\{\xi_k\})=\alpha$ が成り立つ．よって，$f(x)$ は I 上で積分可能である．

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) I の任意の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^n$ に対して，(2.5)より

$$\sum_{k=1}^n\omega(f,I_k)(x_k-x_{k-1})=S_\Delta(f)-s_\Delta(f)$$

が成り立つ．また，ダルブーの定理より常に極限値 $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(f)$ と $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta(f)$ が存在するから

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^n\omega(f,I_k)(x_k-x_{k-1})=0\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{|\Delta|\to 0}\bigl(S_\Delta(f)-s_\Delta(f)\bigr)=0\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(f)=\lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta(f)$$

が成り立つ． □

定理 2.19 を用いれば，定積分のいろいろな性質が証明できる．

定理 2.20. （有界閉区間上の単調関数の積分可能性）
関数 $f(x)$ は有界閉区間 $I = [a,b]$ 上で単調増加または単調減少とする．このとき，$f(x)$ は I 上で積分可能である．

証明． $f(x)$ が $I = [a,b]$ 上で定数関数でない単調増加の場合を証明する．定数関数の場合は例題 2.5 で既に示してあり，単調減少の場合も同様なので演習問題とする．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} > 0$ とおく．このとき，$|\Delta| < \delta(\varepsilon)$ である I の任意の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ に対して，$I_k = [x_{k-1}, x_k]$ における $f(x)$ の上限と下限は，$f(x)$ が単調増加なので

$$M_k = \sup_{x \in I_k} f(x) = f(x_k), \qquad m_k = \inf_{x \in I_k} f(x) = f(x_{k-1})$$

となる．よって，I_k における振幅は

$$\omega(f, I_k) = M_k - m_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

である．ゆえに，$0 < x_k - x_{k-1} \leqq |\Delta| < \delta(\varepsilon)$ なので

$$\begin{aligned} 0 \leqq \sum_{k=1}^{n} \omega(f, I_k)(x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}(x_k - x_{k-1}) \\ &< \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}\delta(\varepsilon) = \{f(b) - f(a)\}\delta(\varepsilon) = \varepsilon \end{aligned}$$

より

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega(f, I_k)(x_k - x_{k-1}) = 0$$

が成り立つ．したがって，定理 2.19 より $f(x)$ は I 上で積分可能である． □

練習問題 2.2. 関数 $f(x)$ が有界閉区間 I 上で単調減少ならば，$f(x)$ は I 上で積分可能であることを証明せよ．

2.5　連続関数の積分

連続関数の積分を考えることが応用上は多いので，連続関数の積分可能性と定理についてまとめておく．

定理 2.21.（有界閉区間上の連続関数の積分可能性）
関数 $f(x)$ が有界閉区間 I 上で連続ならば，$f(x)$ は I 上で積分可能である．

証明．　任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$f(x)$ は有界閉区間 $I = [a, b]$ 上で連続なので，第 4 章定理 4.6 より一様連続である．よって，$\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$ に対して，ある $\delta_1(\varepsilon^*) > 0$ が存在して

$$x, y \in I, \quad |x-y| < \delta_1(\varepsilon^*) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon^*$$

が成り立つ．そこで，$\delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon^*)$ とおく．

$|\Delta| < \delta(\varepsilon)$ である I の任意の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ をとる．このとき，$I_k = [x_{k-1}, x_k]$ における $f(x)$ の振幅は，I_k の長さが $\delta(\varepsilon)$ 未満なので

$$\omega(f, I_k) = \sup_{x,y \in I_k} |f(x) - f(y)| < \varepsilon^*$$

となる．よって

$$0 \leqq \sum_{k=1}^{n} \omega(f, I_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^*(x_k - x_{k-1}) = \varepsilon^*(b-a) = \varepsilon$$

より，$\displaystyle\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega(f, I_k)(x_k - x_{k-1}) = 0$ が成り立つ．ゆえに，定理 2.19 より $f(x)$ は I 上で積分可能である．　□

積分の単調性は既に定理 2.11 で証明したが，連続関数については次のようになる．

定理 2.22.（連続関数に関する積分の単調性）
関数 $f(x)$ と $g(x)$ がともに有界閉区間 $I = [a, b]$ 上で連続であり，さらに

$$f(x) \leqq g(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

かつ $f(\xi) < g(\xi)$ となる $\xi \in I$ が存在するならば

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ．

証明．　$h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと，仮定より関数 $h(x)$ は I 上で連続で

$$h(x) \geqq 0 \quad (x \in I), \qquad h(\xi) > 0$$

が成り立つ．よって，第 4 章定理 2.7 より（もし ξ が I の端点ならば $a < \xi < b$ と取り直せて）ある $\delta > 0$ と定数 $C > 0$ が存在して

$$|x - \xi| < \delta \quad \Longrightarrow \quad h(x) > C$$

となる．よって，定理 2.11（積分の単調性）より

$$\int_a^b h(x)\,dx \geqq \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} h(x)\,dx \geqq \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} C\,dx = 2C\delta > 0$$

が成り立つ．ゆえに

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx > 0 \qquad\qquad \therefore \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

である．　□

定理 2.23. （積分法の平均値の定理）
関数 $f(x)$ が有界閉区間 $I=[a,b]$ 上で連続ならば

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c), \qquad a<c<b$$

をみたす c が存在する．

証明. $f(x)$ が定数関数のときは，$c\in(a,b)$ をどのようにとっても定理の主張は成り立つ．そこで $f(x)$ は定数関数でないとする．

$f(x)$ は有界閉区間 I 上で連続であるから，第 4 章定理 2.17（最大値・最小値の定理）より $f(x)$ の I における最大値 $M=f(x_1)$ と最小値 $m=f(x_2)$ が存在する．このとき

$$m \leqq f(x) \leqq M \qquad (a\leqq x\leqq b)$$

であり，$f(x)$ は定数関数ではないから，左右どちらの不等号についてもそれぞれ等号とはならない x が存在する．よって，定理 2.22 より

$$\int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b M\,dx$$

となるから，これより

$$m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < M$$

が成り立つ．ここで，再び $f(x)$ の連続性から第 4 章定理 2.14（中間値の定理）が適用できて，x_1 と x_2 の間の実数 c で

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

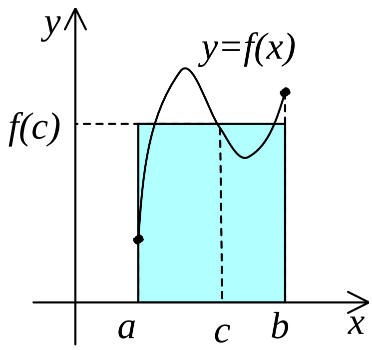
となるものが存在する．この c は x_1 や x_2 とは異なるから，区間の端点 a と b に一致することはなく，$a<c<b$ をみたす．□

積分の平均値の定理を

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$$

と変形すれば，関数が $f(x)\geqq 0$ であるならば，うまく c を選べば $y=f(x)$ のグラフと x 軸の間の部分の面積が長方形の面積 $(b-a)f(c)$ と等しくなるようにできるということ表している．

また，微分法に関する平均値の定理と同様に，定理の条件をみたす c が何個あるかについては一般にはわからない．あくまで「少なくとも 1 個存在する」ことがわかるという主張である．



2.6　積分の性質その 2

定理 2.24. （積分の区間についての加法性）
$a < c < b$ とする．関数 $f(x)$ が有界閉区間 $[a,b]$ 上で積分可能ならば，$f(x)$ は $[a,c]$ および $[c,b]$ 上でも積分可能で

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

が成り立つ．逆に，$f(x)$ が $[a,c]$ および $[c,b]$ 上で積分可能ならば，$[a,b]$ 上でも積分可能で上の等式が成り立つ．

証明. 　区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ で c を分点にもつものを任意にとると，$c = x_l$ ならば $\Delta_1 = \{x_k\}_{k=0}^l$ は区間 $[a,c]$ の分割，$\Delta_2 = \{x_k\}_{k=l}^n$ は区間 $[c,b]$ の分割となる．このとき，過剰和を考える区間を明示して $S_\Delta^{[a,b]}(f)$ のように表すことにすると

$$S_\Delta^{[a,b]}(f) = \sum_{k=1}^n \sup_{x\in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) = \left(\sum_{k=1}^l + \sum_{k=l+1}^n\right) \sup_{x\in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) = S_{\Delta_1}^{[a,c]}(f) + S_{\Delta_2}^{[c,b]}(f)$$

となる．ここで，$|\Delta_1| \leqq |\Delta|$, $|\Delta_2| \leqq |\Delta|$ であるから，c を分点に選びながら $|\Delta| \to 0$ とすれば $|\Delta_1| \to 0$, $|\Delta_2| \to 0$ なので，上積分について

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

が成り立つ．同様にして，下積分について

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

も成り立つ．

$f(x)$ が $[a,b]$ 上で積分可能とすると，定理 2.19 より $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ であるから

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

となる．ここで，常に $\overline{\int_a^c} f(x)\,dx \geqq \underline{\int_a^c} f(x)\,dx$, $\overline{\int_c^b} f(x)\,dx \geqq \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$ であるから，上の等式が成り立つのは

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx, \qquad \overline{\int_c^b} f(x)\,dx = \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

のときである．ゆえに，定理 2.19 より $f(x)$ は $[a,c]$ および $[c,b]$ 上で積分可能であり，求める等式が成り立つ．

逆に $f(x)$ が $[a,c]$ と $[c,b]$ 上で積分可能とすると，定理 2.19 よりそれぞれの区間上の上積分と下積分は一致するから

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

が成り立つ．ゆえに，定理 2.19 より $f(x)$ は $[a,b]$ 上で積分可能であり，求める等式が成り立つ．　□

数学的帰納法により，積分区間を 3 つ以上にわけられることも証明できる．また，$a < b < c$ でなくても定理の公式は成り立つこともわかる．

定理 2.25. （積分可能な関数の積の可積分性）
関数 $f(x)$ と $g(x)$ がともに有界閉区間 I 上で積分可能ならば，積 $f(x)g(x)$ も I 上で積分可能である．

証明. $f(x)$ と $g(x)$ は I 上で積分可能なので有界であるから，ある定数 $C > 0$ で

$$|f(x)| \leqq C, \qquad |g(x)| \leqq C \qquad (x \in I)$$

となるものが存在する．よって，三角不等式より，任意の $x, y \in I$ に対して

$$\begin{aligned} |\,f(x)g(x) - f(y)g(y)\,| &\leqq |\,f(x)g(x) - f(x)g(y)\,| + |\,f(x)g(y) - f(y)g(y)\,| \\ &= |f(x)||\,g(x) - g(y)\,| + |g(y)||\,f(x) - f(y)\,| \\ &\leqq C|\,g(x) - g(y)\,| + C|\,f(x) - f(y)\,| \end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに，I の任意の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ をとれば，$I_k = [x_{k-1}, x_k]$ における振幅について

$$\begin{aligned} \omega(fg, I_k) &= \sup_{x,y \in I_k} |\,f(x)g(x) - f(y)g(y)\,| \\ &\leqq \sup_{x,y \in I_k} (C|\,f(x) - f(y)\,| + C|\,g(x) - g(y)\,|) \\ &\leqq C \sup_{x,y \in I_k} |\,f(x) - f(y)\,| + C \sup_{x,y \in I_k} |\,g(x) - g(y)\,| = C\{\omega(f, I_k) + \omega(g, I_k)\} \end{aligned}$$

となる．よって

$$0 \leqq \sum_{k=1}^n \omega(fg, I_k)(x_k - x_{k-1}) \leqq C \left\{ \sum_{k=1}^n \omega(f, I_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n \omega(g, I_k)(x_k - x_{k-1}) \right\}$$

である．$f(x)$ と $g(x)$ の積分可能性から，右辺は定理 2.19 より $|\Delta| \to 0$ で 0 に収束するので

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=1}^n \omega(fg, I_k)(x_k - x_{k-1}) = 0$$

が成り立つ．ゆえに，定理 2.19 より $f(x)g(x)$ は I 上で積分可能である． □

上積分・下積分や振幅を用いると，前の定理やこの定理のようにそこまで難しい議論をせずに証明ができる．具体的な積分計算ではあまり用いないが，理論的には便利な概念である．

定理 2.26. （積分可能な関数の商の可積分性）
関数 $f(x)$ が有界閉区間 I 上で積分可能で $f(x) \neq 0$ であり，さらに $\dfrac{1}{f(x)}$ が I 上で有界ならば，関数 $\dfrac{1}{f(x)}$ も I 上で積分可能である．

証明. 仮定より $\dfrac{1}{f(x)}$ は I 上で有界であるから，ある定数 $C > 0$ で

$$\frac{1}{|f(x)|} \leqq C \qquad (x \in I)$$

となるものが存在する．よって，任意の $x, y \in I$ に対して

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| = \left| \frac{f(y) - f(x)}{f(x)f(y)} \right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)||f(y)|} \leqq C^2 |f(x) - f(y)|$$

が成り立つ．ゆえに，I の任意の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ をとれば，$I_k = [x_{k-1}, x_k]$ における振幅について

$$\omega\left(\frac{1}{f}, I_k\right) = \sup_{x,y \in I_k} \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| \leqq \sup_{x,y \in I_k} C^2 |f(x) - f(y)| = C^2 \omega(f, I_k)$$

となる．よって

$$0 \leqq \sum_{k=1}^{n} \omega\left(\frac{1}{f}, I_k\right)(x_k - x_{k-1}) \leqq C^2 \sum_{k=1}^{n} \omega(f, I_k)(x_k - x_{k-1})$$

である．$f(x)$ の積分可能性から，右辺は定理 2.19 より $|\Delta| \to 0$ で 0 に収束するので

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega\left(\frac{1}{f}, I_k\right)(x_k - x_{k-1}) = 0$$

が成り立つ．ゆえに，定理 2.19 より $\dfrac{1}{f(x)}$ は I 上で積分可能である． □

定理 2.25 と定理 2.26 を組み合わせれば，関数 $f(x)$ と $g(x)$ がともに有界閉区間 I 上で積分可能で $g(x) \neq 0$ であり，さらに $\dfrac{1}{g(x)}$ が I 上で有界ならば，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も I 上で積分可能であることがわかる．

積分と絶対値の関係としては以下がよく用いられる．

定理 2.27. （積分版三角不等式）
関数 $f(x)$ は有界閉区間 $I=[a,b]$ 上で積分可能とする．このとき，$|f(x)|$ も I 上で積分可能で

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

が成り立つ．

証明． 三角不等式より，任意の $x,y\in I$ に対して

$$\big|\,|f(x)|-|f(y)|\,\big| \leqq |\,f(x)-f(y)\,|$$

が成り立つ．よって，I の任意の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^n$ をとれば，$I_k=[x_{k-1},x_k]$ における振幅について

$$\omega(|f|,I_k)=\sup_{x,y\in I_k}\big|\,|f(x)|-|f(y)|\,\big| \leqq \sup_{x,y\in I_k}|\,f(x)-f(y)\,|=\omega(f,I_k)$$

となる．よって

$$0\leqq\sum_{k=1}^n\omega(|f|,I_k)(x_k-x_{k-1})\leqq\sum_{k=1}^n\omega(f,I_k)(x_k-x_{k-1})$$

である．$f(x)$ の積分可能性から，この右辺は定理 2.19 より $|\Delta|\to 0$ で 0 に収束するので

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^n\omega(|f|,I_k)(x_k-x_{k-1})=0$$

が成り立つ．ゆえに，定理 2.19 より $|f(x)|$ は I 上で積分可能である．

次に I の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^n$ と代表点 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ を任意にとる．このとき，三角不等式より

$$|\,S(f;\Delta,\{\xi_k\})\,|=\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right|\leqq\sum_{k=1}^n|f(\xi_k)|(x_k-x_{k-1})=S(|f|;\Delta,\{\xi_k\})$$

となる．$f(x)$ と $|f(x)|$ は I 上で積分可能だから，$|\Delta|\to 0$ とすれば

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|=\lim_{|\Delta|\to 0}|\,S(f;\Delta,\{\xi_k\})\,|\leqq\lim_{|\Delta|\to 0}S(|f|;\Delta,\{\xi_k\})=\int_a^b|f(x)|\,dx$$

が成り立つ． □

後で見るように具体的な関数の定積分の値を求めることは大変なことが少なくない．ただし，応用上は正確な値を求めなくても上からの評価で十分なこともあり，その際には三角不等式は便利なものである．

例えば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1\frac{x^n}{1+x^2}\,dx$ を求めるには，この定積分の値を計算しなくてもよい．実際，$-1\leqq x\leqq 1$ ならば

$$\left|\,\frac{x^n}{1+x^2}\,\right|=\frac{|x|^n}{1+x^2}\leqq|x|^n$$

である．よって，高校数学のように計算すれば三角不等式より

$$\left|\int_{-1}^1\frac{x^n}{1+x^2}\,dx\right|\leqq\int_{-1}^1\left|\,\frac{x^n}{1+x^2}\,\right|dx\leqq\int_{-1}^1|x|^n\,dx=2\int_0^1 x^n\,dx=2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{2}{n+1}$$

が成り立つので，はさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1\frac{x^n}{1+x^2}\,dx=0$ となることがわかる．

この問題で最初に $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{x^n}{1+x^2}\,dx$ の値を直接計算しようとすれば，上の計算よりも大変になる．

3　不定積分と微分積分学の基本公式

3.1　不定積分と原始関数

高校数学の教科書では不定積分と原始関数は区別されていないが，実際には異なる概念である．ただし，以下の定理 3.9 で見るように，連続関数に対してはこれらは一致する．そのため高校数学の範囲ではその理解でも誤りではないが，今後は気をつける方がよい．通常の高校数学の教科書では原始関数を「不定積分または原始関数」と呼んでいる．そこで，まずはこれらの正式な定義を述べる．

定義 3.1. （**原始関数**）
区間 I 上の関数 $f(x)$ に対して

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \qquad (x \in I)$$

をみたす関数 $F(x)$ が存在するとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という．

関数 $F(x)$ が区間 I 上の $f(x)$ の原始関数ならば，定数 C に対して $\widetilde{F}(x) = F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数となる．よって，原始関数が存在する場合には 1 個ではなく無限個存在するが，それらの差は定数である．実際，$F_1(x)$ と $F_2(x)$ をともに $f(x)$ の原始関数とすれば

$$\{F_1(x) - F_2(x)\}' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad (x \in I)$$

より，$F_1(x) - F_2(x)$ は区間 I 上で定数関数である．

例 3.2.　$f(x) = 2x$ の原始関数は $F(x) = x^2$ である．もちろん他に

$$x^2 + 1, \qquad x^2 - 2, \qquad x^2 + \sqrt{5}, \qquad x^2 + 2\pi, \qquad x^2 - \log 3 + e^2, \qquad \ldots$$

も $f(x)$ の原始関数である．まとめれば $F(x) = x^2 + C$（C は定数）と表せる．

例 3.3.　原始関数はいつも存在するとは限らない．例えば，例 2.8 で定義したような 1 点でジャンプした関数 $\psi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (x \fallingdotseq 0) \end{cases}$$

は原始関数をもたない．実際，もし $\mathbb{R}$ 上で微分可能な関数 $F(x)$ が $\psi(x)$ の原始関数とすると，まず $x \fallingdotseq 0$ では

$$F'(x) = \psi(x) = 0$$

となる．よって，区間 $(-\infty, 0)$ および $(0, \infty)$ において，第 5 章定理 5.5 より $F(x)$ は定数関数である．そこで

$$F(x) = \begin{cases} C_1 & (x < 0) \\ C_2 & (x > 0) \end{cases}$$

とおくと，$F(x)$ は微分可能なので連続であるから

$$\lim_{x \to 0-0} F(x) = F(0) = \lim_{x \to 0+0} F(x)$$

でなければならない．よって

$$C_1 = F(0) = C_2$$

となるので，$F(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で同じ値をとる定数関数である．ゆえに，$F'(x) = 0$ がすべての x について成り立つことになるが，これは $F'(0) = \psi(0) = 1$ であることに矛盾する．したがって，$\psi(x)$ の原始関数は存在しない．

次に，本来の不定積分の定義を述べる．

定義 3.4. （**不定積分**）
関数 $f(x)$ が区間 I に含まれる任意の有界閉区間上で積分可能とする．このとき，$a \in I$ と定数 C に対して，関数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C \qquad (x \in I)$$

を定める．この $F(x)$ を記号

$$\int f(x)\,dx$$

で表し，区間 I における $f(x)$ の**不定積分**という．

注意 3.5. 不定積分は存在すれば 1 個ではなく無限個ある．ただし，$f(x)$ の不定積分を 2 個

$$F_1(x) = \int_{a_1}^x f(t)\,dt + C_1, \qquad F_2(x) = \int_{a_2}^x f(t)\,dt + C_2$$

とってくると，その差は

$$F_1(x) - F_2(x) = \int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt + C_1 - C_2$$

となるので定数である．よって，任意の 2 つの不定積分の差は定数である．そこで，この定数を**積分定数**とよぶ．
また，定理 2.21 より連続関数は有界閉区間上で積分可能なので，区間 I 上の連続関数 $f(x)$ は必ず不定積分 $F(x)$ をもつ．

例 3.6. $f(x) = 2x$ の不定積分 $F(x)$ は定理 2.10 と例 2.6 より

$$F(x) = \int_a^x 2t\,dt + C = 2\int_a^x t\,dt + C = 2 \cdot \frac{x^2 - a^2}{2} + C = x^2 - a^2 + C$$

である．定数の部分を改めて C とおけば，$F(x) = x^2 + C$ となる．

注意 3.7. 不定積分の定義を $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$（$a \in I$ はどこでもよい）とすることも多い．理論上はそれで困らないが，上の例では

$$\int_a^x 2t\,dt = x^2 - a^2$$

なので，点 $a \in \mathbb{R}$ をどこにとっても積分定数にあたる部分は $-a^2 \leqq 0$ となる．これでは原始関数の一部（例えば $F(x) = x^2 + 1$）が表現できない．高校の教科書の記述（連続関数ならば原始関数と不定積分が一致する）に無理に合わせるため，ここでは不定積分の定義に定数項を加えている．ただ，実際には高校の教科書の方が改められるべきだとは思う．

例 3.8. 例 3.3 で定義した 1 点でジャンプした関数 $\psi(x)$ の不定積分 $F(x)$ を求めてみる．例 2.8 より

$$F(x) = \int_a^x \psi(t)\,dt + C = 0 + C = C$$

となる．よって，不定積分は定数関数である．

上の例では $f(x) = 2x$ については原始関数と不定積分が一致している．これは偶然ではなく連続関数について常に成り立つ性質であることを次に説明する．ただし，不連続な関数については原始関数や不定積分が存在しないということが起こりうる．例 3.3 と例 3.8 の関数 $\psi(x)$ について，その不定積分 $F(x) = C$ は微分可能であるが，$\psi(x)$ の原始関数は存在しない．

定理 3.9. 関数 $f(x)$ は区間 I 上で連続とする．このとき，I 上の関数 $F(x)$ に対して

$$F(x) \text{ は } f(x) \text{ の不定積分} \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) \text{ は } f(x) \text{ の原始関数}$$

が成り立つ．

証明. $(\Longrightarrow)$ $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とする．このとき，$a \in I$ と定数 C により

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

と表せる．このとき，任意の $x \in I$ と $x+h \in I$ となる $h \fallingdotseq 0$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left\{\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt + C\right) - \left(\int_a^x f(t)\,dt + C\right)\right\}\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\end{aligned}$$

となる．ここで，$f(x)$ は I 上で連続だから，定理 2.23（積分法の平均値定理）より，h の正負によらず

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x+\theta h), \qquad 0<\theta<1$$

となる θ が（x と h に依存して）存在する．よって

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x+\theta h)$$

と表せる．ゆえに，$f(x)$ の連続性と $|\theta h| < |h|$ より

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x+\theta h) = f(x)$$

である．ただし，$x \in I$ が I の端点の場合は適切な片側極限を考えている．したがって，平均変化率の極限値が存在するから $F(x)$ は微分可能で，$F'(x) = f(x)$ が成り立つ．

$(\Longleftarrow)$ $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数，すなわち $F'(x) = f(x)$ となるものとする．

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

を $f(x)$ の不定積分とすると，前半で示したことより $G'(x) = f(x)$ が成り立つ．よって

$$\{F(x)-G(x)\}' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

となるから，$F(x) - G(x) = C_1$（定数）となる．ゆえに

$$F(x) = G(x) + C_1 = \int_a^x f(t)\,dt + (C + C_1)$$

と表されるので，$F(x)$ は $f(x)$ の不定積分である． □

以上から，連続関数に対しては不定積分と原始関数は同じものである．したがって，注意 3.5 で述べたことより，連続関数は必ず原始関数をもつことがわかる．

被積分関数が連続ならば，定理 3.9 から不定積分は原始関数であるから，次のようにまとめられる．

定理 3.10. （微分積分学の基本定理）
関数 $f(x)$ が区間 I 上で連続ならば，$a \in I$ とすれば

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad (x \in I)$$

が成り立つ．

これは微分と積分が（定数差を除いて）互いに逆計算であることを表している．その意味では微分法と積分法を結び付けている非常に重要な定理である．次節で見るように，この定理を用いることで積分の計算が微分の逆計算である原始関数を求めることに帰着できる．

例 3.8 で示したように，関数 $f(x)$ が連続でない場合には

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt \neq f(x)$$

となることがあるので注意すること．後で見るように不連続な関数に対しては「積分は微分の逆」であるとは限らない．例 3.8 は不定積分が微分可能であるが，不定積分の導関数が元の関数と一致しない例である．他にも不定積分が存在するが，その不定積分が微分不可能であるような例も存在する．

例題 3.11. 関数 $H\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

の不定積分 $F(x)$ を 1 つ求め，$F'(x) = H(x)$ が成り立たないことを示せ．

（解答） 不定積分の定義において $a = 0,\ C = 0$ として不定積分の 1 つ $F(x)$ を計算すれば，$x < 0$ のとき

$$F(x) = \int_0^x H(t)\,dt = -\int_x^0 H(t)\,dt = 0$$

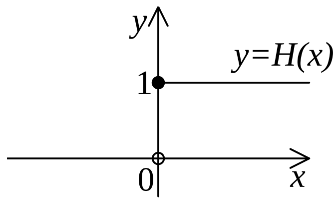
であり（積分区間 $[x, 0]$ において 1 点 $t = 0$ を除いて $H(t) = 0$ なので），$x \geqq 0$ のときは

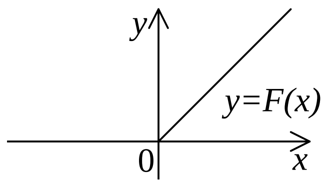
$$F(x) = \int_0^x H(t)\,dt = \int_0^x 1\,dt = x$$

となる．よって

$$F(x) = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

である．$F(x)$ は $x = 0$ で微分不可能であるから，当然 $F'(x) \neq H(x)$ である．





（解答終）

このように不定積分が存在してもその不定積分が微分不可能な場合もあるので，定理 3.10 の公式は無条件には成り立たないことがわかる．上の例題では $H(x)$ が連続ではないから，公式が成り立たないのである．

定理 3.12. （不定積分の線形性）
関数 $f(x)$ と $g(x)$ はともに区間 I において不定積分をもつとし，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ とする．このとき

$$\int \{\lambda f(x) + \mu g(x)\}\, dx = \lambda \int f(x)\, dx + \mu \int g(x)\, dx$$

が（定数差を無視したときに）成り立つ．

証明． 不定積分の定義より

$$\int f(x)\, dx = \int_a^x f(t)\, dt + C_1, \qquad \int g(x)\, dx = \int_a^x f(t)\, dt + C_2$$

と表せるから

$$\begin{aligned}\lambda \int f(x)\, dx + \mu \int g(x)\, dx &= \lambda \left(\int_a^x f(t)\, dt + C_1 \right) + \mu \left(\int_a^x f(t)\, dt + C_2 \right) \\ &= \int_a^x \{\lambda f(x) + \mu g(x)\}\, dx + (\lambda C_1 + \mu C_2)\end{aligned}$$

となるので，これは $\lambda f(x) + \mu g(x)$ の不定積分である． $\square$

連続関数の不定積分は微分可能で原始関数に一致することは既に示した．不連続な関数に対してはその不定積分は微分可能とは限らないが，必ず連続であることは知られている．

定理 3.13. （不定積分の連続性）
関数 $f(x)$ が区間 I において不定積分をもつならば，その不定積分は I 上の連続関数である．

証明． $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると，$a \in I$ と定数 C を用いて

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + C$$

と表せる．任意の $x_0 \in I$ をとる．x_0 が I の端点でないときには，$x_0 \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$ となるように十分小さな $\varepsilon > 0$ を選べば，不定積分をもつという仮定より $f(x)$ は区間 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ において有界である．そこで $M = \sup_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} |f(x)|$ とおけば，$0 < h < \varepsilon$ ならば，定理 2.27 より

$$|\, F(x_0 + h) - F(x_0)\, | = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt \right| \leqq \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|\, dt \leqq \int_{x_0}^{x_0+h} M\, dt = Mh$$

となる．同様に $-\varepsilon < h < 0$ ならば

$$|\, F(x_0 + h) - F(x_0)\, | = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt \right| \leqq \int_{x_0+h}^{x_0} |f(t)|\, dt \leqq \int_{x_0+h}^{x_0} M\, dt = M(-h)$$

であるから，h の正負によらず

$$|\, F(x_0 + h) - F(x_0)\, | \leqq M|h| \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (h \to 0)$$

が成り立つ．ゆえに

$$\lim_{h \to 0} F(x_0 + h) = F(x_0)$$

となるから，$F(x)$ は点 x_0 で連続である．x_0 が I の端点の場合にも同様なので，$F(x)$ は I 上で連続である． $\square$

3.2 微分積分学の基本公式

この節では具体的な定積分の計算において有効な方法をまとめておく．

定理 3.14. （微分積分学の基本公式）
関数 $f(x)$ は区間 I 上で連続とし，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．このとき，$\alpha, \beta \in I$ に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

が成り立つ．この右辺を $\Big[F(x)\Big]_{\alpha}^{\beta}$ とも表す．

証明． $f(x)$ は連続関数で $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であるから，定理 3.9 より $F(x)$ は $f(x)$ の不定積分でもある．よって，$a \in I$ と定数 C を用いて

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

と表せる．ゆえに

$$F(\beta) - F(\alpha) = \left(\int_a^{\beta} f(t)\,dt + C\right) - \left(\int_a^{\alpha} f(t)\,dt + C\right) = \int_a^{\beta} f(t)\,dt + \int_{\alpha}^{a} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$$

が成り立つ． □

この定理 3.14（微分積分学の基本公式）により，応用上ほとんどの場合には**積分は微分の逆の操作である**ことがわかった．積分の本来の定義は Riemann 和の極限であり，この事実はその定義から得られる定理なのではあるが，高校数学では話を簡単にするために定理 3.14 を『積分の定義』として採用している．そのために区分求積法をはじめとする様々な定理の正確な証明は与えられなかったのである．

ただ，この定理 3.14 のおかげで，具体的な積分の計算はこれまで高校で習ったのと同じようにすればよいことが保証された．そこで次節からは Riemann 和などはあまり気にせずに，積分の計算例や計算手法を説明していくことにする．

また，定積分で定義された関数の導関数は一般に次のようになる．

定理 3.15. （定積分で定義された関数の導関数）
関数 $f(x)$ は区間 I 上で連続，関数 $a(x)$ と $b(x)$ はともに区間 J 上で微分可能で，$a(x), b(x) \in I \ (x \in J)$ ならば

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f\big(b(x)\big)b'(x) - f\big(a(x)\big)a'(x) \qquad (x \in J)$$

が成り立つ．

証明． $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とおけば，微分積分学の基本定理より

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = F\big(b(x)\big) - F\big(a(x)\big)$$

となるから，この両辺を微分すれば

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = F'\big(b(x)\big)b'(x) - F'\big(a(x)\big)a'(x) = f\big(b(x)\big)b'(x) - f\big(a(x)\big)a'(x)$$

が成り立つ． □

例題 3.16.　$\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して，次の関数の導関数を f を用いて表せ．ただし，a は定数とする．

(1) $\displaystyle\int_a^{x^2} f(t)\,dt$　　(2) $\displaystyle\int_{3x-1}^{x^2+1} f(t)\,dt$　　(3) $\displaystyle\int_a^{x} e^{2x-t} f(t)\,dt$　　(4) $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} f(t^2)\,dt$

（解答）

(1) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)\,dt = f(x^2)\cdot(x^2)' = 2xf(x^2)$

(2) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{3x-1}^{x^2+1} f(t)\,dt = f(x^2+1)\cdot(x^2+1)' - f(3x-1)\cdot(3x-1)' = 2xf(x^2+1) - 3f(3x-1)$

(3) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_a^{x} e^{2x-t} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\int_a^x e^{-t}f(t)\,dt\right) = 2e^{2x}\int_a^x e^{-t}f(t)\,dt + e^x f(x)$

(4) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} f(t^2)\,dt = f(x^6)\cdot(x^3)' - f(x^4)\cdot(x^2)' = 3x^2 f(x^6) - 2xf(x^4)$

（解答終）

定理 3.14（微分積分学の基本公式）は被積分関数が連続関数の場合である．被積分関数が連続関数とは限らない場合でも，次の主張が成り立つ．次の定理の仮定を簡単に言い換えると，まず大前提として被積分関数が積分可能で，さらに原始関数が存在する場合には微分積分学の基本公式が成り立つということである．

定理 3.17. （微分積分学の基本定理）

関数 $f(x)$ は区間 I 上で微分可能で，導関数 $f'(x)$ は I 上で積分可能であるとする．このとき，$\alpha, \beta \in I$ に対して

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = f(\beta) - f(\alpha)$$

が成り立つ．

証明.　$\alpha < \beta$ の場合を証明する．$f'(x)$ は積分可能なので，区間 $[\alpha, \beta]$ の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ をとったときに，代表点 $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ をどのようにとってもリーマン和は

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(f'; \Delta, \{\eta_k\}) = \int_\alpha^\beta f'(x)\,dx$$

と収束する．また，$f(x)$ は $[\alpha, \beta]$ 上で微分可能なので，各小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ において平均値の定理を適用すれば

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\eta_k), \qquad x_{k-1} < \eta_k < x_k$$

となる η_k が存在する．そこで，この η_k を代表点に選んでリーマン和を計算すると

$$S(f'; \Delta, \{\eta_k\}) = \sum_{k=1}^n f'(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \{f(x_k) - f(x_{k-1})\} = f(x_n) - f(x_0) = f(\beta) - f(\alpha)$$

となる．この右辺は定数であるから

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} S(f'; \Delta, \{\eta_k\}) = \lim_{|\Delta|\to 0}\{f(\beta) - f(\alpha)\} = f(\beta) - f(\alpha)$$

が成り立つ．　□

3.3 部分積分法・置換積分法

定理 3.18. （部分積分法）
関数 $f(x)$ と $g(x)$ がともに区間 I 上で C^1 級ならば

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad (x \in I)$$

が（定数差を無視したときに）成り立つ．また，$a, b \in I$ に対して

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

が成り立つ．

証明. 積の微分法より

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

であり，仮定よりこの右辺は I 上で連続だから積分可能である．よって，この両辺の不定積分は

$$f(x)g(x) = \int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

となるから，移項すれば

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

が成り立つ．
定積分については，上で示した不定積分についての公式と微分積分学の基本定理より示される． □

定理 3.19. （置換積分法）
関数 $f(x)$ は区間 I 上で連続とする．関数 $x = x(t)$ が区間 J 上で C^1 級で，$x(J) \subset I$ ならば

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt \qquad (t \in J)$$

が成り立つ．また，$\alpha, \beta \in J$ について，$a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$ とおくと

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

が成り立つ．

証明. $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とおく．このとき

$$\frac{d}{dt}\,F(x(t)) = F'(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t)$$

であり，この右辺は J 上で連続だから積分可能である．よって，この両辺の不定積分は

$$F(x(t)) = \int f(x(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

となる．また，定積分については，上で示した不定積分についての公式と微分積分学の基本定理より

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x(\beta)) - F(x(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

が成り立つ． □

例題 3.20. $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ と定数 a に対して，関数 $\displaystyle\int_0^{x-a} tf(x-t)\,dt$ の導関数を f を用いて表せ．

（解答） $y = x - t$ とおけば

$$\begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & x-a \\ \hline y & x & \to & a \end{array} \qquad dy = -dt$$

$$\int_0^{x-a} tf(x-t)\,dt = \int_x^a (x-y)f(y)\cdot(-dy) = \int_a^x (x-y)f(y)\,dy = x\int_a^x f(y)\,dy - \int_a^x yf(y)\,dy$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_0^{x-a} tf(x-t)\,dt &= \frac{d}{dx}\left(x\int_a^x f(y)\,dy - \int_a^x yf(y)\,dy\right) \\ &= \int_a^x f(y)\,dy + xf(x) - xf(x) \\ &= \int_a^x f(y)\,dy \end{aligned}$$

（解答終）

定理 3.21. （偶関数・奇関数の積分）

関数 $f(x)$ は区間 $[-a, a]$ 上で積分可能とする．このとき

(1) $f(x)$ が偶関数，すなわち $f(-x) = f(x)$ ならば，$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ である．

(2) $f(x)$ が奇関数，すなわち $f(-x) = -f(x)$ ならば，$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ である．

証明. 一般の場合は複雑なので，$f(x)$ が連続関数の場合の証明を与える．

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_{-a}^0 f(x)\,dx$$

の第 2 項において $x = -t$ とおけば

$$\begin{array}{c|ccc} x & -a & \to & 0 \\ \hline t & a & \to & 0 \end{array} \qquad dx = -dt$$

なので

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_a^0 f(-t)\,(-dt) = \int_0^a f(-t)\,dt = \begin{cases} \displaystyle\int_0^a f(t)\,dt & (f \text{ が偶関数}) \\ \displaystyle -\int_0^a f(t)\,dt & (f \text{ が奇関数}) \end{cases}$$

となるから，$f(x)$ が偶関数ならば

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

となり，$f(x)$ が奇関数ならば

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

となる． □

3.4 基本的な不定積分の公式

連続関数に対しては原始関数と不定積分は一致するので，$f(x)$ の原始関数も $\int f(x)\,dx$ で表すことにする．以下では被積分関数が積分可能な区間上で考える．また，C を積分定数とする．ここで挙げた公式は普段から証明なしで用いてよいものである．

命題 3.22.

$$\int x^{\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1} + C & (\alpha \fallingdotseq -1) \\ \log|x| + C & (\alpha = -1) \end{cases}$$

証明. 導関数の公式からすぐにわかる．α の値によって場合分けが必要なことに注意すること． □

命題 3.23.

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0,\ a \fallingdotseq 1)$$

証明. 導関数の公式からすぐにわかる． □

命題 3.24.

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C, \qquad \int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C$$

証明. 最初から 3 つは導関数の公式からすぐにわかる．最後は

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C$$

□

命題 3.25.

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{a} + C \quad (a \fallingdotseq 0)$$

証明.

$$\frac{d}{dx}\,\frac{1}{a}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

□

命題 3.26.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

証明.

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

□

命題 3.27.

$$\int \log x\,dx = x\log x - x + C$$

証明.

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + C$$

□

命題 3.28.

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C, \qquad \int \sinh x\,dx = \cosh x + C, \qquad \int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$$

証明.　導関数の公式からすぐにわかる. □

命題 3.29.　a を実数とするとき

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$$

ただし，$a>0$ の場合には $x+\sqrt{x^2+a}>0$ であるから，絶対値は不要である.

証明.

$$\frac{d}{dx}\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

□

一般に次が成り立つ．対数微分法の逆だと考えればよい.

命題 3.30.　$f(x)$ は C^1 級関数で $f(x) \neq 0$ とするとき，区間 I 上で次の等式が成り立つ.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$$

注意 3.31.　積分定数は区間において一定なので，積分範囲が共通部分をもたない 2 つ以上の区間に分かれている場合には，区間ごとに積分定数は異なる.

4　不定積分・定積分の具体的な計算例

4.1　不定積分の公式の利用

例題 4.1.　次の不定積分・定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 2^x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3+4)^{3/2}}\,dx$　(5) $\displaystyle\int \tanh x\,dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}\,dx$　(8) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,dx$　(9) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$

（解答）　積分定数を C とする.

(1) $$\int_0^1 2^x\,dx = \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1 = \frac{2-1}{\log 2} = \frac{1}{\log 2}$$

(2) $$\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{8}$$

(3) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \left[\log\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)\right]_0^1 = \log 3 - \log\sqrt{3} = \frac{1}{2}\log 3$$

(4) $$\int \frac{x^2}{(x^3+4)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+4)'(x^3+4)^{-3/2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\left(-2(x^3+4)^{-1/2}\right) + C = -\frac{2}{3\sqrt{x^3+4}} + C$$

(5) $$\int \tanh x\,dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}\,dx = \int \frac{(\cosh x)'}{\cosh x}\,dx = \log(\cosh x) + C$$

(6) $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left[\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{x}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{Sin}^{-1}\,0 = \frac{\pi}{3}$$

(7) $$\int \frac{1}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}\,dx = \mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \mathrm{Sin}^{-1}(2x-3) + C$$

(8) $$\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+3)'}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+3) + C$$

(9) $$\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx = \int \frac{(e^x-1)'}{e^x-1}\,dx = \log|\,e^x-1\,| + C$$

（解答終）

三角関数の積分については，まず次数を下げて積分しやすい形にすることが重要である．

例題 4.2. 次の不定積分を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$ (3) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,dx$ (5) $\displaystyle\int \sin x\cos^n x\,dx$ (6) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

（解答） 積分定数を C とする．

(1) 半角の公式より

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

(2) 2 倍角の公式より

$$\int \sin x\cos x\,dx = \int \frac{\sin 2x}{2}\,dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C$$

(3) 3 倍角の公式 $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ より

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}\,dx = \frac{\sin 3x}{12} + \frac{3\sin x}{4} + C$$

または

$$\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

(4) 積和の公式より

$$\int \sin 2x\cos 3x\,dx = \int \frac{\sin 5x - \sin x}{2}\,dx = -\frac{\cos 5x}{10} + \frac{\cos x}{2} + C$$

(5) $(\cos x)' = -\sin x$ であるから

$$\int \sin x\cos^n x\,dx = -\int (\cos x)'\cos^n x\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$$

(6) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるから

$$\int \tan^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = \tan x - x + C$$

（解答終）

例題 4.3.　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int \mathrm{Sin}^{-1}\,x\,dx$

（解答）　積分定数を C とする．

(1)　部分積分すれば

$$\int x\sin 2x\,dx = x\cdot\frac{-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}\,x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(2)　$(\log x)^2 = (x)'\cdot(\log x)^2$ とみて部分積分すれば

$$\begin{aligned}\int(\log x)^2\,dx &= x(\log x)^2 - \int x\cdot 2(\log x)\frac{1}{x}\,dx\\ &= x(\log x)^2 - 2\int\log x\,dx\\ &= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C\end{aligned}$$

(3)　$\mathrm{Tan}^{-1}\,x = (x)'\cdot\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ とみて部分積分すれば

$$\begin{aligned}\int\mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx &= x\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \int x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= x\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx\\ &= x\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(4)　$\mathrm{Sin}^{-1}\,x = (x)'\cdot\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ とみて部分積分すれば

$$\begin{aligned}\int\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,dx &= x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x + \int\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

（解答終）

例題 4.4.　次の不定積分・定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{3x^2+4}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{x^2}\,dx$

（解答）　積分定数を C とする．

(1)　$t=x^2+2$ とおくと，$dt=2x\,dx$ より

$$\int x\sqrt{x^2+2}\,dx=\int\frac{\sqrt{t}}{2}\,dt=\frac{1}{3}\,t^{3/2}+C=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}+C$$

(2)　$t=3x^2+4$ とおくと

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 2 \\ \hline t & 4 & \to & 16 \end{array} \qquad\qquad dt=6x\,dx$$

より

$$\int_0^2 x\sqrt{3x^2+4}\,dx=\int_4^{16}\frac{\sqrt{t}}{6}\,dt=\left[\frac{1}{9}\,t^{3/2}\right]_4^{16}=\frac{1}{9}\,(64-8)=\frac{56}{9}$$

(3)　$t=x^2$ とおくと

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \sqrt{2} \\ \hline t & 0 & \to & 2 \end{array} \qquad\qquad dt=2x\,dx$$

より

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^3e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 te^t\,dt=\frac{1}{2}\Big[te^t\Big]_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2 e^t\,dt=e^2-\frac{1}{2}\Big[e^t\Big]_0^2=\frac{e^2+1}{2}$$

（解答終）

例題 4.5.　a,b は 0 でない実数とするとき，次が成り立つことを示せ．ただし，積分定数は省略した．

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\cos bx+b\sin bx),\qquad \int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin bx-b\cos bx)$$

（解答）　$I=\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$，$J=\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$ とおく．部分積分すれば

$$I=\frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx-\frac{1}{a}\int e^{ax}(-b\sin bx)\,dx=\frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\,J$$

$$J=\frac{1}{a}\,e^{ax}\sin bx-\frac{1}{a}\int e^{ax}\cdot b\cos bx\,dx=\frac{1}{a}\,e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\,I$$

となる．よって

$$aI-bJ=e^{ax}\cos bx,\qquad bI+aJ=e^{ax}\sin bx$$

が得られる．この I と J に関する連立方程式

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}=e^{ax}\begin{pmatrix} \cos bx \\ \sin bx \end{pmatrix}$$

を解けば，$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos bx \\ \sin bx \end{pmatrix}=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a\cos bx+b\sin bx \\ a\sin bx-b\cos bx \end{pmatrix}$$

（解答終）

Taylor の定理では剰余項に具体的に形のわからない $0 < \theta < 1$ が現れてやや見にくい場合があるが，積分を用いて次のように剰余項を表すこともできる。

定理 4.6. （Taylor の定理の積分剰余形）
関数 $f(x)$ は点 a を含む開区間 I 上で C^n 級とする．このとき，各 $x \in I$ に対して

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt$$

とおけば

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + R_n(x)$$

が成り立つ．

証明. 部分積分により，$k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して

$$\begin{aligned}
R_{k+1}(x) &= \frac{1}{k!}\int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\,dt \\
&= \frac{1}{k!}\left\{\Big[f^{(k)}(t)(x-t)^k\Big]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f^{(k)}(t)\cdot k(x-t)^{k-1}\cdot(-1)\,dt\right\} \\
&= -\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}\,dt \\
&= -\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + R_k(x)
\end{aligned}$$

が成り立つ．また

$$R_1(x) = \int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$R_n(x) = R_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\big(R_{k+1}(x) - R_k(x)\big) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

となるので

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + R_n(x)$$

が成り立つ．これは $n = 1$ でも成立している． □

この形の Taylor 展開の方が剰余項の形がはっきりしていて扱いやすいこともある．微分法のところで学習したものと合わせて両方憶えておくとよい．

4.2 区分求積法

関数 $f(x)$ は閉区間 $I=[a,b]$ 上で連続とする．このとき，$f(x)$ は積分可能であるから，I の分割 Δ と代表点 $\{\xi_k\}$ をどのように決めても，Riemann 和 $S(f;\Delta,\{\xi_k\})$ は $|\Delta|\to 0$ で定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ に収束する．これを利用して級数の極限値を計算する方法を区分求積法という．グラフを描いて考えてみるのもよい．

例題 4.7. 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+2n}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$

（解答）

(1) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$ は区間 $[0,1]$ を n 等分し，代表点を各小区間の右端にとった $f(x)=\sin\pi x$ の Riemann 和である．よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\left[-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

(2) 極限を考える数列を

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}$$

と変形すれば，これは区間 $[0,2]$ を $2n$ 等分し，代表点を各小区間の右端にとった $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ の Riemann 和である．よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}=\int_0^2\frac{1}{1+x}\,dx=\Big[\log|1+x|\Big]_0^2=\log 3$$

(3) 極限を考える数列の対数をとって

$$\log\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

と変形すれば，これは区間 $[0,1]$ を n 等分し，代表点を各小区間の右端にとった $f(x)=\log(1+x)$ の Riemann 和である．よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(1+x)\,dx=\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^1=2\log 2-1$$

となる．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}=2\log 2-1=\log\frac{4}{e}$$

であるから，指数関数の連続性より

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}=\frac{4}{e}$$

（解答終）

4.3 定積分と不等式

例題 4.8. n を 3 以上の自然数とするとき，不等式 $\log(1+\sqrt{2}\,) < \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\,dx < 1$ を示せ．

（解答） $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq x^n \leqq x^2$ より

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} \leqq 1$$

であり，この等号は区間 $[0,1]$ 上で常には成り立たない．よって，定理 2.22（積分の単調性）より

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\,dx < \int_0^1 1\,dx = 1$$

となる．ここで

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \Big[\log(x+\sqrt{1+x^2}\,)\Big]_0^1 = \log(1+\sqrt{2}\,)$$

であるから，求める不等式

$$\log(1+\sqrt{2}\,) < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\,dx < 1$$

が成り立つ．

（解答終）

例題 4.9. $R > 0$ のとき，不等式

$$\frac{1}{R}\,(1-e^{-\pi R/2}) < \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin x}\,dx < \frac{\pi}{2R}\,(1-e^{-R})$$

が成り立つことを示せ．また，この不等式を利用して，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin x}\,dx = 0$ であることを示せ．

（解答） $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y = \sin x$ が上に凸であることから，$\dfrac{2x}{\pi} \leqq \sin x \leqq x$ が成り立つ．よって

$$e^{-Rx} \leqq e^{-R\sin x} \leqq e^{-2Rx/\pi}$$

であり，この等号は区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上で常には成り立たない．よって，定理 2.22（積分の単調性）より

$$\int_0^{\pi/2} e^{-Rx}\,dx < \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin x}\,dx < \int_0^{\pi/2} e^{-2Rx/\pi}\,dx$$

となる．ここで

$$\int_0^{\pi/2} e^{-ax}\,dx = \left[-\frac{e^{-ax}}{a}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{a}\,(1-e^{-\pi a/2})$$

であるから，左辺は $a = R$ を右辺は $a = \dfrac{2R}{\pi}$ を代入して，求める不等式

$$\frac{1}{R}\,(1-e^{-\pi R/2}) < \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin x}\,dx < \frac{\pi}{2R}\,(1-e^{-R})$$

が成り立つ．よって，この両辺で $R \to \infty$ とすれば

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\,(1-e^{-\pi R/2}) = 0, \qquad \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{2R}\,(1-e^{-R}) = 0$$

であるから，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin x}\,dx = 0$ が成り立つ．

（解答終）

例題 4.10.　自然数 n に対して，不等式

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

が成り立つことを示せ．また，この不等式を利用して，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを示せ．

（解答）　各 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$y = \dfrac{1}{x}$ の区間 $[k, k+1]$ における単調減少性より

$$\frac{1}{x} \leqq \frac{1}{k} \qquad (k \leqq x \leqq k+1)$$

であり，この等号は区間 $[k, k+1]$ 上で常には成り立たない．よって，定理 2.22（積分の単調性）より

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx = \frac{1}{k}$$

となる．これを $k = 1, 2, \ldots, n$ について加えれば

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

となり，この左辺を計算すれば

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

となるから，求める不等式

$$\log(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

が成り立つ．

　よって，示した不等式において $n \to \infty$ とすれば

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \log(n+1) \quad \longrightarrow \quad \infty \qquad (n \to \infty)$$

であるから，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散する．

（解答終）

定積分と不等式を利用して級数の値を求めることができることも少なくない.

例題 4.11. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ の値を求めよ.

（解答） 等比数列の和の公式より

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{m-1} = \frac{1-(-x)^m}{1+x}$$

であるから，この両辺を区間 $[0,1]$ において積分すれば

$$\int_0^1 \{1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{m-1}\}\,dx = \int_0^1 \frac{1-(-x)^m}{1+x}\,dx \tag{4.1}$$

である．(4.1)の各辺を計算すれば

$$(4.1)\text{の左辺} = \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}x^m}{m}\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$(4.1)\text{の右辺} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{(-x)^m}{1+x}\,dx = \log 2 - \int_0^1 \frac{(-x)^m}{1+x}\,dx$$

となるから

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2 - \int_0^1 \frac{(-x)^m}{1+x}\,dx \tag{4.2}$$

が成り立つ.

さらに，定理 2.27（三角不等式）と定理 2.22（積分の単調性）より

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^m}{1+x}\,dx\right| \leqq \int_0^1 \left|\frac{(-x)^m}{1+x}\right|dx = \int_0^1 \frac{x^m}{1+x}\,dx < \int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}$$

であるから，はさみうち法より

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 \frac{(-x)^m}{1+x}\,dx = 0$$

となる.

よって，(4.2)において $m \to \infty$ とすれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$$

（解答終）

4.4　漸化式を用いた積分計算

2 重階乗 $n!!$ の記号については第 1 章 2.5 で紹介したのでそちらを参照せよ．

命題 4.12. （三角関数の n 乗の積分）

0 以上の整数 n に対して，次が成り立つ．

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

証明.　0 以上の整数 n に対して

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$$

とおく．$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{\pi/2} \sin x\cdot\sin^{n-1} x\,dx &= \Big[-\cos x\sin^{n-1} x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(-\cos x)\cdot(n-1)\sin^{n-2} x\cos x\,dx \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\sin^{n-2} x\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2}(\sin^{n-2} x - \sin^n x)\,dx = (n-1)(I_{n-2}-I_n) \end{aligned}$$

より

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}$$

が成り立つ．

また，$n = 0, 1$ のときは

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

である (細かいことを注意すれば $\sin^0 0 = 0^0$ の値は問題だが，1 点での値は積分値に影響しない)．

よって，上で得られた漸化式を繰り返し用いれば

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\,I_{n-4} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\,I_{n-6} = \cdots$$

となるから，n が偶数のときは

$$I_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\,I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

であり，n が奇数のときは

$$I_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\,I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

が成り立つ．　□

命題 4.12 に関連する積分として $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ を考えると，$t = \dfrac{\pi}{2} - x$ とおけば

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t, \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & \to & 0 \end{array} \qquad dt = -dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \int_{\pi/2}^{0} \sin^n t\,(-dt) = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

が成り立つことがわかる．これらの積分値は憶えておくと便利なことも多い．

例題 4.13. $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $I_n = \displaystyle\int \tan^n x\,dx$ とおくとき

$$I_{n+2} = \frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x - I_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

が成り立つことを示せ．

（解答） 0 以上の整数 n に対して

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int \tan^n x \tan^2 x\,dx = \int \tan^n x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \\ &= \int \{\tan^n x (\tan x)' - \tan^n x\}\,dx = \frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x - I_n \end{aligned}$$

（解答終）

例題 4.14. $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $I_n = \displaystyle\int (\log x)^n\,dx$ とおくとき

$$I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が成り立つことを示せ．

（解答） $(\log x)^n = (x)' \cdot (\log x)^n$ とすれば

$$I_n = x(\log x)^n - \int x \cdot n(\log x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx = x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1}\,dx = x(\log x)^n - nI_{n-1}$$

（解答終）

$\tan^n x$ は特別であるが，基本的には部分積分により積分漸化式が得られることが多い．

次節でよく使う積分漸化式も説明しておく．

例題 4.15. $a \fallingdotseq 0$ とする．自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx$ とおくとき

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left\{\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が成り立つことを示せ．

（解答） 部分積分により

$$\begin{aligned}
I_{n+1} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx &= \frac{1}{a^2}\left\{I_n - \int x \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{a^2}\,I_n + \frac{1}{2na^2}\int x\left\{\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right\}'\,dx \\
&= \frac{1}{a^2}\,I_n + \frac{1}{2na^2}\left\{\frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{2na^2}\left\{\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right\}
\end{aligned}$$

（解答終）

例えば $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$ を計算するには

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

とおけば，例題 4.15 より

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left\{\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)I_n\right\} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\,I_n$$

が成り立つ．よって，I_3 まで順番に求めれば，C_1 と C_2 も積分定数として

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \mathrm{Tan}^{-1}\,x + C_1 \\
I_2 &= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\,I_1 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x + C_2 \\
I_3 &= \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\,I_2 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x + C
\end{aligned}$$

となる．

5 有理関数の積分

一般に関数が与えられたときにその不定積分を求めることは難しい．しかし，次に定義する有理関数については,（理論上は）すべて不定積分が計算できることが知られている．ここではその積分手法、および有理関数の積分に帰着できるパターンについても後半で解説する．

5.1 有理関数の定義

定義 5.1. （有理関数）

実数係数の多項式 $p(x)$ と $q(x)$ を用いて

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

の形に表せる関数 $f(x)$ を**有理関数**という．有理型関数ということもある．

例 5.2. 次の関数

$$x^2+1, \qquad \frac{1}{x}, \qquad \frac{x+1}{3x^3+2}, \qquad \frac{\sqrt{5}\,x^2+\pi}{ex}, \qquad x^3+7x-\frac{3x}{x^2+4x+3}$$

などは有理関数であり，また

$$\sqrt{x}, \qquad \frac{\sin x}{x^2+1}, \qquad \frac{\sqrt[3]{x^2-2}+4}{5x}, \qquad \frac{\log x}{x}, \qquad x^2e^x$$

などは有理関数ではない．

注意 5.3. 中学や高校の数学において，x や x^2 を単項式と呼んで多項式と区別すると習うことがあるが，これらも含めて多項式と呼ぶのが普通である．つまり，実数係数の多項式とは 0 以上の整数 n を用いて

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_k \in \mathbb{R},\ 0 \leqq k \leqq n)$$

と表せるものである．特に

$$\begin{aligned}
&n=1,\ a_0=0,\ a_1=1 && \Longrightarrow && f(x)=x \\
&n=2,\ a_0=a_1=0,\ a_2=1 && \Longrightarrow && f(x)=x^2 \\
&n=4,\ a_0=a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=5, a_4=3 && \Longrightarrow && f(x)=1+x+5x^3+3x^4
\end{aligned}$$

のように，項が 1 つのものも多項式であり，項が 1 個か 2 個かを気にせず同じ形でまとめて議論できる．

5.2　有理関数の積分 1（基本編）

有理関数の積分 $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ において，もし

$$\big(p(x)\text{ の次数}\big) \geqq \big(q(x)\text{ の次数}\big)$$

ならば，まずは割り算をして**分母の次数が分子の次数より大きくなるように変形する**のが大原則である．あとは不定積分の公式を利用する．

例題 5.4.　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{3x^3+4x^2+9x+14}{x^2+3}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x^2+6x+1}{x^2-2x+3}\,dx$

（解答）　積分定数を C とする．

(1)　$\displaystyle\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2} = x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ であるから

$$\int \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2}\,dx = \int\left(x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\log|x|-\frac{1}{x}+C$$

(2)　$\displaystyle\frac{x^3}{x+1} = x^2-x+1-\frac{1}{x+1}$ であるから

$$\int \frac{x^3}{x+1}\,dx = \int\left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\log|x+1|+C$$

(3)　$\displaystyle\frac{3x^3+4x^2+9x+14}{x^2+3} = 3x+4+\frac{2}{x^2+3}$ であるから

$$\int \frac{3x^3+4x^2+9x+14}{x^2+3}\,dx = \int\left(3x+4+\frac{2}{x^2+3}\right)dx = \frac{3}{2}x^2+4x+\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$$

(4)　$\displaystyle\frac{2x^3-3x^2+6x+1}{x^2-2x+3} = 2x+1+\frac{2x-2}{x^2-2x+3}$ であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3-3x^2+6x+1}{x^2-2x+3}\,dx &= \int\left(2x+1+\frac{2x-2}{x^2-2x+3}\right)dx \\ &= x^2+x+\int\frac{(x^2-2x+3)'}{x^2-2x+3}\,dx \\ &= x^2+x+\log|x^2-2x+3|+C\end{aligned}$$

であり，$x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$ なので

$$\int \frac{2x^3-3x^2+6x+1}{x^2-2x+3}\,dx = x^2+x+\log(x^2-2x+3)+C$$

（解答終）

分子が定数で分母が実数係数で因数分解できない 2 次式の場合には，平方完成して

$$\int \frac{1}{(t+a)^2+b^2}\,dt = \frac{1}{b}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{t+a}{b} + C \qquad (b>0)$$

を用いれば計算できる．

分子が 1 次式で分母が実数係数で因数分解できない 2 次式の場合には，上の手法と

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$$

と組み合わせることにより積分が実行できる．

例題 5.5. 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2-2x+4}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,dx$

（解答） 積分定数を C とする．

(1) $x^2+4x+7=(x+2)^2+3>0$ であるから

$$\int \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C$$

(2) $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0$ であるから，$(x^2-2x+4)'=2x-2$ であることに着目し

$$\frac{2x+3}{x^2-2x+4} = \frac{(2x-2)+5}{x^2-2x+4} = \frac{2x-2}{x^2-2x+4} + \frac{5}{x^2-2x+4}$$

と変形すれば

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2-2x+4}\,dx &= \int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx + \int \frac{5}{x^2-2x+4}\,dx \\ &= \int \frac{(x^2-2x+4)'}{x^2-2x+4}\,dx + 5\int \frac{1}{(x-1)^2+3}\,dx \\ &= \log|x^2-2x+4| + 5\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \log(x^2-2x+4) + \frac{5}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

(3) $x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0$ であるから，$(x^2+2x+5)'=2x+2$ であることに着目し

$$\frac{x+3}{x^2+2x+5} = \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+2}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{2}{x^2+2x+5}$$

と変形すれば

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + \int \frac{2}{x^2+2x+5}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+5)'}{x^2+2x+5}\,dx + 2\int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log|x^2+2x+5| + 2\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x+1}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+5) + \mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x+1}{2} + C\end{aligned}$$

（解答終）

分母が実数係数で因数分解できない 2 次式のべき乗の場合には，例題 4.15 の漸化式を用いて不定積分を計算する．実際には例題 4.15 の漸化式を記憶するのは大変なので，その証明をなぞればよい．ただし，分母が 2 次式の 3 乗など指数が大きくなれば，漸化式を導いた方が早い．

例題 5.6. 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+9)^3}\,dx$

（解答） 積分定数を C とする．

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}\,dx = -\frac{1}{2(x^2+4)} + C$

(2) 例題 4.15 のように分子を変形すれば

$$\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{(x^2+4)-x^2}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx$$

とすれば，この第 2 項は

$$\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int x\left\{(x^2+4)^{-1}\right\}'\,dx = -\frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx - \frac{1}{4}\left\{-\frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx\right\}\\ &= \frac{1}{8}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx + \frac{x}{8(x^2+4)}\\ &= \frac{1}{16}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{2} + \frac{x}{8(x^2+4)} + C\end{aligned}$$

(3) 例題 4.15 より，$\displaystyle I_n = \int \frac{1}{(x^2+9)^n}\,dx$ とおけば

$$I_{n+1} = \frac{1}{18n}\left\{\frac{x}{(x^2+9)^n} + (2n-1)I_n\right\} = \frac{x}{18n(x^2+9)^n} + \frac{2n-1}{18n}\,I_n$$

が成り立つ．よって，漸化式から順番に求めれば，C_1 と C_2 も積分定数として

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{3} + C_1$$

$$I_2 = \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\,I_1 = \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{3} + C_2$$

$$I_3 = \frac{x}{36(x^2+9)^2} + \frac{1}{12}\,I_2 = \frac{x}{36(x^2+9)^2} + \frac{x}{216(x^2+9)} + \frac{1}{648}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{3} + C$$

より

$$\int \frac{1}{(x^2+9)^3}\,dx = \frac{x}{36(x^2+9)^2} + \frac{x}{216(x^2+9)} + \frac{1}{648}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{3} + C$$

（解答終）

5.3　有理関数の積分 2（部分分数分解）

例題 5.7.　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x+2)}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx$

（解答）　積分定数を C とする．

(1)　部分分数分解すれば

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \log|x| - \log|x+1| + C = \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

(2)　$\dfrac{x^2+x-1}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$ とおくと，両辺に $x(x+1)(x+2)$ をかけて

$$\begin{aligned} x^2+x-1 &= a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1) \\ &= (a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a \end{aligned}$$

となる．これが x についての恒等式になればよいので

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 3a+2b+c=1 \\ 2a=-1 \end{cases} \qquad \therefore\ a=-\frac{1}{2},\ b=1,\ c=\frac{1}{2}$$

よって，被積分関数は

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x+2)} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$$

と部分分数分解できるから

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x+2)}\,dx &= \int \left\{-\frac{1}{2x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}\right\} dx \\ &= -\frac{1}{2}\log|x| + \log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x+2| + C = \frac{1}{2}\log\frac{(x+1)^2|x+2|}{|x|} + C \end{aligned}$$

(3)　$\dfrac{1}{x^2(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x+1}$ とおくと，両辺に $x^2(x+1)$ をかけて

$$\begin{aligned} 1 &= ax(x+1) + b(x+1) + cx^2 \\ &= (a+c)x^2 + (a+b)x + b \end{aligned}$$

となる．これが x についての恒等式になればよいので

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ b=1 \end{cases} \qquad \therefore\ a=-1,\ b=1,\ c=1$$

よって，被積分関数は

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

と部分分数分解できるから

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= -\log|x| - \frac{1}{x} + \log|x+1| + C = \log\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

（解答終）

これまでの手法を組み合わせれば，どのような有理関数の積分も（理論上は）実行できる．

例題 5.8. 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3-x-4}{x^3-1}\,dx$ を求めよ．

（解答） まず割り算をすることにより

$$\frac{x^4+x^3-x-4}{x^3-1} = x+1-\frac{3}{x^3-1}$$

となる．ここで，分母は $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ と因数分解できるから

$$\frac{3}{x^3-1} = \frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

とおくと，両辺に $(x-1)(x^2+x+1)$ をかけて

$$\begin{aligned} 3 &= a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1) \\ &= (a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c \end{aligned}$$

これが恒等式となるから係数を比較して，$a=1,\ b=-1,\ c=-2$ である．よって

$$\frac{3}{x^3-1} = \frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}$$

と部分分数分解できるので

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+x^3-x-4}{x^3-1}\,dx &= \int \left(x+1-\frac{1}{x-1}+\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2}+x-\log|x-1|+\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx \end{aligned}$$

ここで，$(x^2+x+1)'=2x+1$ であるから，積分定数を C として

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+3}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx+\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx+\frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log|x^2+x+1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+x^3-x-4}{x^3-1}\,dx &= \frac{x^2}{2}+x-\log|x-1|+\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C \\ &= \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\log\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C \end{aligned}$$

（解答終）

例題 5.9. 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^6+1}{x^3+1}\,dx$ を求めよ．

（解答） まず割り算をすることにより

$$\frac{x^6+1}{x^3+1} = x^3 - 1 + \frac{2}{x^3+1}$$

となる．ここで，分母は $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ と因数分解できるから

$$\frac{2}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

とおくと，両辺に $(x+1)(x^2-x+1)$ をかけて

$$\begin{aligned} 2 &= a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1) \\ &= (a+b)x^2 + (-a+b+c)x + a + c \end{aligned}$$

これが恒等式となるから係数を比較して，$a=\dfrac{2}{3}$，$b=-\dfrac{2}{3}$，$c=\dfrac{4}{3}$ である．よって

$$\frac{2}{x^3+1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)$$

と部分分数分解できる．ゆえに

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6+1}{x^3+1}\,dx &= \int \left\{x^3 - 1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)\right\} dx \\ &= \frac{x^4}{4} - x + \frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{2}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}\,dx \end{aligned}$$

ここで，$(x^2-x+1)' = 2x-1$ であるから，積分定数を C として

$$\begin{aligned} \int \frac{-x+2}{x^2-x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{-(2x-1)+3}{x^2-x+1}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\log|\,x^2-x+1\,| + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + C \\ &= -\frac{1}{2}\log(x^2-x+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6+1}{x^3+1}\,dx &= \frac{x^4}{4} - x + \frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{2}{3}\left\{-\frac{1}{2}\log(x^2-x+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right\} + C \\ &= \frac{x^4}{4} - x + \frac{1}{3}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

（解答終）

5.4　三角関数に関する有理式の積分

$f(u,v)$ を u と v に関する有理関数（分母と分子がともに u と v の多項式）とするとき，次のように表される三角関数のみを含んだ有理関数の積分

$$\int f(\cos x, \sin x)\,dx$$

は次のように不定積分を計算できる．

命題 5.10.　$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

が成り立つ．

証明.　$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，三角関数の相互関係より

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{1+t^2}$$

である．よって，2 倍角の公式より

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\cdot\frac{1}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

であり，また $\sin\theta = \cos\theta\tan\theta$ より

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} = 2\cdot\frac{1}{1+t^2}\cdot t = \frac{2t}{1+t^2}$$

となる．さらに，$t = \tan\dfrac{x}{2}$ の両辺を微分すれば

$$dt = \frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,dx \qquad \therefore\ dx = 2\cos^2\frac{x}{2}\,dt = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

□

これは単位円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=t(x+1)$ の交点のうち $(-1,0)$ と異なる点の座標が $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ であることを利用した，単位円のパラメータ表示の 1 つである．

この命題 5.10 より，次が得られる．

命題 5.11.　$f(u,v)$ を u と v に関する有理関数とする．このとき，$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\int f(\cos x, \sin x)\,dx$$

は t に関する有理関数の積分で表すことができる．

この命題 5.11 により，三角関数のみを含んだ有理関数の積分は t に関する有理関数の積分に帰着できるので，前の節で述べた手法で不定積分が計算できる．ただし，場合によっては $t=\sin x$ や $t=\tan x$ とした方が簡単に計算できることもあるので注意すること．

例題 5.12. 次の不定積分や定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\cos x}{(1+\cos x)\sin x}\,dx$

（解答） 積分定数を C とする．

(1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ であるから

$$\frac{1}{2+\cos x}\,dx=\frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\frac{2}{3+t^2}\,dt$$

なので

$$\int\frac{1}{2+\cos x}\,dx=\int\frac{2}{3+t^2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ であるから

$$\frac{1}{1+\sin x}\,dx=\frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\frac{2}{(t+1)^2}\,dt$$

なので

$$\int\frac{1}{1+\sin x}\,dx=\int\frac{2}{(t+1)^2}\,dt=\frac{-2}{t+1}+C=\frac{-2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}+C$$

(3) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ であり

$$\begin{array}{c|ccc} x & \dfrac{\pi}{3} & \to & \dfrac{2\pi}{3} \\ \hline t & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \to & \sqrt{3} \end{array} \qquad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

さらに

$$\frac{\cos x}{(1+\cos x)\sin x}\,dx=\frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\left(\frac{1}{2t}-\frac{t}{2}\right)dt$$

なので

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{\cos x}{(1+\cos x)\sin x}\,dx=\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2t}-\frac{t}{2}\right)dt=\left[\frac{1}{2}\log|t|-\frac{t^2}{4}\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\log\sqrt{3}-\frac{2}{3}$$

（解答終）

$f(u)$ を有理関数とするとき，次のような

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx, \qquad \int f(\cos x)\sin x\,dx, \qquad \int f(\tan x)\,dx$$

の形の積分においては，それぞれ $t=\sin x$, $t=\cos x$, $t=\tan x$ とおけばよい．

例題 5.13. 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin^2 x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{1+\cos^2 x}\,dx$

（解答） 積分定数を C とする．

(1) $t=\sin x$ とおくと，$dt=\cos x\,dx$ であるから

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{t^2+2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{t}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

(2) $\displaystyle\frac{\cos x}{\cos x+\sin x} = \frac{1}{1+\tan x}$ より，$t=\tan x$ とおくと，$dx=\dfrac{1}{1+t^2}\,dt$ であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{(1+t)(1+t^2)}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1-t}{1+t^2}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\left\{\log|1+t|+\mathrm{Tan}^{-1}\,t-\frac{1}{2}\log(1+t^2)\right\}+C \\ &= \frac{1}{4}\log\frac{(1+t)^2}{1+t^2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,t+C\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{(1+t)^2}{1+t^2} = \frac{(1+\tan x)^2}{1+\tan^2 x} = \left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2\cos^2 x = (\cos x+\sin x)^2$$

であるから

$$\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx = \frac{1}{4}\log(\cos x+\sin x)^2+\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}(\tan x)+C = \frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+\frac{x}{2}+C$$

（ただし，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ でない場合には $\mathrm{Tan}^{-1}(\tan x)$ と x が π の整数倍ずれるため，区間ごとに積分定数をおき直した．）

(3) $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ より，$t=\tan x$ とおくと，$dx=\dfrac{1}{1+t^2}\,dt$ であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan x}{1+\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{t}{1+\dfrac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int\frac{t}{t^2+2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\log(t^2+2)+C = \frac{1}{2}\log(\tan^2 x+2)+C\end{aligned}$$

（解答終）

5.5　根号や累乗根を含む関数の積分

被積分関数が根号や累乗根を含む場合には，特定の置換積分を行うことにより有理関数の積分に帰着できることがある．

命題 5.14.　$f(u,v)$ を u と v に関する有理関数とする．

(1) $\displaystyle\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,dx \quad (a>0)$ は

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}\,x \quad \text{または} \quad t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}\,x$$

(2) $\displaystyle\int f\left(x, \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}\right)dx \quad (a \fallingdotseq 0)$ は

$$t = \sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$$

(3) $\displaystyle\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \quad (n \geqq 2,\ ad-bc \fallingdotseq 0)$ は

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

と置換積分すれば，t に関する有理関数の積分で表すことができる．

(3) の条件 $ad-bc \fallingdotseq 0$ は

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cx+d)}$$

とすれば，累乗根の中が定数でないということである．そのため，具体的な計算においては気にする必要はない．

根号を含む積分計算で一番簡単なものは初等関数の積分公式がそのまま使えるものである．

例題 5.15.　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(3-x)}}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$　(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-8}}\,dx$

（解答）　積分定数を C とする．

(1) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx = \int (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\,)\,dx = \frac{2}{3}\,(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\,x^{3/2} + C$$

(2) $$\int \frac{1}{\sqrt{x(3-x)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\dfrac{9}{4}-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2}}\,dx = \mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{x-\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3}{2}} + C = \mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{2x-3}{3} + C$$

(3) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \log(x+\sqrt{x^2+4}\,) + C$$

(4) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-8}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2-8}\right| + C$$

（解答終）

被積分関数の累乗根の中が x の 1 次式ならば，それをまとめて t とおけばよい．指数がずれている場合には工夫すれば積分が計算できることもある．

例題 5.16. 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+2)\sqrt{x+1}}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

（解答） 積分定数を C とする．

(1) $t=\sqrt{x+4}$ とおけば，$x=t^2-4$ であり，$dx=2t\,dt$ より

$$\frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx=\frac{1}{(t^2-4)t}\cdot 2t\,dt=\frac{2}{(t+2)(t-2)}\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt$$

なので

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{2}\log\frac{\left|\sqrt{x+4}-2\right|}{\sqrt{x+4}+2}+C$$

(2) $t=\sqrt{x+1}$ とおけば，$x=t^2-1$ であり，$dx=2t\,dt$ より

$$\frac{x}{(x+2)\sqrt{x+1}}\,dx=\frac{t^2-1}{(t^2+1)t}\cdot 2t\,dt=\left(2-\frac{4}{1+t^2}\right)dt$$

なので

$$\int\frac{x}{(x+2)\sqrt{x+1}}\,dx=\int\left(2-\frac{4}{1+t^2}\right)dt=2t-4\,\mathrm{Tan}^{-1}\,t+C=2\sqrt{x+1}-4\,\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x+1}+C$$

(3) $x>0$ なので $t=\sqrt[6]{x}$ とおけば，$x=t^6$ であり，$dx=6t^5\,dt$ より

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt&=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt\\&=2t^3-3t^2+6t-6\log|t+1|+C\\&=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\log(\sqrt[6]{x}+1)+C\end{aligned}$$

（解答終）

(1) では対数の中を有理化して

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C=\frac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{x+4}-2)^2}{|x|}+C$$

と答えてもよい．また，一般に根号や累乗根を含む関数の積分結果は，置換積分の方法が複数あるために見た目が異なるものがいくつか得られることが多い．これは不定積分の計算において定数差は積分定数に含まれているためである．実際には積分定数 C を適切におき直せば一致するから，ある程度整理されていればどれを答えとしてもよい．

例題 5.17.　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$

（解答）　積分定数を C とする．

(1)　$t=\sqrt{x^2+x-1}+x$ とおくと，$t-x=\sqrt{x^2+x-1}$ の両辺を 2 乗すれば

$$x=\frac{t^2+1}{2t+1},\qquad dx=\frac{2t^2+2t-2}{(2t+1)^2}\,dt,\qquad \sqrt{x^2+x-1}=t-x=\frac{t^2+t-1}{2t+1}$$

であるから

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}}\,dx=\frac{1}{\dfrac{t^2+1}{2t+1}\cdot\dfrac{t^2+t-1}{2t+1}}\cdot\frac{2t^2+2t-2}{(2t+1)^2}\,dt=\frac{2}{t^2+1}\,dt$$

より

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}}\,dx=\int\frac{2}{t^2+1}\,dt=2\,\mathrm{Tan}^{-1}\,t+C=2\,\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{x^2+x-1}+x)+C$$

(2)　$2+x-x^2=(2-x)(1+x)>0$ より $-1<x<2$ である．そこで，$t=\sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}}$ とおくと

$$x=\frac{2-t^2}{1+t^2}=-1+\frac{3}{1+t^2},\qquad dx=-\frac{6t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

であるから

$$(x+1)\sqrt{2+x-x^2}=(x+1)^2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}=\left(\frac{3}{1+t^2}\right)^2t=\frac{9t}{(1+t^2)^2}$$

より

$$\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{2+x-x^2}}\,dx=\int\frac{(1+t^2)^2}{9t}\cdot\frac{-6t}{(1+t^2)^2}\,dt=-\frac{2}{3}\int dt=-\frac{2}{3}\,t+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}+C$$

(3)　$t=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ とおくと

$$x=\frac{t^2}{1+t^2}=1-\frac{1}{1+t^2},\qquad dx=\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

であるから

$$\frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx=\frac{1}{\dfrac{t^2}{1+t^2}+1}\cdot t\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt=\frac{2t^2}{(1+t^2)(1+2t^2)}\,dt$$

となる．また，t^2 を 1 つの文字と思って部分分数分解すれば

$$\frac{2t^2}{(1+t^2)(1+2t^2)}=\frac{2}{1+t^2}-\frac{2}{1+2t^2}=\frac{2}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+\dfrac{1}{2}}$$

なので

$$\int\frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx=\int\left(\frac{2}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+\dfrac{1}{2}}\right)dt$$
$$=2\,\mathrm{Tan}^{-1}\,t-\sqrt{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}\,t)+C=2\,\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-x}}-\sqrt{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{2x}{1-x}}+C$$

（解答終）

個々の場合に応じて置換を工夫すれば，前述の方法よりも簡単に不定積分を求められることもある．

例題 5.18.　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+3)^5}}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx$

（解答）　積分定数を C とする．

(1)　$2-x^2>0$ より $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ なので，$x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおく．このとき

$$dx=\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

なので，$\cos\theta>0$ より

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx=\int \frac{2\sin^2\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta=\int 2\sin^2\theta\,d\theta=\int (1-\cos 2\theta)\,d\theta=\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta+C$$

となる．ここで

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}=x\sqrt{2-x^2}$$

であるから，求める不定積分は

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2}+C$$

(2)　$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおけば

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

なので，$\cos\theta>0$ より

$$\frac{1}{\sqrt{(x^2+3)^5}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{(3\tan^2\theta+3)^5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta=\sqrt{\left(\frac{\cos^2\theta}{3}\right)^5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta=\frac{\cos^3\theta}{9}\,d\theta$$

であるから

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+3)^5}}\,dx=\int \frac{\cos^3\theta}{9}\,d\theta=\int \frac{(1-\sin^2\theta)\cos\theta}{9}\,d\theta=\frac{\sin\theta}{9}-\frac{\sin^3\theta}{27}+C$$

となる．ここで

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

なので，求める不定積分は

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+3)^5}}\,dx=\frac{x}{9\sqrt{x^2+3}}-\frac{x^3}{27\sqrt{(x^2+3)^3}}+C$$

(3)　$I=\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ とおくと，部分積分すれば

$$\begin{aligned}I&=x\sqrt{x^2+1}-\int x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx=x\sqrt{x^2+1}-\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\\&=x\sqrt{x^2+1}-\int \left(\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx\\&=x\sqrt{x^2+1}-I+\log(x+\sqrt{x^2+1})\end{aligned}$$

となる．よって，求める不定積分は

$$I=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\right\}+C$$

（解答終）

6 広義積分

6.1 広義積分の定義

これまでは有界閉区間における有界な関数の積分を考えてきた．しかし，それだけでは次のような積分は扱うことができない．

$$\int_0^1 \log x\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

なぜならば，$\lim_{x\to+0}\log x = -\infty$ のように関数が有界でなかったり，積分区間が $[1,\infty)$ と有界でないからである．また，気にせずにこれまでと同じように計算して

$$\int_0^1 \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_0^1 \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^\infty$$

としてみても，左側では $x=0$ で $\log x$ が定義されないから $x=0$ を代入できないし，右側でも ∞ は数ではないからやはり代入することができない．そこでこのような場合には

$$\int_0^1 \log x\,dx = \lim_{t\to+0}\Big[x\log x - x\Big]_t^1 \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^t$$

のように，とりあえず t を代入してからその t について極限を考えることにより値を定めることにする．このように積分の概念を拡張したものを**広義積分**という．

もちろん，前の節までに扱っていた有界閉区間上の有界な関数の定積分においては，わざわざ上のように広義積分を考える必要はない．

定義 6.1. （広義積分）

a, b は実数とする．

(1) 関数 $f(x)$ は $[a,b)$ において不定積分をもつとき，次のように表す．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\,dx \tag{6.1}$$

(2) 関数 $f(x)$ は $(a,b]$ において不定積分をもつとき，次のように表す．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)\,dx \tag{6.2}$$

(3) 関数 $f(x)$ は $[a,\infty)$ において不定積分をもつとき，次のように表す．

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx \tag{6.3}$$

(4) 関数 $f(x)$ は $(-\infty,b]$ において不定積分をもつとき，次のように表す．

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx \tag{6.4}$$

これらを**広義積分**という．右辺の極限値が存在する場合に広義積分は**収束**するといい，そうでないときに**発散**するという．

これらが組み合わさっている場合，例えば

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

のような (6.3) と (6.4) の両方のときには，積分区間を分けて考えることにする．詳しくは 6.3 節で扱う．

6.2　広義積分の計算例

例題 6.2.　次の広義積分の収束・発散を調べ，収束するものはその値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

（解答）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$ なので，(6.2) のタイプである．$t>0$ とすると

$$\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\Big[2\sqrt{x}\Big]_t^1=2-2\sqrt{t}$$

となる．ここで，$\displaystyle\lim_{t\to+0}\big(2-2\sqrt{t}\big)=2$ となるから，広義積分は収束し

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{t\to+0}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{t\to+0}\Big(2-2\sqrt{t}\Big)=2$$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty$ なので，(6.2) のタイプである．$t>0$ とすると

$$\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx=\Big[\log|x|\Big]_t^1=-\log t$$

となる．ここで，$\displaystyle\lim_{t\to+0}(-\log t)=\infty$ となるから，広義積分は発散する．

(3)　(6.3) のタイプである．$t>1$ とすると

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx=\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^t=-\frac{1}{t}+1$$

となる．ここで，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\Big(-\frac{1}{t}+1\Big)=1$ となるから，広義積分は収束し

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{t\to\infty}\Big(-\frac{1}{t}+1\Big)=1$$

(4)　(6.3) のタイプである．$t>1$ とすると

$$\int_1^t \frac{1}{x}\,dx=\Big[\log|x|\Big]_1^t=\log t$$

となる．ここで，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\log t=\infty$ となるから，広義積分は発散する．

（解答終）

上の例題の (3) と (4) より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

であるが，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ は収束し，$\displaystyle\int_1^t \frac{1}{x}\,dx$ は発散する．よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ だからといって，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が収束するとは限らないことがわかる．この収束・発散を決定するのは $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ というだけでなく，$f(x)$ の $x\to\infty$ における 0 への収束の速さである．この考察は次節で重要となる．

被積分関数が発散する場合には，その特異性を避けるために積分区間を設定して定積分を計算してから極限をとる．積分範囲が非有界な場合には，まずは有限の t まで定積分を計算してから極限をとる．このように，どのようなタイプの広義積分でも「定積分の計算→極限計算」というプロセスとなる．

例題 6.3. 次の広義積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$

（解答）

(1) (6.3) のタイプである．$t>0$ とすると

$$\int_0^t xe^{-x}\,dx = \Big[x\cdot(-e^{-x})\Big]_0^t + \int_0^t e^{-x}\,dx = -te^{-t} + \Big[-e^{-x}\Big]_0^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1$$

となる．ここで，第 5 章命題 6.34 より

$$\lim_{t\to\infty} te^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

であるから

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}(-te^{-t} - e^{-t} + 1) = 1$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x = -\infty$ なので，(6.2) のタイプである．$t>0$ とすると

$$\int_t^1 \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_t^1 = -1 - t\log t + t$$

となる．ここで，第 5 章命題 6.35 より

$$\lim_{t\to+0} t\log t = 0$$

であるから

$$\int_0^1 \log x\,dx = \lim_{t\to+0}\int_t^1 \log x\,dx = \lim_{t\to+0}(-1 - t\log t + t) = -1$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$ なので，(6.1) のタイプである．$0<t<1$ とすると

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big[\mathrm{Sin}^{-1}\,x\Big]_0^t = \mathrm{Sin}^{-1}\,t - \mathrm{Sin}^{-1}\,0 = \mathrm{Sin}^{-1}\,t$$

となる．よって

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to1-0}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to1-0}\mathrm{Sin}^{-1}\,t = \frac{\pi}{2}$$

(4) (6.3) のタイプである．$t>0$ とすると

$$\int_0^t \frac{1}{x^2+4}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{t}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}\,0\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{t}{2}$$

となる．よって

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{x^2+4}\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

（解答終）

例題 6.4. 次の広義積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+2)}\,dx$

（解答）

(1) $t>0$ とすると

$$\int_0^t xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}\,e^{-x^2}\right]_0^t = \frac{1}{2}\left(1-e^{-t^2}\right)$$

となる．よって

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-e^{-t^2}\right) = \frac{1}{2}$$

(2) $t>e$ とすると

$$\int_e^t \frac{\log x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\,\log x\right]_e^t + \int_e^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{t}\,\log t + \frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_e^t = -\frac{\log t}{t} - \frac{1}{t} + \frac{2}{e}$$

となる．ここで，第 5 章命題 6.34 より

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t} = 0$$

であるから

$$\int_e^{\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_e^t \frac{\log x}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\log t}{t} - \frac{1}{t} + \frac{2}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

(3) $0<t<1$ とすると

$$\int_0^t \frac{x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[-\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x\right]_0^t + \int_0^t \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{Sin}^{-1}\,t + t$$

となる．よって

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to 1-0}\int_0^t \frac{x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to 1-0}(-\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{Sin}^{-1}\,t + t) = 1$$

(4) $t>1$ とすると

$$\int_1^t \frac{1}{x(x+2)}\,dx = \int_1^t \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{x}{x+2}\right|\right]_1^t = \frac{1}{2}\log\frac{t}{t+2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{3}$$

となる．よって

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+2)}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x(x+2)}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{1+\dfrac{2}{t}} + \frac{1}{2}\log 3\right) = \frac{1}{2}\log 3$$

（解答終）

広義積分の計算は定積分の計算の後に極限計算をすればよいので，有理関数の広義積分については定積分と同様に部分分数分解をすればよい．

例題 6.5.　次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

（解答）　部分分数分解のために

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

とおく．この両辺に $(x+1)(x^2+1)$ をかけると

$$\begin{aligned} 1 &= a(x^2+1) + (bx+c)(x+1) \\ &= (a+b)x^2 + (b+c)x + a + c \end{aligned}$$

が得られる．これが x についての恒等式になればよいので，係数比較して

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ a+c=1 \end{cases} \qquad\qquad \therefore\ a=\frac{1}{2},\quad b=-\frac{1}{2},\quad c=\frac{1}{2}$$

であるから，被積分関数は

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)$$

と部分分数分解できる．

よって，$t>0$ とすると

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\log|x+1| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \mathrm{Tan}^{-1}\,x\right]_0^t \\ &= \frac{1}{4}\log\frac{(t+1)^2}{t^2+1} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,t \end{aligned}$$

である．したがって

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{4}\log\frac{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^2}{1+\dfrac{1}{t^2}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,t\right\} = \frac{1}{4}\log 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

（解答終）

部分分数分解をした後に，積分の線形性のように

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int_0^\infty \frac{1}{x+1}\,dx - \int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

と広義積分を分けないこと．こうしてしまうと，第 1 項が $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x+1}\,dx = \infty$ と発散してしまうので正しく求められない．広義積分の計算過程は極限計算を含むので，広義積分が分けられるのは各項が収束して極限値をもつ場合に限られる．そのため，必ず解答のように積分区間を t までとして積分計算し，最後に一度にまとめて t についての極限をとること．

例題 6.6. 広義積分 $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{6x+24}{(x+1)^3(x^2+3)}\,dx$ の値を求めよ．

（解答） 部分分数分解のために

$$\frac{6x+24}{(x+1)^3(x^2+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{dx+e}{x^2+3}$$

とおくと，両辺に $(x+1)^3(x^2+3)$ をかけて

$$6x+24 = \{a(x+1)^2 + b(x+1) + c\}(x^2+3) + (dx+e)(x+1)^3$$

となる．この両辺に $x=-1$ を代入すれば，$18=4c$ より $c=\dfrac{9}{2}$ となる．また，$x=\sqrt{3}\,i$ を代入すれば

$$24+6\,i = (e+d\sqrt{3}\,i)(1+\sqrt{3}\,i)^3 = -8(e+d\sqrt{3}\,i) \qquad \therefore\ d=-\frac{3}{4},\ e=-3$$

となる．さらに，両辺の x^4 の係数を比較すれば $0=a+d$ より，$a=-d=\dfrac{3}{4}$ である．また，両辺を微分してから $x=-1$ を代入すれば，$4b-2c=6$ より $b=\dfrac{15}{4}$ となる．よって，被積分関数は

$$\frac{6x+24}{(x+1)^3(x^2+3)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{x}{x^2+3} - \frac{3}{x^2+3}$$

と部分分数分解できる．

よって，$t>3$ とすると

$$\begin{aligned}
\int_3^t \frac{6x+24}{(x+1)^3(x^2+3)}\,dx &= \int_3^t \left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{x}{x^2+3} - \frac{3}{x^2+3}\right\}dx \\
&= \left[\frac{3}{4}\log(x+1) - \frac{15}{4(x+1)} - \frac{9}{4(x+1)^2} - \frac{3}{8}\log(x^2+3) - \frac{3}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_3^t \\
&= \left[\frac{3}{8}\log\frac{(x+1)^2}{x^2+3} - \frac{15}{4(x+1)} - \frac{9}{4(x+1)^2} - \sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_3^t \\
&= \frac{3}{8}\log\frac{(t+1)^2}{t^2+3} - \frac{15}{4(t+1)} - \frac{9}{4(t+1)^2} - \sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{3}{8}\log\frac{4}{3} + \frac{69}{64} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\int_3^{\infty} \frac{6x+24}{(x+1)^3(x^2+3)}\,dx \\
&\quad= \lim_{t\to\infty}\left\{\frac{3}{8}\log\frac{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^2}{1+\dfrac{3}{t^2}} - \frac{15}{4(t+1)} - \frac{9}{4(t+1)^2} - \sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{3}{8}\log\frac{4}{3} + \frac{69}{64} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right\} \\
&\quad= \frac{3}{8}\log 1 - \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{8}\log\frac{4}{3} + \frac{69}{64} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \\
&\quad= -\frac{3}{8}\log\frac{4}{3} + \frac{69}{64} - \frac{\sqrt{3}}{6}\,\pi
\end{aligned}$$

（解答終）

有理関数の積分において部分分数分解は主題ではないので，複雑な場合には数値代入法で簡単に求めてもよい．ただし，可能であれば検算をしておいた方がよい．部分分数分解が誤りだと，それ以降の積分計算がもちろん正しくできないからである．

6.3　広義積分に関する注意

広義積分の形によっては,『被積分関数が積分区間内で発散する』と『積分区間が非有界である』の組み合わせとなることもある．その場合には必ず 1 つの積分に 1 つの特異性となるように積分区間を分割して，それぞれの項において収束や発散を調べなければならない．すべての項が収束すれば元の広義積分は収束し，1 つの項でも発散すれば元の広義積分は発散となる．

例えば，広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2+\sin x}{x^4+1}\,dx$$

は,『積分区間が正に非有界』と『積分区間が負に非有界』の 2 個の特異性を含んでいる．そこで，積分区間を分割して

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2+\sin x}{x^4+1}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{2+\sin x}{x^4+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{2+\sin x}{x^4+1}\,dx \\ &= \lim_{s\to-\infty}\int_{s}^{0} \frac{2+\sin x}{x^4+1}\,dx + \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} \frac{2+\sin x}{x^4+1}\,dx\end{aligned}$$

と考えなければならない．$x=0$ で分割したことに深い意味はなく，$x=1$ でも $x=2$ でもどこでもよい．1 つの項に 1 つだけの特異性（第 1 項は積分区間が負に非有界，第 2 項は積分区間が正に非有界）となるようにすることが大事である．

広義積分

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx$$

については,『被積分関数が $x\to+0$ で発散』と『積分区間が正に非有界』の 2 個の特異性を含んでいるので，積分区間を分割して

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx &= \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx \\ &= \lim_{s\to+0}\int_{s}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx + \lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx\end{aligned}$$

としなければならない．今回も $x=1$ で分割したことには深い意味はない．

広義積分

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

については,『被積分関数が $x\to-1+0$ で発散』と『被積分関数が $x\to1-0$ で発散』の 2 個の特異性を含んでいるので，積分区間を分割して

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= \lim_{s\to-1+0}\int_{s}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \lim_{t\to1-0}\int_{0}^{t} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\end{aligned}$$

としなければならない．今回も $x=0$ で分割したことには深い意味はない．

いずれにしても，広義積分の特異性を分割し，それぞれの項で分けて考える必要があるので注意すること．

練習として次の例題を考えてみよう．

例題 6.7.　次の広義積分の収束・発散を調べよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

特異性を分割するという広義積分の原則に従わないと，次に挙げる解答例のように間違えやすい．

- （よくある誤答例 1）

  被積分関数 $\dfrac{x}{x^2+1}$ は奇関数だから，積分区間の対称性より

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = 0$$

- （よくある誤答例 2）

  広義積分を

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

  とすれば，$\dfrac{x}{x^2+1}$ は奇関数だから $t>0$ に対して

  $$\int_{-t}^{t} \frac{x}{x^2+1}\,dx = 0$$

  なので

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} \frac{x}{x^2+1}\,dx = 0$$

誤答例 2 は一見正しく議論しているようだが，2 つの特異性を同時に 1 つの極限で扱っているため，広義積分の原則に従っていない．例題の正しい解答は次のようになる．

（解答）　積分区間は正にも負にも非有界であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

と積分範囲を分割する．このとき，第 2 項は $t>0$ に対して

$$\int_{0}^{t} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^t = \frac{1}{2}\log(t^2+1)$$

より

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\log(t^2+1) = \infty$$

となって発散する．したがって，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ は発散する．

（解答終）

このように特異性を分割してから，各項が収束するか発散するかを個別に調べなければならない．上で挙げた誤答例のような「奇関数だから収束して積分値は 0」という議論は，広義積分においてはできないので注意すること．

積分区間が実数全体の場合には次のようになる．

例題 6.8.　次の広義積分の収束・発散を調べよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

（解答）　積分区間が正にも負にも非有界であるから，積分区間を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

と分けると，第 1 項は例題 6.3(4) より収束して，その値は $\frac{\pi}{4}$ である．第 2 項は $t<0$ として

$$\int_{t}^{0} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{2}\right]_{t}^{0} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{t}{2} \quad\longrightarrow\quad -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad (t\to-\infty)$$

となるから収束する．よって，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$ は収束する．値も求めておけば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

（解答終）

例題 6.9.　次の広義積分の収束・発散を調べよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx$$

（解答）　積分区間が正にも負にも非有界であるから，積分区間を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^4+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx$$

と分割する．第 2 項は $t>0$ として，$y=x^2$ とおけば

$$\int_{0}^{t} \frac{x}{x^4+1}\,dx = \int_{0}^{t^2} \frac{1}{2(y^2+1)}\,dy = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,y\right]_{0}^{t^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}(t^2) \quad\longrightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \qquad (t\to\infty)$$

と収束する．第 1 項は $s<0$ として

$$\int_{s}^{0} \frac{x}{x^4+1}\,dx = -\int_{0}^{s} \frac{x}{x^4+1}\,dx = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}(s^2) \quad\longrightarrow\quad -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \qquad (s\to-\infty)$$

と収束する．よって，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx$ は収束する．値も求めておけば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^4+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = 0$$

（解答終）

同様に，広義積分が収束する場合には，偶関数や奇関数について

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx = 0$$

のように，普段通りの計算結果と一致することがわかる．

積分区間の端点ではなく内部に被積分関数が発散する点がある場合には，その点で積分区間を分割して，それぞれの項において収束や発散を調べなければならない．すべての項が収束すれば元の広義積分は収束し，1 つの項でも発散すれば元の広義積分は発散となる．

例題 6.10.　次の広義積分の収束・発散を調べよ．

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

特異性を分割するという広義積分の原則に従わないと，次に挙げる解答例のように間違えやすい．

- （よくある誤答例 1）
  被積分関数 $\dfrac{1}{x}$ は奇関数だから，積分区間の対称性より
  $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = 0$$
- （よくある誤答例 2）
  $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_{-1}^{1} = \log 1 - \log 1 = 0$$
- （よくある誤答例 3）
  広義積分を
  $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+0}\left(\int_{-1}^{-t} \frac{1}{x}\,dx + \int_{t}^{1} \frac{1}{x}\,dx\right)$$
  とすれば，$\dfrac{1}{x}$ は奇関数だから $t>0$ に対して
  $$\int_{-1}^{-t} \frac{1}{x}\,dx + \int_{t}^{1} \frac{1}{x}\,dx = 0$$
  なので
  $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+0}\left(\int_{-1}^{-t} \frac{1}{x}\,dx + \int_{t}^{1} \frac{1}{x}\,dx\right) = 0$$

誤答例 2 は広義積分として計算していない．**被積分関数が発散する場合には微分積分学の基本定理が使えないので注意すること．** 誤答例 3 は2 つの特異性を同時に 1 つの極限で扱っているため，広義積分の原則に従っていない．例題の正しい解答は次のようになる．

（解答）　$\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = \infty,\ \lim_{x\to-0} \frac{1}{x} = -\infty$ であるから，積分区間を

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

と分けると，広義積分 $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ は発散するから，広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ も発散する．

（解答終）

やはり特異性を分割してから，各項が収束するか発散するかを個別に調べなければならない．「奇関数だから収束して積分値は 0」という議論はこの場合でも行えないので注意すること．広義積分の原則に従えば

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{s\to-0}\int_{-1}^{s} \frac{1}{x}\,dx + \lim_{t\to+0}\int_{t}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

となるから，この両方ともが収束しなければ広義積分は収束しない．

被積分関数が不連続な場合でも，有界な関数の有界閉区間上の積分ならば定積分であって広義積分ではない．

例題 6.11. $[x]$ を x を超えない最大の整数とするとき，次の積分値を求めよ．

$$\int_0^2 [x]\,dx$$

（解答） $0 \leqq x \leqq 1$ において，1 点 $x=1$ を除いて $[x]=0$ であるから

$$\int_0^1 [x]\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

である．また，$1 \leqq x \leqq 2$ において，1 点 $x=2$ を除いて $[x]=1$ であるから

$$\int_1^2 [x]\,dx = \int_1^2 1\,dx = 1$$

となる．よって

$$\int_0^2 [x]\,dx = \int_0^1 [x]\,dx + \int_1^2 [x]\,dx = 0+1=1$$

（解答終）

被積分関数が連続でない場合でも，有界ならば積分区間を分割して定積分を計算すればよい．（計算結果は同じにはなるが）無理に極限を持ち出して議論を複雑にする必要はない．

また，途中でも述べた注意だが，重要なものなので繰り返しておく．

注意 6.12. 関数 $f(x)$ が $[a,\infty)$ 上で連続で $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ でも，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が収束するとは限らない．

被積分関数が $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ をみたせば，直感的には $y=f(x)$ のグラフと x 軸で挟まれる図形が限りなく細くなっていくので，その “面積” も収束して有限値となりそうである．しかし，実際にはそうなるとは限らない．そのような $f(x)$ の例はここまでに何度か現れているので確かめてみること．後で考察するように，単に $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ というだけでなく，その $x\to\infty$ での無限小の位数が広義積分の収束・発散と密接に結びついている．

少し難しい話ではあるが注意しておくと，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が収束しても $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ とは限らない．極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ が振動して存在しない例も知られているからである．つまり，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が収束することと $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ となることは，（関数 $f(x)$ が連続だとしても）必要条件でも十分条件でもない．しかし，多くの場合は $f(x)$ の $x\to\infty$ での無限小の位数など，$x\to\infty$ における被積分関数の挙動を調べることで広義積分の収束や発散を議論することができる．

6.4 原則に沿った広義積分の置換積分

広義積分はまず特異性を避けて定積分を計算し，積分区間の端点について極限をとるのが原則である．もちろん，定積分の計算の際には，置換積分のアイデアを利用することができる．

例題 6.13. 次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}\,dx$$

（解答） $t>0$ とし

$$\int_0^t \frac{1}{e^x+1}\,dx$$

において $u=e^x$ と置換すると，$\alpha=e^t$ とおけば

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & t \\ \hline u & 1 & \to & \alpha \end{array} \qquad du = e^x\,dx = u\,dx \qquad \therefore\ dx = \frac{du}{u}$$

である．よって

$$\int_0^t \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int_1^\alpha \frac{1}{u(u+1)}\,du = \int_1^\alpha \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du = \left[\log\left|\frac{u}{u+1}\right|\right]_1^\alpha$$

$$= \log\frac{\alpha}{\alpha+1} - \log\frac{1}{2} = \log\frac{2\alpha}{\alpha+1}$$

となる．ゆえに，$t\to\infty$ のとき $\alpha=e^t\to\infty$ より

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{e^x+1}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty}\log\frac{2}{1+\dfrac{1}{\alpha}} = \log 2$$

（解答終）

簡単な問題ならば，置換積分を用いて先に不定積分を計算するのもよい．例えば上の例題では，$u=e^x$ とおけば

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{u(u+1)}\,du = \int \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du = \log\left|\frac{u}{u+1}\right| + C = \log\frac{e^x}{e^x+1} + C$$

より，$t>0$ として

$$\int_0^t \frac{1}{e^x+1}\,dx = \left[\log\frac{e^x}{e^x+1}\right]_0^t = \log\frac{e^t}{e^t+1} - \log\frac{1}{2} = \log\frac{2}{1+e^{-t}}$$

なので

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{e^x+1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\log\frac{2}{1+e^{-t}} = \log 2$$

と計算することもできる．

ただし，いずれにしても正確な記述はやや面倒なものとなる．初学者はまずこのように正確に計算する練習をするのが重要だが，広義積分を様々な分野へ応用する際にはもっと簡便な計算ができた方がよい．そのような計算法については後の節で説明する．実際，**広義積分であることを気にせず置換してみると，**$u=e^x$ とおけば

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \infty \\ \hline u & 1 & \to & \infty \end{array} \qquad du = e^x\,dx = u\,dx \qquad \therefore\ dx = \frac{du}{u}$$

より

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{u(u+1)}\,du = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{u(u+1)}\,du = \cdots = \log 2$$

と同じ答えになっている．できればこのように計算できた方が，扱いやすく簡単である．

もし置換した後の定積分において特異性がなくなれば，先に極限をとって通常の定積分のように計算すればよい．実際，被積分関数が積分可能な区間上で，定理 3.13 より不定積分は連続だからである．

例題 6.14. 次の広義積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh x}\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \operatorname{Sin}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

（解答）

(1)　不定積分

$$\int \frac{1}{\cosh x}\,dx = \int \frac{2}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

において $u = e^x$ と置換すると，$du = e^x\,dx$ である．よって

$$\int \frac{1}{\cosh x}\,dx = \int \frac{2}{u^2+1}\,du = 2\operatorname{Tan}^{-1} u + C = 2\operatorname{Tan}^{-1}(e^x) + C$$

となる．ゆえに

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh x}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\cosh x}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{\cosh x}\,dx \\
&= \lim_{s\to-\infty} \int_s^0 \frac{1}{\cosh x}\,dx + \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{\cosh x}\,dx \\
&= \lim_{s\to-\infty} \Big[2\operatorname{Tan}^{-1}(e^x)\Big]_s^0 + \lim_{t\to\infty} \Big[2\operatorname{Tan}^{-1}(e^x)\Big]_0^t \\
&= \lim_{s\to-\infty} (-2\operatorname{Tan}^{-1}(e^s)) + \lim_{t\to\infty} 2\operatorname{Tan}^{-1}(e^t) = 0 + 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

(2)　$0 < t < 1$ とし

$$\int_0^t \frac{x \operatorname{Sin}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

において $u = \operatorname{Sin}^{-1} x$ と置換すると，$\alpha = \operatorname{Sin}^{-1} t$ とおけば

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & t \\ \hline u & 0 & \to & \alpha \end{array} \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

である．よって，$x = \sin u$ と合わせて

$$\int_0^t \frac{x \operatorname{Sin}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\alpha} u \sin u\,du$$

となる．ゆえに，$t \to \infty$ とすれば，$\alpha = \operatorname{Sin}^{-1} t \to \frac{\pi}{2}$ なので

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{Sin}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} u \sin u\,du = \Big[-u\cos u + \sin u\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

（解答終）

この例題も形式的には，$u = e^x$ と置換すると

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & \to & \infty \\ \hline u & 0 & \to & \infty \end{array} \qquad du = e^x\,dx$$

より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{2}{u^2+1}\,du = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{2}{u^2+1}\,du = \cdots = \pi$$

と同じ結果となる．さらに，この方が置換積分後に $u = 0$ の部分に特異性がなく，より簡単な計算となっている．後で述べるように，普段は（広義積分の収束性を確認すれば）このように計算して問題はない．

6.5　広義積分の収束・発散の判定法 1：比較判定法

ここまでは不定積分の求まる関数に対しての広義積分について，その収束・発散を議論してきた．ただ，応用上は不定積分を具体的な形で求めることは難しいことが多い．例えば

$$\frac{1}{\log x}, \qquad \frac{e^x}{x}, \qquad \frac{\sin x}{x}, \qquad e^{-x^2}, \qquad \sin(x^2), \qquad \sqrt{1+x^3}$$

などはいずれも複雑な関数ではないが，不定積分を具体的に簡単な形で書くことはできないことが知られている．そこで，この節では不定積分が求められない場合に広義積分が収束するかどうか調べたいときの判定法を紹介する．

数列の極限や級数の場合を思い出すと，はさみうち法などのように既によくわかっているものと比較するのが有効であった．そこで，比較の際によく用いられる広義積分を先にまとめておく．

命題 6.15.　α を実数の定数とする．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ が収束するための必要十分条件は $\alpha > 1$ である．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ が収束するための必要十分条件は $\alpha < 1$ である．

証明.　$\alpha = 1$ のときだけ被積分関数の不定積分の形が異なるので，先に考えると

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big[\log|x|\Big]_1^t = \lim_{t\to\infty}\log t = \infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+0}\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+0}\Big[\log|x|\Big]_t^1 = \lim_{t\to+0}(-\log t) = \infty$$

となるから，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ と $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ は両方とも発散する．

次に $\alpha \fallingdotseq 1$ のときを考える．このとき，(1) は

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{-1}{1-\alpha} & (1-\alpha<0) \\ \infty & (1-\alpha>0) \end{cases}$$

となるので，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ が収束するのは $\alpha > 1$ のときである．(2) は

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to+0}\int_t^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to+0}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_t^1 = \lim_{t\to+0}\frac{1-t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty & (1-\alpha<0) \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & (1-\alpha>0) \end{cases}$$

となるので，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ が収束するのは $\alpha < 1$ のときである．　□

これより $\dfrac{1}{x^\alpha}$ の形の関数については広義積分が収束するための条件はわかった．この形の関数と極限の収束の速さを比較することにより，一般の関数の広義積分の収束・発散を議論する手法を次に説明する．

定理 6.16. （比較判定法）

関数 $f(x)$ と $g(x)$ はともに区間 $(a,b]$ において不定積分をもち，次の不等式が成り立つとする．

$$|f(x)| \leqq g(x) \qquad (a < x \leqq b)$$

このとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ が収束すれば，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ も収束する．

区間 $(a,b]$ を $[a,b)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ に置き換えた他のタイプの広義積分についても同様のことが成り立つ．

証明. 第 4 章定理 1.13（Cauchy の収束判定法）を利用する．$a < t < b$ のとき

$$F(t) = \int_t^b f(x)\,dx, \qquad G(t) = \int_t^b g(x)\,dx$$

とおくと，右極限 $\displaystyle\lim_{t\to a+0} G(t)$ は存在するから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$a < t_1 < a+\delta, \quad a < t_2 < a+\delta \quad \Longrightarrow \quad |\,G(t_1) - G(t_2)\,| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって，任意の $t_1, t_2 \in (a, a+\delta)$ に対して，$t_1 \leqq t_2$ とすると

$$|\,F(t_1) - F(t_2)\,| = \left|\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx\right| \leqq \int_{t_1}^{t_2} |f(x)|\,dx \leqq \int_{t_1}^{t_2} g(x)\,dx = G(t_1) - G(t_2) < \varepsilon$$

となる．$t_2 \leqq t_1$ でも同様なので，結局

$$a < t_1 < a+\delta, \quad a < t_2 < a+\delta \quad \Longrightarrow \quad |\,F(t_1) - F(t_2)\,| < \varepsilon$$

が成り立つから，Cauchy の収束判定法より右極限 $\displaystyle\lim_{t\to a+0} F(t)$ は存在する．したがって，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する．他の区間の場合にも証明は同様である．□

不定積分がわからない関数 $f(x)$ の広義積分が収束することを示すためには，この定理 6.16 の仮定をみたすような関数 $g(x)$ を 1 つ見つければよい．このような関数 $g(x)$ を**優関数**と呼ぶこともある．当然ながら，$g(x)$ については広義積分が収束することを直接示せるものでなければ意味がない．

なお，上の定理 6.16 は広義積分が収束するための十分条件であって必要条件ではないので注意すること．つまり，仮定をみたす関数 $g(x)$ が存在しなくても広義積分が収束することはある．

また，定理 6.16 の証明から次の事実がわかる．

定理 6.17. （広義積分の絶対収束）

関数 $f(x)$ は区間 $[a,\infty)$ において不定積分をもち，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ が収束するとする．このとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ も収束する．

区間 $(a,b]$ を $[a,b)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ に置き換えた他のタイプの広義積分についても同様のことが成り立つ．

実際，$g(x) = |f(x)|$ とおいて同様に考えれば証明が完了する．

区間が $[a,\infty)$ の場合に定理 6.16 の Cauchy の収束判定法を用いない証明法も挙げておく．

証明． まずは極限値

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t |f(x)|\,dx$$

が存在することを示す．$0 \leqq |f(x)| \leqq g(x)$ であるから，$\displaystyle\int_a^t |f(x)|\,dx$ と $\displaystyle\int_a^t g(x)\,dx$ は t についての関数として単調増加である．よって，任意の $t > a$ に対して

$$\int_a^t |f(x)|\,dx \leqq \int_a^t g(x)\,dx \leqq \int_a^\infty g(x)\,dx$$

が成り立つ．この右辺は $g(x)$ の広義積分可能性より有限値だから，$\displaystyle\int_a^t |f(x)|\,dx$ は上に有界である．

ゆえに，$\displaystyle\int_a^t |f(x)|\,dx$ は t について上に有界な単調増加関数なので，実数の連続性により $t\to\infty$ で収束する．したがって，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ は収束する．

次に，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が収束することを示すために

$$f_+(x) = \max\{f(x),\,0\} = \frac{|f(x)|+f(x)}{2}, \qquad f_-(x) = -\min\{f(x),\,0\} = \frac{|f(x)|-f(x)}{2}$$

とおく．このとき

$$0 \leqq f_+(x) \leqq |f(x)|, \qquad 0 \leqq f_-(x) \leqq |f(x)|$$

となるから，$\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ が収束することと前段と同様の議論により，$\displaystyle\int_a^\infty f_+(x)\,dx$ と $\displaystyle\int_a^\infty f_-(x)\,dx$ も収束する．一方，$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ と表せるから，$f(x)$ の広義積分も収束し

$$\int_a^\infty f_(x)\,dx = \int_a^\infty f_+(x)\,dx - \int_a^\infty f_-(x)\,dx$$

が成り立つ． □

定理 6.17 の逆である命題『広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が収束すれば，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ も収束する』は偽であることが知られている．そこで，次のように用語を定義する．

定義 6.18. （絶対収束・条件収束）

$f(x)$ は区間 I において不定積分をもつとする．I は $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ のいずれのタイプでもよい．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_I |f(x)|\,dx$ が収束するとき，広義積分 $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ は**絶対収束**するという．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_I |f(x)|\,dx$ は発散するが，$\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ が収束するとき，広義積分 $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ は**条件収束**するという．

用語の定義より，定理 6.16 が適用できた場合には広義積分は絶対収束していることになる．また，被積分関数 $f(x)$ が $f(x) \geqq 0$ をみたす場合には，絶対値をとっても意味がないので条件収束となることはない．つまり，条件収束となる可能性があるのは被積分関数の符号が積分区間内で変化する場合である．

例 6.19. 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx$ は絶対収束する．

（解答） $x \geqq 0$ のとき

$$\left|\frac{\sin x}{x^2+1}\right| \leqq \frac{1}{x^2+1}$$

が成り立つ．また，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$ は収束する．実際、$t>0$ として

$$\int_0^t \frac{1}{x^2+1}\,dx = \Big[\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\,\Big]_0^t = \mathrm{Tan}^{-1}\,t \quad \longrightarrow \quad \frac{\pi}{2} \qquad (t \to \infty)$$

である．よって，定理 6.16（比較判定法）より広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2+1}\right| dx$ は収束するから，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx$ は絶対収束する．

（解答終）

例 6.20. 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ は収束する．

（解答） 積分区間を

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$$

と分けると，第 1 項は定積分なので値が定まるから，第 2 項の広義積分が収束することを示せばよい．ここで

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} \qquad (x \geqq 1)$$

が成り立つ．また，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ は命題 6.15 において $\alpha = \dfrac{3}{2}$ としたものなので収束する．よって，定理 6.16（比較判定法）より広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ は収束するから，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ も収束する．

（解答終）

この例では $x>0$ ならば

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

が成り立つが，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ は発散してしまうので，これでは比較判定法が適用できない．そのためにうまく積分区間を分けて考える必要があることもある．また，上の 2 つの広義積分について収束することはわかったが，その具体的な積分値については上記の議論からはわからない．

例 6.21.　広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ は収束する．

（解答）　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x > 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

で定義すると，これは $[0, \infty)$ 上の連続関数となる．よって，積分区間を

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

と分ければ，第 1 項は通常の定積分と見なせるので，第 2 項の広義積分が収束することを示せばよい．そこで，$t > \dfrac{\pi}{2}$ として部分積分すれば

$$\int_{\pi/2}^t \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{\pi/2}^t - \int_{\pi/2}^t (-\cos x)\cdot\frac{-1}{x^2}\,dx = -\frac{\cos t}{t} - \int_{\pi/2}^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

となる．ここで

$$\left|\frac{\cos t}{t}\right| \leqq \frac{1}{t} \quad\longrightarrow\quad 0 \qquad (t \to \infty)$$

より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\cos t}{t} = 0$ である．また

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqq \frac{1}{x^2} \qquad \left(x \geqq \frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立ち，さらに広義積分 $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ は命題 6.15 において $\alpha = 2$ としたものなので収束する．よって，定理 6.16（比較判定法）より広義積分 $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ は収束するから，その値を A とおく．

以上の結果より

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\pi/2}^t \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\cos t}{t} - \int_{\pi/2}^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right) = -A$$

と極限が存在するから，広義積分 $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ は収束する．したがって，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ も収束する．

（解答終）

この広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ の値を求める方法はいくつか知られているが，どの方法も準備が必要なので後回しにする．結果だけ述べると

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

となることが知られている．これは複素関数論の知識を用いれば簡単に求めることができる．

例 6.22. 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ は発散する．

（解答） 自然数 k に対して，$(k-1)\pi \leqq x \leqq k\pi$ ならば

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geqq \frac{|\sin x|}{k\pi}$$

が成り立つ．また，$\sin x$ は区間 $[(k-1)\pi, k\pi]$ において常に 0 以上か 0 以下のどちらかなので

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|\,dx = \left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sin x\,dx\right| = \left|\Big[-\cos x\Big]_{(k-1)\pi}^{k\pi}\right| = \left|2(-1)^{k+1}\right| = 2$$

となる．よって，自然数 n に対して

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx > \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{k\pi}\,dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k\pi}$$

が成り立つ．

ここで

$$\frac{1}{x} \leqq \frac{1}{k} \qquad (k \leqq x \leqq k+1)$$

であるから，これを $[k, k+1]$ で積分すると

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx < \int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,dx = \frac{1}{k}$$

となるので，これを $k = 1, 2, \ldots, n$ について加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx = \log(n+1)$$

が得られる．ゆえに，これまでの結果を合わせると

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx > \frac{2}{\pi}\log(n+1)$$

が成り立つ．したがって，$n \to \infty$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \infty$$

となるから，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ は発散する．

（解答終）

ここまでの結果より，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ は条件収束していることがわかる．この結果より，関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ については広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ が収束するが，定理 6.16（比較判定法）の仮定をみたす関数 $g(x)$ が存在しないことがわかる．実際，もし $|f(x)| \leqq g(x)$ が成り立てば

$$\int_0^{\infty} g(x)\,dx \geqq \int_0^{\infty}|f(x)|\,dx = \infty$$

より，$g(x)$ の広義積分は発散してしまうからである．

例題 6.23.　次の広義積分の収束・発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^4}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos x}{x^4+1}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6+1}}\,dx$

（解答）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}=\infty$ である．また，$0<x\leqq 1$ において

$$\sqrt{x+x^2}>\sqrt{x}>0$$

だから

$$0<\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

が成り立つ．さらに，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ は収束するから，比較判定法より広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$ も収束する．

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{1-x^4}=\infty$ である．また，$0\leqq x<1$ において

$$0<1+x<2,\qquad 0<1+x^2<2$$

だから

$$\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{(1+x)(1-x)(1+x^2)}>\frac{1}{2\cdot(1-x)\cdot 2}=\frac{1}{4(1-x)}>0$$

が成り立つ．さらに，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4(1-x)}\,dx$ は発散するから，比較判定法より広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^4}\,dx$ も発散する．

(3)　積分区間を

$$\int_0^\infty \frac{x^2\cos x}{x^4+1}\,dx=\int_0^1 \frac{x^2\cos x}{x^4+1}\,dx+\int_1^\infty \frac{x^2\cos x}{x^4+1}\,dx$$

と分けると，第 1 項は定積分なので値が定まるから，第 2 項の広義積分の収束・発散を調べればよい．ここで，$x\geqq 1$ において

$$\left|\frac{x^2\cos x}{x^4+1}\right|\leqq\frac{x^2}{x^4+1}<\frac{x^2}{x^4}=\frac{1}{x^2}$$

が成り立つ．また，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ は収束するから，比較判定法より広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2\cos x}{x^4+1}\,dx$ も収束する．よって，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos x}{x^4+1}\,dx$ は収束する．

(4)　$x\geqq 1$ において

$$x^2+1>x^2,\qquad \sqrt{x^6+1}\leqq\sqrt{x^6+x^6}=\sqrt{2}\,x^3$$

だから

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^6+1}}>\frac{x^2}{\sqrt{2}\,x^3}=\frac{1}{\sqrt{2}\,x}>0$$

が成り立つ．さらに，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2}\,x}\,dx$ は発散するから，比較判定法より広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6+1}}\,dx$ も発散する．

（解答終）

慣れるまではどのように不等式を作るかが難しいとは思う．また，収束・発散の予想ができないと，どちら向きの不等式を作るべきかがわからない．そこで，次節以降はどのように予想すればよいかを込めて考察する．

6.6 広義積分の収束・発散の判定法 2：被積分関数が非有界の場合の関数の無限大の比較

広義積分の収束・発散の判定法として便利な比較判定法を説明したが，具体的な関数に対して応用する際には不等式を見出すのが難しいことも多い．ここではまず被積分関数が非有界な広義積分について説明する．同様のアイデアが積分区間が非有界な場合にも使えるので，それは次節で扱う．

まず基本的な広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ について観察してみると，これは $\alpha < 1$ なら収束するので，被積分関数が非有界となる点における無限大への発散の速さ（x の指数）が広義積分の収束・発散を決定している．つまり，広義積分はその定義から極限についての議論になるので，広義積分の特異性に関係する部分での被積分関数の挙動を調べることで，その収束・発散が判定できることが示唆されている．実際にそれが正しいことを示し，具体的な広義積分の収束・発散の判定に利用できるようになることがこの節の目的である．

そこで，a を実数とし，2 個の関数 $f(x)$ と $g(x)$ が

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

であるとする．このとき，$f(x)$ と $g(x)$ の "$x \to a$ のときの無限大への発散速度" を比較したい．そのためには比を考えるのが自然である．$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形の極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ であれば，分母の $g(x)$ の増加速度の方が分子の $f(x)$ の増加速度よりも段違いに速いので，不定形の $\dfrac{\infty}{\infty}$ は分母の方がはるかに大きく，無限大のレベルが分母と分子で異なっていると考えられる．
- $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 2$ であれば，$f(x)$ と $g(x)$ の増加速度が同じでバランスがとれているために，0 でない極限値が存在していると考えられる．

このアイデアを基にして次のように新しい用語を定義する．

定義 6.24. （無限大の比較）
a を実数とし，関数 $f(x)$ と $g(x)$ は $x \to a$ のときに正の無限大または負の無限大に発散するとする．

(1) 0 でない極限値

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \gamma \ (\neq 0)$$

が存在するとき，$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ は**同位の無限大**であるという．

(2) 極限値が

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

であるとき，$x \to a$ のとき $g(x)$ は $f(x)$ より**高位の無限大**，または $f(x)$ は $g(x)$ より**低位の無限大**であるという．

片側極限 $x \to a+0$ や $x \to a-0$ の場合にも同様に定義する．

これらはランダウの記号を用いて表すこともできる．ただし，ここでは無限大か無限小かを明示するために上記のように表すことにする．

また，$x \to \infty$ や $x \to -\infty$ の場合にも同様の概念を定義できる．これは数値計算の分野における計算速度のオーダーの記述など発散速度の記述として有用だが，広義積分の議論においては使わないのでここでは触れない．実際，関数 $f(x)$ が $[a,\infty)$ において不定積分をもち $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ のときには，明らかに広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = \infty$ であるから難しいことを考える必要がない．

例えば

$$f(x) = \frac{1}{x+x^2}, \qquad g(x) = \frac{x+2}{4x-x^3}$$

とおけば

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to+0} g(x) = \infty$$

である（各自確かめよ）．さらに

$$\lim_{x\to+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{4x-x^3}{(x+x^2)(x+2)} = \lim_{x\to+0} \frac{4-x^2}{(1+x)(x+2)} = 2$$

であるから，$x \to +0$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ は同位の無限大である．

関数の挙動を大雑把に見れば，$0 < x \ll 1$ であれば

$$f(x) = \frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \fallingdotseq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+0} = \frac{1}{x}$$

より，$f(x)$ は $x \to +0$ のときに $\dfrac{1}{x}$ の速さで無限大に発散している．同様に

$$g(x) = \frac{x+2}{x(4-x^2)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x+2}{4-x^2} \fallingdotseq \frac{1}{x} \cdot \frac{0+2}{4-0} = \frac{1}{2x}$$

より，$g(x)$ は $x \to +0$ のときに $\dfrac{1}{x}$ の（定数倍の）速さで無限大に発散している．

よって，$f(x)$ と $g(x)$ はともに $x \to +0$ のときに（定数倍の差はあるが）$\dfrac{1}{x}$ の速さで無限大に発散している．つまり，発散の様子は似ていると考えられる．このことを比の極限を調べることで正確に議論したものが，同位の無限大の定義および上の計算である．

別の例として，多項式の逆数である

$$f(x) = \frac{1}{x+x^5}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2+x^4}$$

を考えてみる．まず

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to+0} g(x) = \infty$$

である．さらに

$$\lim_{x\to+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{x^2+x^4}{x+x^5} = \lim_{x\to+0} \frac{x+x^3}{1+x^4} = 0$$

であるから，$x \to +0$ のとき $g(x)$ は $f(x)$ より高位の無限大である．このように，分母で一番次数が低い項の次数が重要であり，多項式の次数そのものは関係ない．実際，関数の挙動を大雑把に見れば，$0 < x \ll 1$ であれば

$$f(x) = \frac{1}{x(1+x^4)} \fallingdotseq \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2(1+x^2)} \fallingdotseq \frac{1}{x^2}$$

となっている．このように $f(x)$ や $g(x)$ の無限大への発散速度は分母の多項式が 0 に収束する速さが決定しており，さらにそれを決めるのは分母の最低次数の項だからである．関数の漸近展開を利用した不定形の極限でも，同様のアイデアに基づいて計算していたことを思い出してほしい．

$x \to 0$ の場合以外にも同様の考え方は有効であるが，次数の見方には注意を要する．例えば

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

については，比の極限を考えれば $x \to 1+0$ のとき $g(x)$ は $f(x)$ より高位の無限大であることがわかる．分母についてはどちらも定数項が一番次数が低いが，そうではなく $x \to 1+0$ のときは $x-1$ を 1 つのかたまりと見たときの次数が重要である．

定理 6.25. **（広義積分の収束・発散の判定法：被積分関数が非有界な場合）**
関数 $f(x)$ と $g(x)$ はともに区間 $(a, b]$ において不定積分をもち，$g(x) > 0$ とする．

(1) $x \to a+0$ で $f(x)$ と $g(x)$ が同位の無限大とするとき

- 広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ が収束するならば，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ も収束する．
- 広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ が発散するならば，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ も発散する．

(2) $x \to a+0$ で $f(x)$ は $g(x)$ より低位の無限大とするとき

- 広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ が収束するならば，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ も収束する．

(3) $x \to a+0$ で $f(x)$ は $g(x)$ より高位の無限大とするとき

- 広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ が発散するならば，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ も発散する．

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b)$ において不定積分をもつ場合の広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ についても，同様の主張が成り立つ．

証明． 簡単のために $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$ の場合を示す（$-\infty$ の場合は $f(x)$ の代わりに $-f(x)$ を考えればよい）．このとき，$x = a$ に十分近いところでは $f(x)$ は正である．

(1) $x \to a+0$ で $f(x)$ と $g(x)$ が同位の無限大なので，右極限値を

$$\gamma = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

とおくと，最初の仮定より $\gamma > 0$ である．そこで，$\varepsilon = \dfrac{\gamma}{2}$ とすれば，ある $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$a < x \leqq a + \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > 0, \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \gamma \right| < \frac{\gamma}{2}$$

が成り立つ．これを変形すれば

$$\frac{\gamma}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3\gamma}{2}$$

より

$$0 < \frac{\gamma}{2}\,g(x) < f(x) < \frac{3\gamma}{2}\,g(x) \qquad (a < x \leqq a + \delta)$$

となる．よって，比較判定法を用いれば

- 広義積分 $\displaystyle\int_a^{a+\delta} g(x)\,dx$ が収束するならば

$$0 < f(x) < \frac{3\gamma}{2}\,g(x) \qquad (a < x \leqq a + \delta)$$

と比較判定法より，広義積分 $\displaystyle\int_a^{a+\delta} f(x)\,dx$ も収束する．

- 広義積分 $\displaystyle\int_a^{a+\delta} g(x)\,dx$ が発散するならば，積分範囲で $g(x) > 0$ なので $\displaystyle\int_a^{a+\delta} g(x)\,dx = \infty$ である．さらに

$$\frac{\gamma}{2}\,g(x) < f(x) \qquad (a < x \leqq a + \delta)$$

より，$\displaystyle\int_a^{a+\delta} f(x)\,dx = \infty$ と広義積分は発散する．

ゆえに

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+\delta} f(x)\,dx + \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$$

とすれば，第 2 項は通常の定積分なので，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の収束・発散は第 1 項の収束・発散と一致するから定理の主張が成り立つ．

(2) $x \to a+0$ で $f(x)$ は $g(x)$ より低位の無限大なので，右極限値は

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

である．そこで，$\varepsilon = 1$ とすれば，ある $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して（最初の仮定と合わせて）

$$a < x \leqq a+\delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > 0, \qquad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 0 \right| < 1$$

が成り立つ．これを変形すれば

$$0 < f(x) < g(x) \qquad (a < x \leqq a+\delta)$$

となる．よって，広義積分 $\displaystyle\int_a^{a+\delta} g(x)\,dx$ が収束するならば，比較判定法より広義積分 $\displaystyle\int_a^{a+\delta} f(x)\,dx$ も収束する．後は (1) と同様である．

(3) $x \to a+0$ で $f(x)$ は $g(x)$ より高位の無限大なので，右極限値は

$$\lim_{x \to a+0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

である．そこで，$\varepsilon = 1$ とすれば，ある $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して（最初の仮定と合わせて）

$$a < x \leqq a+\delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > 0, \quad \left| \frac{g(x)}{f(x)} - 0 \right| < 1$$

が成り立つ．これを変形すれば

$$0 < g(x) < f(x) \qquad (a < x \leqq a+\delta)$$

となる．よって，広義積分 $\displaystyle\int_a^{a+\delta} g(x)\,dx$ が発散するならば $\displaystyle\int_a^{a+\delta} g(x)\,dx = \infty$ であるから，比較判定法より広義積分 $\displaystyle\int_a^{a+\delta} f(x)\,dx$ も無限大に発散する．後は (1) と同様である．

□

この定理を大雑把に説明すれば，2 個の関数 $f(x)$ と $g(x)$ が同程度の速さで無限大に発散するならば，それぞれの広義積分の収束・発散は同じものになるということである．この辺りの感覚はぜひ備えておいてほしい．

被積分関数が発散する場合の広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の収束・発散を調べる際には，$f(x)$ の無限大の位数に着目し，さらに広義積分の収束･発散を判定しやすい関数 $g(x)$ をいかに準備するかが重要となる．ただし，応用上多くの場合は $\dfrac{1}{x^\alpha}$ の形の関数を考えれば解決できる．例えば $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$ の場合には，問題に合わせて $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ とし，$f(x)$ と同位の無限大となるような指数 α を求めればよい．収束性を示せばよいと見当がついていれば，$f(x)$ が $g(x)$ より低位の無限大となるような指数 α を求めてもよい．

例題 6.26. 次の広義積分の収束・発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^4}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

（解答）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{1}{\sqrt{x+x^2}} = \infty$ である．また

$$\lim_{x\to+0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+x^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 \ (\fallingdotseq 0)$$

であるから，$\dfrac{1}{\sqrt{x+x^2}}$ は $x\to+0$ のとき $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ と同位の無限大である．

さらに，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ は収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$ も収束する．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1-0} \frac{1}{1-x^4} = \infty$ である．また

$$\lim_{x\to1-0} \frac{\dfrac{1}{1-x^4}}{\dfrac{1}{1-x}} = \lim_{x\to1-0} \frac{1-x}{1-x^4} = \lim_{x\to1-0} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{4} \ (\fallingdotseq 0)$$

であるから，$\dfrac{1}{1-x^4}$ は $x\to1-0$ のとき $\dfrac{1}{1-x}$ と同位の無限大である．

さらに，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$ は発散するから，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^4}\,dx$ も発散する．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\log x}{\sqrt{\sin x}} = -\infty$ である．また

$$\frac{\dfrac{\log x}{\sqrt{\sin x}}}{\dfrac{1}{x^{3/4}}} = \sqrt{\frac{x}{\sin x}}\cdot x^{1/4}\log x$$

であり，第 5 章命題 6.35 より

$$\lim_{x\to+0} x^{1/4}\log x = 0$$

であるから

$$\lim_{x\to+0} \frac{\dfrac{\log x}{\sqrt{\sin x}}}{\dfrac{1}{x^{3/4}}} = \lim_{x\to+0} \sqrt{\frac{x}{\sin x}}\cdot x^{1/4}\log x = \sqrt{1}\cdot 0 = 0$$

となる．よって，$\dfrac{\log x}{\sqrt{\sin x}}$ は $x\to+0$ のとき $\dfrac{1}{x^{3/4}}$ より低位の無限大である．

さらに，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{3/4}}\,dx$ は収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ も収束する．

（解答終）

例えば (1) では，x が 0 に十分近ければ，$1+x$ はほぼ 1 なので

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} \fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

とあたりをつけて比較する関数を用意している．与えられた関数に対してその挙動を見抜けるかが重要である．また，(3) では $\sqrt{\sin x} \fallingdotseq \sqrt{x}$ なこと，および $\log x \to -\infty$ の発散速度が $1/x^{1/4}\to\infty$ の発散速度より緩やかなことに着目している．実際には $1/x^s$ で $1/2<s<1$ となる関数と比較すればよいので，必ずしも解答のように $s=3/4$ と選んだ関数 $1/x^{3/4}$ と比較しなければならないわけではない．各自で確かめてみよ．

6.7 広義積分の収束・発散の判定法 3：積分区間が非有界の場合の関数の無限小の比較

次の積分区間が非有界な広義積分について考える．まず基本的な広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ について観察してみると，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ は $\alpha < 1$ なら収束するので，これは $\alpha > 1$ なら収束するので，$x \to \infty$ での被積分関数の 0 への収束の速さ（x の指数）が広義積分の収束・発散を決定している．つまり，前節と同様に広義積分の特異性に関係する部分での被積分関数の挙動を調べることで，その収束・発散が判定できることが示唆されている．実際にそれが正しいことを示し，具体的な広義積分の収束・発散の判定に利用できるようになることがこの節の目的である．

そこで，2 個の関数 $f(x)$ と $g(x)$ が

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

であるとする．このとき，$f(x)$ と $g(x)$ の "$x \to \infty$ のときの 0 への収束速度" を比較したい．そのためには比を考えるのが自然である．$\dfrac{0}{0}$ の不定形の極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ について

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ であれば，分子の $f(x)$ の 0 への収束速度の方が分母の $g(x)$ の収束速度よりも段違いに速いので，不定形の $\dfrac{0}{0}$ は分子の方がはるかに小さく，無限小のレベルが分母と分子で異なっていると考えられる．
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ であれば，$f(x)$ と $g(x)$ の 0 への収束速度が同じでバランスがとれているために，0 でない極限値が存在していると考えられる．

このアイデアを基にして次のように新しい用語を定義する．

定義 6.27. （$x \to \infty$ における無限小の比較）

関数 $f(x)$ と $g(x)$ は $x \to \infty$ のときに 0 に収束するとする．

(1) 0 でない極限値

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma\ (\fallingdotseq 0)$$

が存在するとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ は**同位の無限小**であるという．

(2) 極限値が

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

であるとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は $g(x)$ より**高位の無限小**，または $g(x)$ は $f(x)$ より**低位の無限小**であるという．

$x \to -\infty$ の場合にも同様に定義する．

これらもランダウの記号を用いて表すこともできる．また，a を実数として $x \to a$ の場合にも同様の概念を定義できる．これは要は不定形の極限計算なので，分母と分子が $x = a$ において漸近展開できる場合には最小次数に着目することと同じである．もっとも広義積分の議論においては使わないのでこれ以上は復習しない．実際，関数 $f(x)$ が $(a, b]$ において不定積分をもち，$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x) = 0$ のときには，$f(x)$ は $[a, b]$ 上で有界だから $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は広義積分ではない．

定理 6.28. （広義積分の収束・発散の判定法：積分区間が非有界な場合）

関数 $f(x)$ と $g(x)$ はともに区間 $[a,\infty)$ において不定積分をもち，$g(x)>0$ とする．

(1) $x\to\infty$ で $f(x)$ と $g(x)$ が同位の無限小とするとき

- 広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ が収束するならば，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ も収束する．
- 広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ が発散するならば，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ も発散する．

(2) $x\to\infty$ で $f(x)$ は $g(x)$ より高位の無限小とするとき

- 広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ が収束するならば，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ も収束する．

(3) $f(x)>0$ かつ $x\to\infty$ で $f(x)$ は $g(x)$ より低位の無限小とするとき

- 広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ が発散するならば，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ も発散する．

関数 $f(x)$ が区間 $(-\infty,b]$ において不定積分をもつ場合の広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ についても，同様の主張が成り立つ．

証明.

(1) $x\to\infty$ で $f(x)$ と $g(x)$ が同位の無限小なので，極限値を

$$\gamma=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

とおくと，$\gamma\fallingdotseq 0$ である．そこで $\gamma>0$ のときを示す（$\gamma<0$ のときは $f(x)$ の代わりに $-f(x)$ を考えればよい）．そこで，$\varepsilon=\dfrac{\gamma}{2}$ とすれば，ある $L=L(\varepsilon)>0$ が存在して

$$x\geqq L \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}-\gamma\right|<\frac{\gamma}{2}$$

が成り立つ．これを変形すれば

$$\frac{\gamma}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3\gamma}{2}$$

なので，仮定より $g(x)>0$ だから

$$0<\frac{\gamma}{2}\,g(x)<f(x)<\frac{3\gamma}{2}\,g(x)\qquad(x\geqq L)$$

となる．よって，比較判定法を用いれば

- 広義積分 $\displaystyle\int_L^\infty g(x)\,dx$ が収束するならば

$$0<f(x)<\frac{3\gamma}{2}\,g(x)\qquad(x\geqq L)$$

  と比較判定法より，広義積分 $\displaystyle\int_L^\infty f(x)\,dx$ も収束する．

- 広義積分 $\displaystyle\int_L^\infty g(x)\,dx$ が発散するならば，$g(x)>0$ より $\displaystyle\int_L^\infty g(x)\,dx=\infty$ である．さらに

$$\frac{\gamma}{2}\,g(x)<f(x)\qquad(x\geqq L)$$

  より，$\displaystyle\int_L^\infty f(x)\,dx=\infty$ と広義積分は発散する．

ゆえに
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^L f(x)\,dx + \int_L^\infty f(x)\,dx$$
とすれば，第 1 項は通常の定積分なので，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ の収束・発散は第 2 項の収束・発散と一致するから，定理の主張が成り立つ．

(2)　$x \to \infty$ で $f(x)$ は $g(x)$ より高位の無限小なので，極限値は
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
である．そこで，$\varepsilon = 1$ とすれば，ある $L = L(\varepsilon) > 0$ が存在して
$$x \geqq L \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 0 \right| < 1$$
が成り立つ．これを変形すれば
$$|f(x)| < g(x) \qquad (x \geqq L)$$
となる．よって，広義積分 $\displaystyle\int_L^\infty g(x)\,dx$ が収束するならば，比較判定法より広義積分 $\displaystyle\int_L^\infty |f(x)|\,dx$ も収束する．ゆえに，広義積分 $\displaystyle\int_L^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束する．後は (1) と同様である．

(3)　$x \to \infty$ で $f(x)$ は $g(x)$ より低位の無限小なので，極限値は
$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$
である．そこで，$\varepsilon = 1$ とすれば，ある $L = L(\varepsilon) > 0$ が存在して
$$x \geqq L \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{g(x)}{f(x)} - 0 \right| < 1$$
が成り立つ．これを変形すれば，$f(x) > 0$ なので
$$0 < g(x) < f(x) \qquad (x \geqq L)$$
となる．よって，広義積分 $\displaystyle\int_L^\infty g(x)\,dx$ が発散するならば $\displaystyle\int_L^\infty g(x)\,dx = \infty$ であるから，比較判定法より広義積分 $\displaystyle\int_L^\infty f(x)\,dx$ も無限大に発散する．後は (1) と同様である．

□

この定理を大雑把に説明すれば，2 個の関数 $f(x)$ と $g(x)$ が $x \to \infty$ のときに同程度の速さで 0 に収束するならば，それぞれの広義積分の収束・発散は同じものになるということである．この辺りの感覚もぜひ備えておいてほしい．また，この定理を用いて広義積分の収束・発散を調べる際にも，$g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ の形の関数を考えれば上手くいくことが多い．

例題 6.29.　次の広義積分の収束・発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6+1}}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\,dx$

（解答）

(1)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}}{\dfrac{1}{x^{3/2}}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^3+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^3}}}=1\ (\fallingdotseq 0)$$

であるから，$\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ は $x\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{x^{3/2}}$ と同位の無限小である．

さらに，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ は収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ も収束する．よって

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx+\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$$

とすれば，第 1 項は通常の定積分で第 2 項は収束するので，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ は収束する．

(2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^6+1}}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{\sqrt{x^6+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^6}}}=1\ (\fallingdotseq 0)$$

であるから，$\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^6+1}}$ は $x\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{x}$ と同位の無限小である．

さらに，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ は発散するから，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6+1}}\,dx$ も発散する．

(3)　第 5 章命題 6.34（指数関数と多項式の増大度の比較）より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{e^x+1}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x+1}=0$$

であるから，$\dfrac{x}{e^x+1}$ は $x\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{x^2}$ より高位の無限小である．

さらに，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ は収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{e^x+1}\,dx$ も収束する．よって

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\,dx=\int_0^1 \frac{x}{e^x+1}\,dx+\int_1^\infty \frac{x}{e^x+1}\,dx$$

とすれば，第 1 項は通常の定積分で第 2 項は収束するので，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\,dx$ は収束する．

（解答終）

上では丁寧に積分区間を $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx+\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ と定積分と収束する広義積分の項にわけて説明した．ただし，$x=0$ で被積分関数が発散していない（広義積分でない）ならば，慣れてくれば $x\to\infty$ での関数の様子を調べるだけで収束・発散を結論付けてもよい．

6.8　広義積分の収束・発散の判定例

積分区間の両端で広義積分となっている場合には，前に述べたように積分区間を分けて考えればよい．

例題 6.30.　広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ が収束することを示せ．

（解答）　$f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ とおく．まず $\displaystyle\lim_{x\to1+0} f(x)=\infty$ であるから，積分区間を

$$\int_1^\infty f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^\infty f(x)\,dx$$

とわけておく．

(i)　第 1 項について

$$\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}}=\lim_{x\to1+0}\frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\fallingdotseq 0)$$

であるから，$f(x)$ は $x\to1+0$ のとき $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ と同位の無限大である．

さらに，広義積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ は収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ も収束する．

(ii)　第 2 項について

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=1\ (\fallingdotseq 0)$$

であるから，$f(x)$ は $x\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{x^2}$ と同位の無限小である．

さらに，広義積分 $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ は収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx$ も収束する．

したがって，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^\infty f(x)\,dx$ は収束する．

（解答終）

なお，上の例題で実際に積分値を求めることができる．$t=\sqrt{x^2-1}$ とおけば，$x=\sqrt{t^2+1}$ で

$$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & \infty \\ \hline t & 0 & \to & \infty \end{array}\qquad\qquad dx=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

であるから

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t^2+1}\,t}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt=\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

となる．そこで，$s>0$ として

$$\int_0^s \frac{1}{t^2+1}\,dt=\Big[\mathrm{Tan}^{-1}\,t\Big]_0^s=\mathrm{Tan}^{-1}\,s$$

なので

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx=\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,dt=\lim_{s\to\infty}\mathrm{Tan}^{-1}\,s=\frac{\pi}{2}$$

となる．これより，広義積分の収束・発散のみを知りたいなら，不定積分が求まるとしてもその積分計算の方が手間がかかる可能性のあることがわかる．

例題 6.31.　次の広義積分の収束・発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^4+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$

（解答）

(1)　$x \geqq 0$ のとき

$$\left|\frac{\sin x}{x^4+1}\right| \leqq \frac{1}{x^4+1}$$

である．ここで

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x^4+1}}{\dfrac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^4+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{x^4}} = 1\ (\fallingdotseq 0)$$

であるから，$\dfrac{1}{x^4+1}$ は $x\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{x^4}$ と同位の無限小である．さらに，広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^4}\,dx$ は収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx$ も収束する．

ゆえに，比較判定法より広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^4+1}\right|dx$ は収束するから，$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^4+1}\,dx$ は絶対収束する．

(2)　$x \geqq 0$ のとき

$$\left|e^{-x^2}\cos 2x\right| \leqq e^{-x^2}$$

である．ここで，第 5 章命題 6.34（指数関数と多項式の増大度の比較）より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$$

であるから，e^{-x^2} は $x\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{x^2}$ より高位の無限小である．さらに，広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ は収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$ も収束する．

ゆえに，比較判定法より広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\left|e^{-x^2}\cos 2x\right|dx$ は収束するから，$\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos 2x\,dx$ は絶対収束する．

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}} = \infty$ である．また

$$\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos x}}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}} = \lim_{x\to+0}\sqrt{(1+\cos x)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2} = \sqrt{2}\ (\fallingdotseq 0)$$

であるから，$\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$ は $x\to+0$ のとき $\dfrac{1}{x}$ と同位の無限大である．

さらに，広義積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x}\,dx$ は発散するから，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$ も発散する．

（解答終）

比較する関数の指数 α を決定するには初等関数の漸近展開も有効である．例えば (3) は

$$\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)}} = \frac{1}{x\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{o(x^3)}{x^2}}} \qquad (x\to+0)$$

より，$\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$ は $\dfrac{1}{x}$ と同位の無限大であることを示してもよい．むしろ，漸近展開を利用して指数 α を予想しているのである．

特に今後よく利用する結果を命題としてまとめておく．この命題はその証明を含めて理解しておくこと．証明なしに使うと試験では減点されることもあります．

命題 6.32.

(1) $f(x)$ を m 次多項式，$g(x)$ を n 次多項式とし，$x \geqq a$ では $g(x) \fallingdotseq 0$ とする．このとき，$n \geqq m+2$ ならば，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ は収束する．

(2) $h(x)$ を多項式とし，$a > 0$ とする．このとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty h(x)e^{-ax}\,dx$ は収束する．

証明. (1) 関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $g(x) \fallingdotseq 0$ より $[a, \infty)$ 上で連続であるから，その不定積分が存在する．また

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

とおくと，$a_m \fallingdotseq 0$, $b_n \fallingdotseq 0$ である．ここで，仮定より $m + \dfrac{3}{2} - n < 0$ なので

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\dfrac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^{k+(3/2)}}{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^{k+(3/2)-n}}{b_n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k x^{k-n}} = \frac{0}{b_n} = 0$$

であるから，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $x \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{x^{3/2}}$ より高位の無限小である．さらに，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ は収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ も収束する．

(2) 任意の 0 以上の整数 n に対して，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx$ が収束することを示せばよい．第 5 章命題 6.34（指数関数と多項式の増大度の比較）より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n e^{-ax}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+2}}{e^{ax}} = 0$$

であるから，$x^n e^{-ax}$ は $x \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{x^2}$ より高位の無限小である．さらに，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ は収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx$ も収束する．

したがって，多項式 $h(x)$ はこれらの定数倍の和で書かれるから，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty h(x)e^{-ax}\,dx$ は収束する．

□

この命題から広義積分

$$\int_0^\infty \frac{2x^2+4x-7}{4x^4+x^2+3}\,dx, \qquad \int_0^\infty (3x^3-4x^2+6x-7)e^{-2x}\,dx$$

は収束することがわかる．この有理関数や多項式と e^{-x} の積の形はよく出てくるので憶えておくこと．これらの関数の広義積分の収束性をすぐに判断できれば，他の複雑な関数の場合でも見通しがよくなる．

6.9 置換積分を用いた広義積分の計算法

広義積分はまず特異性を避けて定積分を計算し，積分区間の端点について極限をとるのが原則である．ただし，それは極限値が存在しないときに形式的な計算をすると誤る場合があるからである．広義積分が収束する，つまり定積分の端点に関する極限値が存在する場合には，通常の定積分と同様に広義積分でも置換積分を使うことができる．実際，収束する広義積分に対して正しく置換積分を実行すれば，置換後も定積分の端点に関する極限値が存在するはずだからである．

以前の節で挙げた例題を含め，いくつかの計算例を述べておく．もちろん，置換積分後に特異性が解消された場合には，定積分として計算しても構わない．

例題 6.33.　次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$$

（解答）　$x \geqq 0$ のとき

$$0 < \frac{1}{e^x+1} < \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

であり，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ は収束する．よって，求める広義積分も収束する．そこで，$u = e^x$ と置換すると

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \infty \\ \hline u & 1 & \to & \infty \end{array} \qquad du = e^x\,dx = u\,dx \qquad \therefore\ dx = \frac{du}{u}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{u(u+1)}\,du = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \lim_{t\to\infty}\left[\log\left|\frac{u}{u+1}\right|\right]_1^t \\ = \lim_{t\to\infty}\left(\log\frac{t}{t+1} - \log\frac{1}{2}\right) = \log 2\end{aligned}$$

（解答終）

広義積分に慣れてくれば，簡単な場合は収束性がすぐにわかるようになる．そのため，広義積分の収束性が明らかな場合には，断らずに置換積分を用いることも多い．実際，応用上は広義積分の特異性が生じる箇所での被積分関数の挙動（多項式なら次数，初等関数なら漸近展開や増大度の比較など）ですぐに収束・発散がわかるはずである．

例題 6.34. n を自然数とするとき，次の広義積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$

（解答）

(1) $\dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ より，$x \geqq 0$ のとき

$$0 < \frac{1}{\cosh x} < \frac{2}{e^x} = 2e^{-x}$$

であり，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} 2e^{-x}\,dx$ は収束する．よって，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\cosh x}\,dx$ も収束し，被積分関数は偶関数だから，求める広義積分も収束する．

そこで，$u = e^x$ と置換すると

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & \to & \infty \\ \hline u & 0 & \to & \infty \end{array} \qquad du = e^x\,dx$$

である．よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{2}{u^2+1}\,du = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{2}{u^2+1}\,du = \lim_{t\to\infty} \Big[2\,\mathrm{Tan}^{-1}\,u\Big]_0^t = \lim_{t\to\infty} 2\,\mathrm{Tan}^{-1}\,t = \pi$$

(2) $0 \leqq x < 1$ のとき

$$0 \leqq \frac{x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x}{\sqrt{1+x}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

であり，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}\,dx$ は収束する．よって，求める広義積分も収束する．

そこで，$u = \mathrm{Sin}^{-1}\,x$ とおけば

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline u & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \end{array} \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

である．よって，$x = \sin u$ より

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} u\sin u\,du = \Big[-u\cos u + \sin u\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

(3) $\dfrac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$ は $x \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{x^{2n+2}}$ と同位の無限小で，広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2n+2}}\,dx$ は $2n+2>1$ より収束する．$x \to -\infty$ についても同様なので，求める広義積分は収束する．

そこで，$x = \tan\theta$ とおけば

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & \to & \infty \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{2} & \to & \frac{\pi}{2} \end{array} \qquad \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = \cos^{2n+2}\theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \cos^{2n}\theta\,d\theta$$

であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n}\theta\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}\theta\,d\theta = 2\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\pi$$

（解答終）

例題 6.35. 広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ の値を求めよ．

（解答） 被積分関数を $f(x)$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x) = \infty$ である．また

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ (\neq 0)$$

であるから，$f(x)$ は $x \to 1-0$ のとき $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ と同位の無限大である．さらに，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ は収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ も収束する．同様に，広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,dx$ も収束するから，求める広義積分は収束する．

そこで，$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)}$ より，$u = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおけば

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & \to & 1 \\ \hline u & \infty & \to & 0 \end{array} \qquad x = \frac{1-u^2}{u^2+1} = -1 + \frac{2}{u^2+1}, \qquad dx = \frac{-4u}{(u^2+1)^2}\,du$$

であるから

$$(1+x^2)\sqrt{1-x^2} = (1+x^2)(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{2(u^4+1)}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{2}{u^2+1}\cdot u = \frac{4u(u^4+1)}{(u^2+1)^3}$$

より

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\infty}^{0} \frac{(u^2+1)^3}{4u(u^4+1)}\cdot\frac{-4u}{(u^2+1)^2}\,du = \int_0^{\infty} \frac{u^2+1}{u^4+1}\,du$$

となる．また

$$u^4+1 = (u^4+2u^2+1) - 2u^2 = (u^2+1)^2 - 2u^2 = (u^2+\sqrt{2}\,u+1)(u^2-\sqrt{2}\,u+1)$$

より

$$\frac{u^2+1}{u^4+1} = \frac{u^2+1}{(u^2+\sqrt{2}\,u+1)(u^2-\sqrt{2}\,u+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^2+\sqrt{2}\,u+1} + \frac{1}{u^2-\sqrt{2}\,u+1}\right)$$

なので，$t > 0$ として

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{u^2+1}{u^4+1}\,du &= \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{1}{u^2+\sqrt{2}\,u+1} + \frac{1}{u^2-\sqrt{2}\,u+1}\right)du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \left\{\frac{1}{\left(u+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}\right\}du \\
&= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}\,u+1) + \sqrt{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}\,u-1)\right]_0^t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}\,t+1) + \mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}\,t-1)\right\}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_0^{\infty} \frac{u^2+1}{u^4+1}\,du \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}\,t+1) + \mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}\,t-1)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

（解答終）

広義積分の計算は一般にかなり大変なので，しっかりと計算練習することで最後まで計算しきる力をつけておくこと．

7　ガンマ関数とベータ関数

7.1　ガンマ関数の定義と性質

代表的な特殊関数であるガンマ関数は，次の広義積分で定義される．

定義 7.1.（ガンマ関数）

$p > 0$ に対して

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$$

とおき，これを**ガンマ関数（Gamma 関数）**という．

関数が広義積分により定義されるためには，まずその広義積分が収束して値が定まることを確認しておかなければならない．$0 < p < 1$ の場合には $p - 1 < 0$ であるから，$x \to +0$ で被積分関数 $x^{p-1}e^{-x}$ が発散することに注意すれば，以下のようになる．

命題 7.2.　$p > 0$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\, dx$ は収束する．

証明.　$0 < p < 1$ のときには

$$\lim_{x \to +0} x^{p-1}e^{-x} = \lim_{x \to +0} \frac{e^{-x}}{x^{1-p}} = \infty$$

と被積分関数が発散するから，次のように積分区間を分けて考える．

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\, dx = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}\, dx + \int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}\, dx$$

(i)　$0 < x \leqq 1$ のとき，$e^x > 1$ であるから

$$0 < x^{p-1}e^{-x} < x^{p-1} = \frac{1}{x^{1-p}}$$

となる．ここで，$p > 0$ より $1 - p < 1$ なので，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1-p}}\, dx$ は収束する．よって，比較判定法より，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}\, dx$ も収束する．

（$p \geqq 1$ の場合には定積分であるが，まとめて議論した.）

(ii)　自然数 m を $m = [p+1]$ とおく（$[x]$ は x の整数部分）．$x \geqq 1$ のとき

$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} > \frac{x^m}{m!}$$

より

$$0 < x^{p-1}e^{-x} < x^{p-1} \cdot \frac{m!}{x^m} = \frac{m!}{x^{m-p+1}}$$

となる．ここで，m の選び方より $m = [p+1] > p$ なので

$$m - p + 1 > 1$$

であるから，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{m!}{x^{m-p+1}}\, dx$ は収束する．よって，比較判定法より，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}\, dx$ も収束する．

したがって，$p > 0$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\, dx$ は収束する．　□

ガンマ関数の重要な性質は次で述べるものである．

定理 7.3. ガンマ関数 $\Gamma(p)$ は次の性質をみたす．

(1) 任意の $p>0$ に対して，$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$

(2) 自然数 n に対して，$\Gamma(n+1)=n!$

証明. (1) $p>0$ とする．$0<s<1<t$ として，部分積分をすると

$$\int_s^t x^p e^{-x}\,dx = \Big[x^p\cdot(-e^{-x})\Big]_s^t - \int_s^t px^{p-1}\cdot(-e^{-x})\,dx$$
$$= -t^pe^{-t}+s^pe^{-s}+p\int_s^t x^{p-1}e^{-x}\,dx$$

となる．ここで，$p>0$ より

$$\lim_{s\to+0} s^pe^{-s}=0$$

である．また，第 5 章命題 6.34 より

$$\lim_{t\to\infty} t^pe^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^p}{e^t}=0$$

も成り立つ．よって

$$\int_s^t x^p e^{-x}\,dx = -t^pe^{-t}+s^pe^{-s}+p\int_s^t x^{p-1}e^{-x}\,dx$$

において，$s\to+0,\ t\to\infty$ とすれば

$$\int_0^\infty x^pe^{-x}\,dx = p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$$

となり，求める等式 $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ が得られる．

(2) (1) より，自然数 n に対して

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!\Gamma(1)$$

となる．ここで

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=\lim_{t\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^t=\lim_{t\to\infty}(-e^{-t}+1)=1$$

であるから，$\Gamma(n+1)=n!$ が成り立つ．

□

上の定理 7.3(2) より，ガンマ関数 $\Gamma(p)$ は自然数 n に対する階乗 $n!$ の正の実数 p への拡張となっていることがわかる．ただし，自然数以外の p に対して $\Gamma(p)$ の値を求めることは難しい．例えば

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

であることが知られているが，その計算はやや難しいので発展事項の節で証明する．ただし，この値は 2 変数関数の積分を応用すれば簡単に求められるので，その時点で計算できるようになれば問題ない．

7.2 ベータ関数の定義と性質

命題 7.4. $p>0,\ q>0$ のとき，積分 $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ は存在する．

証明. $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ とおく．また $0<c<1$ をとり，次のように積分区間を分けておく．

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^c f(x)\,dx+\int_c^1 f(x)\,dx$$

(i) 第 1 項 $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ について

- $p\geqq 1$ のとき：$f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ は区間 $[0,c]$ 上で連続だから，これは通常の定積分である．
- $0<p<1$ のとき：$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}=\infty$ なので広義積分である．また

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{x^{1-p}}}=\lim_{x\to+0}(1-x)^{q-1}=1\ (\fallingdotseq 0)$$

であるから，$f(x)$ は $x\to+0$ のとき $\dfrac{1}{x^{1-p}}$ と同位の無限大である．さらに，$0<1-p<1$ より，広義積分 $\displaystyle\int_0^c\frac{1}{x^{1-p}}\,dx$ は収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ も収束する．

(ii) 第 2 項 $\displaystyle\int_c^1 f(x)\,dx$ について

- $q\geqq 1$ のとき：$f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ は区間 $[c,1]$ 上で連続だから，これは通常の定積分である．
- $0<q<1$ のとき：$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}=\infty$ なので広義積分である．また

$$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{(1-x)^{1-q}}}=\lim_{x\to1-0}x^{p-1}=1\ (\fallingdotseq 0)$$

であるから，$f(x)$ は $x\to1-0$ のとき $\dfrac{1}{(1-x)^{1-q}}$ と同位の無限大である．さらに，$0<1-q<1$ より，広義積分 $\displaystyle\int_c^1\frac{1}{(1-x)^{1-q}}\,dx$ は収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_c^1 f(x)\,dx$ も収束する．

したがって，$p>0,\ q>0$ のとき，積分 $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ は存在する． □

命題 7.4 の広義積分も応用上よく現れるので名前がついており，特殊関数の代表例である．

定義 7.5. （ベータ関数）

$p>0,\ q>0$ に対して

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

とおき，これをベータ関数（**Beta** 関数）という．

ベータ関数の重要な性質は次で述べるものである．

定理 7.6. ベータ関数 $\mathrm{B}(p,q)$ は次の性質をみたす．

(1) 任意の $p>0,\ q>0$ に対して，$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$

(2) 任意の $p>0,\ q>0$ に対して，$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(p+1,q)+\mathrm{B}(p,q+1)=\dfrac{p+q}{p}\,\mathrm{B}(p+1,q)$

(3) 自然数 m,n に対して，$\mathrm{B}(m,n)=\dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$

証明. (1) $t=1-x$ と置換積分すると

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=-\int_1^0(1-t)^{p-1}t^{q-1}\,dt=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt=\mathrm{B}(q,p)$$

(2) $1=x+(1-x)$ であるから

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}=\{x+(1-x)\}x^{p-1}(1-x)^{q-1}=x^p(1-x)^{q-1}+x^{p-1}(1-x)^q$$

と変形すれば，これを開区間 $(0,1)$ 上で積分して

$$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(p+1,q)+\mathrm{B}(p,q+1)$$

が成り立つ．また，$0<s<t<1$ として部分積分すれば

$$\begin{aligned}\int_s^t x^{p-1}(1-x)^q\,dx&=\left[\frac{x^p}{p}(1-x)^q\right]_s^t-\int_s^t\frac{x^p}{p}\cdot q(-1)(1-x)^{q-1}\,dx\\&=\frac{t^p}{p}(1-t)^q-\frac{s^p}{p}(1-s)^q+\frac{q}{p}\int_s^t x^p(1-x)^{q-1}\,dx\end{aligned}$$

であり，ここで $s\to+0,\ t\to1-0$ とすれば，$p>0,\ q>0$ より

$$\lim_{s\to+0}\frac{s^p}{p}(1-s)^q=0,\qquad\lim_{t\to1-0}\frac{t^p}{p}(1-t)^q=0$$

となるので

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx=\frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx$$

が得られる．これは $\mathrm{B}(p,q+1)=\dfrac{q}{p}\,\mathrm{B}(p+1,q)$ ということであるから

$$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(p+1,q)+\mathrm{B}(p,q+1)=\mathrm{B}(p+1,q)+\frac{q}{p}\,\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p+q}{p}\,\mathrm{B}(p+1,q)$$

(3) (2) より $\mathrm{B}(p+1,q)=\dfrac{p}{p+q}\,\mathrm{B}(p,q)$ であるから，自然数 m,n に対して

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{m-1}{m+n-1}\,\mathrm{B}(m-1,n)=\cdots=\frac{(m-1)!n!}{(m+n-1)!}\,\mathrm{B}(1,n)$$

となる．ここで

$$\mathrm{B}(1,n)=\int_0^1(1-x)^{n-1}\,dx=\left[-\frac{(1-x)^n}{n}\right]_0^1=\frac{1}{n}$$

であるから

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{(m-1)!n!}{(m+n-1)!}\,\mathrm{B}(1,n)=\frac{(m-1)!n!}{(m+n-1)!}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

□

ガンマ関数 $\Gamma(p)$ とベータ関数 $\mathrm{B}(p,q)$ には次の関係式が成り立つことが知られている．

定理 7.7. **（ガンマ関数とベータ関数の関係式）**
任意の $p>0,\ q>0$ に対して

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

が成り立つ．

証明には 2 変数関数の積分を利用するのでここでは述べない．不思議な感じがするかもしれないが，1 変数関数の積分値が直接計算できない場合に 2 変数関数の積分を利用すると値が簡単に求まることが意外とあるので，その単元で学習することになる．例えば，前で挙げたように

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

であることが知られており，その証明は命題 7.8 で与えられる．ただしこの証明は長く複雑である．ただし，2 変数関数の積分を用いれば簡単に計算することができる．第 10 章例題 4.5 を参照せよ．

もし m,n が自然数ならば，定理 7.3(2) と定理 7.6(3) より

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!},\qquad \mathrm{B}(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

であるから，確かにこの等式は成り立っている．

ガンマ関数・ベータ関数を利用すると

$$\int_0^{\pi/2}\sin^m\theta\cos^n\theta\,d\theta$$

の形をはじめとして，様々な定積分の計算が積分を実行することなく求められる．その応用は 7.3 節を参照すること．

7.3 ガンマ関数・ベータ関数を応用した積分計算

前にガンマ関数 $\Gamma(p)$ とベータ関数 $\mathrm{B}(p,q)$ について定義やその性質を述べたが，その具体的な値は p や q が自然数の場合しか求まっていなかった．これだけだと応用は難しいので，まずはよく現れる $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ の値を求める．その際に不等式

$$e^x \geqq 1+x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

を利用するが，これは簡単に証明できるので各自の演習問題とする．

命題 7.8.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

証明. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,dx$ において，$t=\sqrt{x}$ とおくと，$x=t^2$ なので

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \infty \\ \hline t & 0 & \to & \infty \end{array} \qquad\qquad dx = 2t\,dt$$

より

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1}e^{-t^2}\cdot 2t\,dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$$

となるから，広義積分

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

の値を求めればよい．後で見やすくするために

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$$

とおけば，命題 9.1（Wallis の公式）より，$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\pi}$ である（この極限値を計算するだけでも大変なので後に回す）．

I において，$t = \dfrac{x}{\sqrt{n}}$ とおけば

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \infty \\ \hline t & 0 & \to & \infty \end{array} \qquad\qquad \sqrt{n}\,dt = dx$$

$$I = \sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nt^2}\,dt$$

となる．ここで，$e^x \geqq 1+x$ に $x=t^2$ を代入して，$e^{t^2} \geqq 1+t^2 > 0$ であるから

$$0 < e^{-t^2} \leqq \frac{1}{1+t^2} \qquad (t \geqq 0)$$

より，n 乗して $[0,\infty)$ 上で積分すれば

$$\int_0^\infty e^{-nt^2}\,dt < \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$$

が成り立つ．また，$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$e^x \geqq 1+x$ に $x=-t^2$ を代入して

$$e^{-t^2} \geqq 1-t^2 \geqq 0 \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

であるから，$e^{-nt^2} > 0$ と合わせて

$$\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt < \int_0^1 e^{-nt^2}\,dt < \int_0^\infty e^{-nt^2}\,dt$$

が成り立つ．よって

$$\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt < \int_0^\infty e^{-nt^2}\,dt < \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$$

となり，両辺に $\sqrt{n}$ をかければ

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt < I < \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$$

が得られる．そこで，この左辺と右辺を計算する．

　左辺の積分において $t=\sin\theta$ とおけば，$(1-t^2)^n=\cos^{2n}\theta$ であり

$$\begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \end{array} \qquad\qquad dt=\cos\theta\,d\theta$$

$$\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\cdot\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}\theta\,d\theta = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{\sqrt{n}\,a_n}{2n+1}$$

となる．次に右辺の積分においては，$t=\tan\theta$ とおけば

$$\begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & \infty \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \end{array} \qquad\qquad dt=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

であり，さらに

$$\frac{1}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^n} = (\cos^2\theta)^n = \cos^{2n}\theta$$

なので

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}\theta\,d\theta = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}\,a_n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

となる．ゆえに，これらの結果を代入すれば

$$\frac{n}{2n+1}\,a_n < I < \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{\pi}{2a_n} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

が成り立つ．さらに

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\,a_n = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{\pi}{2a_n} = 1\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となるから，はさみうちの定理より

$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

である．したがって

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2I = \sqrt{\pi}$$

が成り立つ． □

　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ の値をここまでの知識で計算すると大変だが，2 重積分を用いれば簡単に求められる．そこで計算法を理解すれば十分なので，1 変数関数の範囲でいろいろな計算をするのは面倒なことがあると理解しておけば十分である．

命題 7.9. （ベータ関数の三角関数による表現）
ベータ関数 $\mathrm{B}(p,q)$ について

$$\mathrm{B}(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta \, d\theta \qquad (p>0,\ q>0)$$

が成り立つ．

証明. ベータ関数 $\mathrm{B}(p,q)$ の定義式

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

で $x = \sin^2\theta$ とおけば

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \dfrac{\pi}{2} \end{array} \qquad\qquad dx = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

より

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p,q) &= \int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta)^{p-1}(1-\sin^2\theta)^{q-1}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\ d\theta\end{aligned}$$

が成り立つ． $\square$

この命題と未証明の公式

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

および命題 7.8 と定理 7.3 の結果

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(n) = (n-1)! \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

などを利用すれば，次の例のように置換積分などを用いずに計算できることがある．

例 7.10. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta\cos^3\theta\,d\theta$

（解答） 命題 7.9 より

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta\cos^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}(3,2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{24}$$

（解答終）

これは次のようにも計算できる

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta\cos^3\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^5\theta(1-\sin^2\theta)(\sin\theta)'\,d\theta = \left[\frac{\sin^6\theta}{6} - \frac{\sin^8\theta}{8}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

どちらの方法で求めても応用上は特に問題はない．試験やレポートでは計算力を問われているのか，ガンマ関数・ベータ関数の応用力を問われているのかを空気を読んで注意すること．実際，例えば $\sin^2\theta$ や $\sin^2\theta\cos\theta$ の積分などで特殊関数を持ち出すのは大げさな印象がある．

例 7.11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta$

（解答） 命題 7.9 より

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)}$$

である．ここで，定理 7.3 より

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

であるから

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(4)} = \frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{2\cdot 3!} = \frac{\pi}{32}$$

（解答終）

これは

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)\,d\theta = \frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}$$

のように計算してもよい．

例 7.12. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^8\theta\cos^6\theta\,d\theta$

（解答） 命題 7.9 より

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8\theta\cos^6\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(8)}$$

である．ここで，定理 7.3 より

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5\cdot 3}{2^3}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2}\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7\cdot 5\cdot 3}{2^4}\sqrt{\pi}$$

であるから

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8\theta\cos^6\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2\Gamma(8)} = \frac{\frac{7\cdot 5\cdot 3}{2^4}\sqrt{\pi}\cdot\frac{5\cdot 3}{2^3}\sqrt{\pi}}{2\cdot 7!} = \frac{5\pi}{4096}$$

（解答終）

これを

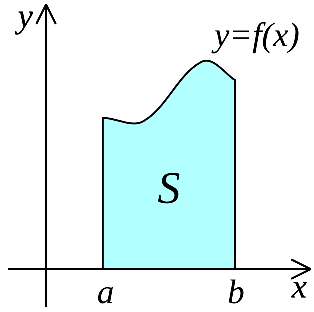
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^8\theta\cos^6\theta\,d\theta &= \int_0^{\pi/2}(-\sin^{14}\theta+3\sin^{12}\theta-3\sin^{10}\theta+\sin^8\theta)\,d\theta \\ &= \left(-\frac{13!!}{14!!}+3\,\frac{11!!}{12!!}-3\,\frac{9!!}{10!!}+\frac{7!!}{8!!}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{15\cdot 7!!\pi}{2\cdot 14!!} = \frac{5\pi}{4096}\end{aligned}$$

のように計算するのは大変である．

8　積分法の応用

8.1　面積

　関数 $y=f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上で連続で，さらに $f(x) \geqq 0$ であるとする．このとき，定積分の定義は分割を一様に細かくしたリーマン和の極限であったから，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれる部分の面積 S は



$$S=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

で定義される．詳しくは第 10 章定義 1.13 で 2 重積分を用いて定義するので，そちらを参照すること．

　2 曲線で囲まれた部分の面積は以下のようになる．

定理 8.1.　（2 曲線で囲まれた部分の面積）
　関数 $f(x)$ と $g(x)$ はともに閉区間 $[a,b]$ 上で連続で

$$f(x) \geqq g(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

であるとする．このとき，2 曲線 $y=f(x),\ y=g(x)$ と直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

となる．

例題 8.2.　曲線 $y=\dfrac{x}{x^2+4}$ と直線 $y=\dfrac{x}{8}$ が囲む部分の面積 S を求めよ．

（解答）　関数はどちらも奇関数であるから，$x \geqq 0$ の部分の面積を 2 倍すればよい．そこで，$x \geqq 0$ での関数の大小関係を調べると

$$\frac{x}{x^2+4}-\frac{x}{8}=\frac{x(4-x^2)}{8(x^2+4)} \geqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqq x \leqq 2$$

であるから，求める面積は

$$S=2\int_0^2 \left(\frac{x}{x^2+4}-\frac{x}{8}\right)dx=\left[\log(x^2+4)-\frac{x^2}{8}\right]_0^2=\log 2-\frac{1}{2}$$

である．

（解答終）

定理 8.3. **（極方程式で与えられた曲線の囲む部分の面積）**
曲線 C が極座標表示を用いて $r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ と表されていて，さらに $f(\theta)$ は連続であるとする．このとき，曲線 C と半直線 $\theta = \alpha,\ \theta = \beta$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

で与えられる．

証明. 区間 $[\alpha, \beta]$ の分割 $\Delta\colon \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$ をとると，曲線 $r = f(\theta)$ と 2 つの半直線 $\theta = \theta_{k-1},\ \theta = \theta_k$ が囲む微小部分の面積は，扇形で近似すれば $\dfrac{1}{2}\,f(\theta_k)^2(\theta_k - \theta_{k-1})$ となる．

よって，リーマン和は $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\theta_k)^2(\theta_k - \theta_{k-1})$ で近似され，$|\Delta| \to 0$ とすれば $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\{f(\theta)\}^2\,d\theta$ となる． □

例題 8.4. 極座標表示された 2 曲線

$$r = 1 + \cos\theta, \qquad r = \sin\theta \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と $\theta = 0$ が囲む部分の面積 S を求めよ．

（解答） $1 + \cos\theta \geqq \sin\theta$ であるから，原点から見れば曲線 $r = 1 + \cos\theta$ の方が曲線 $r = \sin\theta$ より遠くにあり，2 曲線は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で共有点をもつ．よって，求める面積は

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1 + 2\cos\theta + \cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\theta + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 1 + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

である．

（解答終）

例題 8.5. $a > 0$ とする．直交座標で表示された曲線

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

が囲む部分の面積 S を求めよ．

（解答） $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおけば，$x^2 + y^2 = r^2$ であるから，曲線の方程式は

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \qquad \therefore\ r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

と表せる．ここで，$r^2 \geqq 0$ より $\cos 2\theta \geqq 0$ であるから，θ の範囲は $-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{5\pi}{4}$ であり，曲線の対称性から第 1 象限の面積を 4 倍すればよい．よって，求める面積は

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2\,d\theta = 4a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta = 4a^2\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = 2a^2$$

である．

（解答終）

8.2　曲線の長さ

曲線の長さというと漠然とイメージできるかもしれないが，例えば連続関数だけを対象としても

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の長さのようにグラフを書くのが難しい曲線もある．そこで，曲線の長さの定義を述べてから，その求め方を説明する．

定義 8.6. （曲線の長さ）

平面上の点 A と B を端点とする曲線 C がある．このとき，点 A から B に向かって C 上に，分点

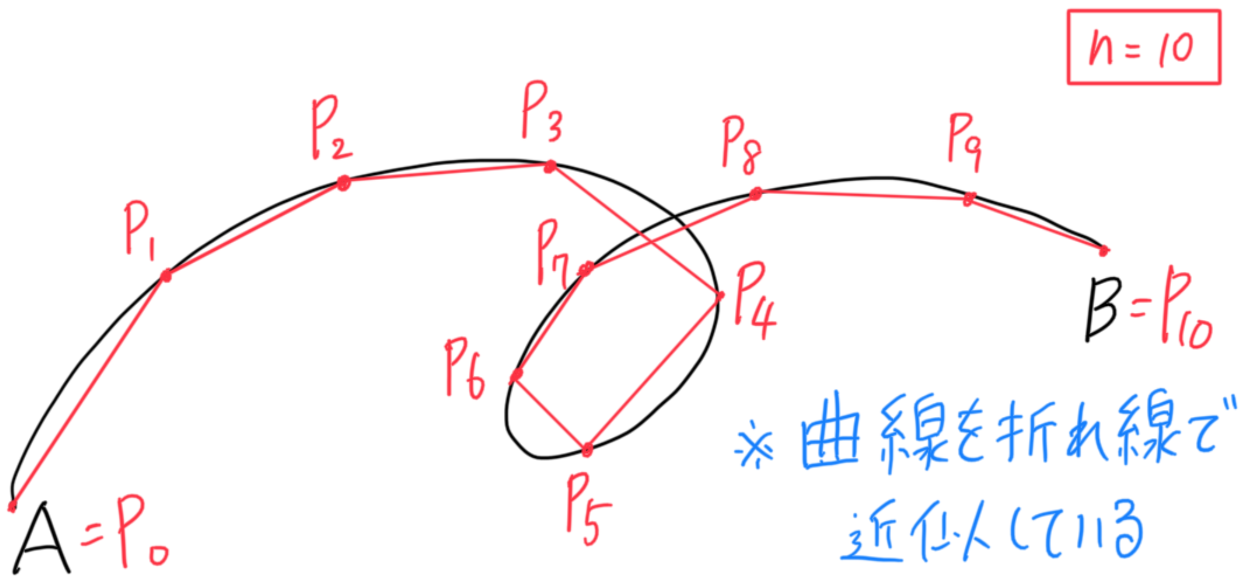
$$\mathrm{A} = \mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \ldots,\ \mathrm{P}_{n-1},\ \mathrm{P}_n = \mathrm{B}$$

をとり，曲線 C を P_{k-1} から P_k までの微小な曲線 C_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ に分割する．曲線 C_k を線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ で近似し，その長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ の総和

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} + \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} + \cdots + \overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$$

を考える．

　ここで，$\displaystyle\max_{1 \leqq k \leqq n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ が 0 に収束するように曲線 C の分割を細かくしていくとき，線分の長さの総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ が一定の値 L に収束するとき，曲線 C は**求長可能**であるといい，L を曲線 C の**長さ**という．



定理 8.7. （曲線の長さ）
曲線 C が媒介変数表示を用いて

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$

と表されていて，さらに $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ はともに C^1 級であるとする．このとき，曲線 C の弧長 L は

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{\varphi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2}\, dt$$

で与えられる．

証明． 区間 $[\alpha, \beta]$ の分割 $\Delta\colon \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$ をとると，曲線 C の分点は $\mathrm{P}_k(\varphi(t_k), \psi(t_k))$ となる．このとき，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さは

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{\{\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\}^2 + \{\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})\}^2}$$

となる．ここで，平均値の定理を 2 回用いると，ある $\xi_k, \eta_k \in (t_{k-1}, t_k)$ で

$$\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}), \qquad \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = \psi'(\eta_k)(t_k - t_{k-1})$$

と表せるものが存在するから

$$\sum_{k=1}^n \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\{\varphi'(\xi_k)\}^2 + \{\psi'(\eta_k)\}^2}\,(t_k - t_{k-1})$$

となる．この式において代表点が $\xi_k \risingdotseq \eta_k$ となっているが，$\varphi'(t)$ と $\psi'(t)$ はともに連続なので，$|\Delta| \to 0$ のときに，このリーマン和は

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\{\varphi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2}\, dt$$

に収束する（厳密に示すとやや大変）． □

特に曲線 C が関数 $y = f(x)$ のグラフならば，その長さは次の公式で求められる．

系 8.8. （グラフの長さ）
C^1 級関数のグラフ $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の弧長 L は

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$$

で与えられる．

証明． $y = f(x)$ をパラメータ表示すれば，$x = t,\ y = f(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ とも表せるから，定理 8.7 より

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}\, dt$$

が成り立つ． □

例題 8.9.　曲線 $y = \cosh x \quad (0 \leqq x \leqq \log 2)$ の弧長 L を求めよ．

（解答）　$y' = \sinh x$ と $\cosh x > 0$ より

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \sqrt{\cosh^2 x} = \cosh x$$

である．よって，求める弧長は

$$L = \int_0^{\log 2} \cosh x \, dx = \Big[\sinh x \Big]_0^{\log 2} = \sinh(\log 2) = \frac{2 - \dfrac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

である．

（解答終）

系 8.10.（極方程式で与えられた曲線の長さ）
曲線 C が極座標表示を用いて $r = f(\theta) \quad (\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ と表されていて，さらに $f(\theta)$ は C^1 級であるとする．このとき，曲線 C の弧長 L は

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f(\theta)\}^2 + \{f'(\theta)\}^2} \, d\theta$$

で与えられる．

証明.　$r = f(\theta)$ を xy 座標でパラメータ表示すれば

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

と表せて

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\}^2 + \{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\}^2 \\
&= \{f'(\theta)\}^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \{f(\theta)\}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\
&= \{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2
\end{aligned}$$

である．よって，定理 8.7 より

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \, d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f(\theta)\}^2 + \{f'(\theta)\}^2} \, d\theta$$

が成り立つ．　□

8.3　面積・曲線の長さの計算例

例題 8.11.　$a > 0$ とする．パラメータ表示された次の曲線を C とする．

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

(1) 曲線 C と x 軸が囲む部分の面積 S を求めよ．

(2) 曲線 C の長さ L を求めよ．

曲線 C はサイクロイド（cycloid）と呼ばれる．これは定直線に沿って半径 a の円が滑らずに回転するときの円周上の定点の軌跡である．

（解答）

(1)　$\dfrac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) \geqq 0$ と $y \geqq 0$ より

$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

となる．よって，$x = a(t - \sin t)$ と置換すれば，求める面積は

$$\begin{aligned} S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt &= a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt \\ &= a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt \\ &= a^2\left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

である．

(2)　$\dfrac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$，$\dfrac{dy}{dt} = a\sin t$ なので

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t = a^2(2 - 2\cos t)$$

であるから，$0 \leqq \dfrac{t}{2} \leqq \pi$ より

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{2a^2(1-\cos t)} = \sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}} = \left|2a\sin\frac{t}{2}\right| = 2a\sin\frac{t}{2}$$

となる．よって，求める弧長は

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = \left[-4a\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

である．

（解答終）

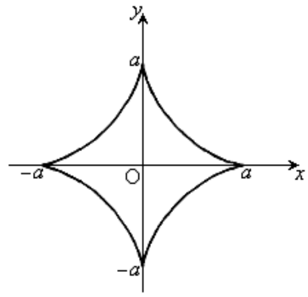
例題 8.12.　$a > 0$ とする．次の方程式で表される曲線を C とする．

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

(1) 曲線 C が囲む部分の面積 S を求めよ．

(2) 曲線 C の長さ L を求めよ．

曲線 C はアステロイド（astroid）と呼ばれる．これは半径 a の円内をその $\dfrac{1}{4}$ の半径をもつ円が滑ることなく転がるときの内円の円周上の定点の軌跡である．



（解答）　曲線 C は x 軸，y 軸に関して対称であり，また

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

とパラメータ表示できる．

(1)　第 1 象限の部分の面積を 4 倍すればよい．$x = a\cos^3 t$ とおけば

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & a \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & \to & 0 \end{array} \qquad\qquad dx = -3a\cos^2 t \sin t\, dt$$

なので

$$S = 4\int_0^a y\, dx = 4\int_{\pi/2}^0 a\sin^3 t \cdot (-3a\cos^2 t \sin t)\, dt = 12a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t\, dt$$

となる．ここで，命題 4.12 より

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t\, dt = \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t - \sin^6 t)\, dt = \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5!!}{6!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}$$

なので，求める面積は

$$S = 12a^2 \cdot \frac{\pi}{32} = \frac{3}{8}\pi a^2$$

である．

(2)　第 1 象限の部分の弧長を 4 倍すればよい．

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t \cos t$$

より

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t$$

であるから，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = |\,3a\sin t \cos t\,| = 3a\sin t \cos t$$

となる．よって，求める弧長は

$$L = 4\int_0^{\pi/2} 3a\sin t \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} 6a\sin 2t\, dt = \Big[-3a\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = 6a$$

である．

（解答終）

例題 8.13. $a > 0$ とする．次の極座標表示で表される曲線を C とする．

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

(1) 曲線 C が囲む部分の面積 S を求めよ．

(2) 曲線 C の長さ L を求めよ．

曲線 C はカージオイド（cardioid）と呼ばれる．これは半径 a の円外を同じ半径をもつ円が滑ることなく転がるときの外円の円周上の定点の軌跡である．

（解答）

(1) 曲線 C は閉曲線で，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき $r \geqq 0$ である．よって，求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4} + \cos\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta\right)d\theta \\ &= a^2\left[\frac{3}{4}\,\theta + \sin\theta + \frac{1}{8}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\,\pi a^2 \end{aligned}$$

である．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の弧長を 2 倍すればよい．

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2(1+\cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2 = 2a^2(1+\cos\theta) = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

であるから，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \left|2a\cos\frac{\theta}{2}\right| = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

となる．よって，求める弧長は

$$L = 2\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \int_0^{\pi} 4a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \left[8a\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8a$$

である．

（解答終）

8.4 回転体の体積と側面積

回転体とは限らない一般の立体の体積と表面積の計算法を第 10 章で扱う．ただし，回転体の場合にはこれらを 1 変数関数の積分のみで求めることができるので，公式だけ紹介しておくことにする．

定理 8.14. （回転体の体積）
関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続とする．このとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V は

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$

で与えられる．

定理 8.15. （回転体の側面積）
関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で C^1 級とする．このとき，曲線 $y=f(x)\quad(a\leqq x\leqq b)$ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転面の面積 S は

$$S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

で与えられる．

例題 8.16. 半径 a の球の体積と表面積を求めよ．

（解答） 半径 a の球は半円 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体である．

よって，求める体積は

$$V=\pi\int_{-a}^{a} y^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{\pi}{6}\,\{a-(-a)\}^3=\frac{4}{3}\,\pi a^3$$

である．

また，$y'=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ より

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}=\frac{a}{y}$$

であるから，求める表面積は

$$S=2\pi\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_{-a}^{a} a\,dx=4\pi a^2$$

である．

（解答終）

9　積分法の発展的応用

9.1　有名な極限公式

命題 9.1. （Wallis の公式）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}=\sqrt{\pi}$$

証明． $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$ とおく．$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $0<\sin x<1$ であるから

$$0<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x<\sin^{2n-2}x\qquad(n=1,2,3,\ldots)$$

である．これを $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上で積分すれば

$$0<I_{2n}<I_{2n-1}<I_{2n-2}\qquad\therefore\ 1<\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}}<\frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}$$

が成り立つ．ここで命題 4.12 の証明中の漸化式より $I_{2n}=\dfrac{2n-1}{2n}I_{2n-2}$ であったから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{2n}}=1$$

である．よって，はさみうち法より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}}=1$$

となる．さらに

$$I_{2n-1}=\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},\qquad I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

であるから

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}}=\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{1}{n\pi}\left\{\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right\}^2$$

となる．ゆえに

$$1=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$$

を変形すれば

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$$

が得られる．また

$$(2n)!!=2^n\cdot n!,\qquad(2n)!=(2n)!!\cdot(2n-1)!!$$

より

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n)!}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\pi}$$

が成り立つ．　□

$t>0$ のとき，不等式 $t-1 \geqq \log t$ が成り立つ．実際、$f(t)=t-1-\log t$ とおけば

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$

であるから，$f(t)$ は $t=1$ のとき極小値かつ最小値 $f(1)=0$ をとる．よって，$f(t) \geqq 0$ であり，等号成立は $t=1$ のときである．この不等式と Wallis の公式より，次の極限値が得られる．これより，十分大きな n に対して

$$n! \fallingdotseq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

であることがわかるので，階乗の近似式としてよく応用される．

命題 9.2. （Stirling の公式）

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1$$

証明. 自然数 n に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$$

とおき，これが下に有界な単調減少数列であることを示す．

$x>0,\ k=1,2,\ldots,n$ に対して，不等式 $t-1 \geqq \log t$ に $t=\dfrac{x}{k}$ を代入すれば

$$\frac{x}{k} - 1 \geqq \log\frac{x}{k} = \log x - \log k \qquad \therefore\ \log x \leqq \frac{x}{k} + \log k - 1$$

が得られる．これを $\left[k-\dfrac{1}{2}, k+\dfrac{1}{2}\right]$ 上で積分して

$$\begin{aligned}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x\,dx < \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k} + \log k - 1\right) dx &= \left[\frac{x^2}{2k}\right]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \log k - 1 \\ &= \frac{2k}{2k} + \log k - 1 = \log k\end{aligned}$$

となる．この両辺を $k=1,2,\ldots,n$ について加えると

$$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x\,dx < \sum_{k=1}^{n} \log k = \log n!$$

であり，この左辺は

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x\,dx &= \Big[x\log x - x\Big]_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{\log 2}{2} > \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n\end{aligned}$$

と評価できる．よって

$$\log n! > \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x\,dx > \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n = \log\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$$

より

$$n! > \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} \qquad \therefore\ a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} > 1$$

が成り立つから，$\{a_n\}$ は下に有界である．

次に $x>0$ のとき，相加相乗平均より

$$\frac{1}{x}+\frac{4x}{(2n+1)^2} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4x}{(2n+1)^2}}=\frac{4}{2n+1}$$

が成り立つ．これを $[n, n+1]$ 上で積分して

$$\int_n^{n+1}\left\{\frac{1}{x}+\frac{4x}{(2n+1)^2}\right\}dx > \int_n^{n+1}\frac{4}{2n+1}\,dx=\frac{4}{2n+1}$$

となる．この左辺は

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1}\left\{\frac{1}{x}+\frac{4x}{(2n+1)^2}\right\}dx &= \left[\log|x|+\frac{2x^2}{(2n+1)^2}\right]_n^{n+1}\\ &= \log(n+1)-\log n+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}=\log\frac{n+1}{n}+\frac{2}{2n+1}\end{aligned}$$

であるから

$$\log\frac{n+1}{n}+\frac{2}{2n+1}=\int_n^{n+1}\left\{\frac{1}{x}+\frac{4x}{(2n+1)^2}\right\}dx>\frac{4}{2n+1}$$

となり

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \qquad \therefore\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}>e$$

である．ゆえに

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}\,(n+1)^{n+\frac{3}{2}}e^{-n-1}}{(n+1)!}\\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}e^{-1}}{n^{n+\frac{1}{2}}}\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-1}>1\end{aligned}$$

が成り立つから，$a_n>a_{n+1}$ である．

したがって，数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列なので，実数の連続性より収束する．その極限値を

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n$$

とおけば，$a_n>1$ であるから $\alpha \geqq 1$ である．また

$$\frac{{a_n}^2}{a_{2n}}=\left(\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}\right)^2\cdot\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{(2n)!}=\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}(n!)^2}{n^{2n+1}(2n)!}=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

であるから，$n\to\infty$ とすれば，Wallis の公式より

$$\frac{\alpha^2}{\alpha}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi} \qquad \therefore\ \alpha=\sqrt{2\pi}$$

となる．よって

$$1=\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2\pi}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$$

が成り立つ． □

9.2 フーリエ級数展開への準備

命題 9.3. （三角関数の直交性）
自然数 m, n に対して，次が成り立つ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

証明. まず $\sin mx$ は奇関数，$\cos nx$ は偶関数であるから，$\sin mx \cos nx$ は奇関数であるので

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

が成り立つ．

次に積和の公式より

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} \left\{ \cos(m-n)x - \cos(m+n)x \right\}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} \left\{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \right\}$$

であり，これらは偶関数である．よって，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_{0}^{\pi} \left\{ \cos(m-n)x - \cos(m+n)x \right\} dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_{0}^{\pi} \left\{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \right\} dx$$

であるから，$m = n$ ならば

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \int_{0}^{\pi} (1 - \cos 2mx) \, dx = \left[x - \frac{\sin 2mx}{2m} \right]_0^{\pi} = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \int_{0}^{\pi} (1 + \cos 2mx) \, dx = \left[x + \frac{\sin 2mx}{2m} \right]_0^{\pi} = \pi$$

であり，$m \neq n$ ならば

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_0^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_0^{\pi} = 0$$

が成り立つ． □

命題 9.4.　関数 $f(x)$ を実数 a_n と b_n を用いて

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$$

とおくと

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}({a_n}^2 + {b_n}^2)$$

が成り立つ.

証明.　$\{f(x)\}^2$ を展開すると

$$\{f(x)\}^2 = \frac{{a_0}^2}{4} + a_0\sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \left\{\sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right\}^2$$

である．ここで

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

なので，展開式の両辺を $[-\pi, \pi]$ 上で積分すれば

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{\pi {a_0}^2}{2} + \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right\}^2 dx$$

となる．また，この第 2 項の被積分関数は

$$\left\{\sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right\}^2 = \sum_{n,m=1}^{N}(a_n a_m \cos nx \cos mx + b_n b_m \sin nx \sin mx + 2a_n b_m \cos nx \sin mx)$$

となるから，これを $[-\pi, \pi]$ 上で積分すれば，命題 9.3 の結果より多くの項が 0 となる．さらに，残る項の計算は

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right\}^2 dx &= \sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}({a_n}^2\cos^2 nx + {b_n}^2\sin^2 nx)\,dx \\ &= \pi\sum_{n=1}^{N}({a_n}^2 + {b_n}^2)\end{aligned}$$

となる．よって

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{\pi {a_0}^2}{2} + \pi\sum_{n=1}^{N}({a_n}^2 + {b_n}^2)$$

であるから

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}({a_n}^2 + {b_n}^2)$$

が成り立つ．　□

この計算は周期 2π の周期関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開したときに役に立つ結果である．この命題で $N \to \infty$ とした無限級数版（パーセバルの等式）をいずれ目にする機会があると思う.

9.3 ラプラス変換と常微分方程式

定義 9.5. （ラプラス変換）

関数 $f(t)$ は区間 $[0,\infty)$ において不定積分をもつとする．このとき，次の広義積分

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

が収束するような実数 s に対して

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

とおく．この関数 $F(s)$ を $f(t)$ の**ラプラス変換**（Laplace transformation）といい，$\mathcal{L}[f(t)](s)=F(s)$ で表す．

また，$\mathcal{L}[f(t)](s)=F(s)$ であるとき，$F(s)$ から $f(t)$ への対応を**逆ラプラス変換**といい，$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)=f(t)$ で表す．

通常，変数 s は複素数であるが，初歩のうちは実数だと思って計算してもそれほど困らない．ただし，上の定義では逆ラプラス変換の具体的な公式を述べていないが，それらの進んだ内容を理解するには複素関数論の知識が必要となる．

なお，関数の変数で t を用いたのは，時刻を変数にとることが多いからである．このラプラス変換は電気工学や制御工学でよく用いられ，電流や電気信号の流れを計算する際に有用なものである

以下に代表的なラプラス変換の例を挙げる．

命題 9.6. （初等関数のラプラス変換）

ω は実数とし，n は自然数とする．

(1) $\mathcal{L}[e^{\omega t}](s)=\dfrac{1}{s-\omega}\qquad(s>\omega)$

(2) $\mathcal{L}[t^n](s)=\dfrac{n!}{s^{n+1}}\qquad(s>0)$

(3) $\mathcal{L}[\cos\omega t](s)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\qquad(s>0)$

(4) $\mathcal{L}[\sin\omega t](s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\qquad(s>0)$

(5) $\mathcal{L}[\cosh\omega t](s)=\dfrac{s}{s^2-\omega^2}\qquad(s>|\omega|)$

(6) $\mathcal{L}[\sinh\omega t](s)=\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}\qquad(s>|\omega|)$

証明. いずれも簡単な広義積分の計算やガンマ関数の応用なので演習問題とする． □

定理 9.7. （ラプラス変換可能であるための十分条件）

関数 $f(t)$ は区間 $[0,\infty)$ 上で連続で，ある定数 α と正の定数 M に対して

$$|f(t)|\leqq Me^{\alpha t}\qquad(t\geqq 0)$$

をみたすならば，$s>\alpha$ である s に対して $\mathcal{L}[f(t)](s)$ は定義される．

証明. 仮定より

$$|f(t)e^{-st}|=|f(t)|e^{-st}\leqq Me^{\alpha t}e^{-st}=Me^{-(s-\alpha)t}$$

であり，$s>\alpha$ であるから，右辺の広義積分は

$$\int_0^\infty Me^{-(s-\alpha)t}\,dt=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{-M}{s-\alpha}\,e^{-(s-\alpha)t}\right]_{t=0}^{t=R}=\lim_{R\to\infty}\frac{M}{s-\alpha}\left(1-e^{-(s-\alpha)R}\right)=\frac{M}{s-\alpha}$$

と収束する．よって，定理 6.16（比較判定法）により広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ も（絶対）収束する． □

s を複素数で考えるならば，定理 9.7 の s の範囲は $\mathrm{Re}(s)>\alpha$ となる．ここで，$z\in\mathbb{C}$ の実部を $\mathrm{Re}(z)$ で表した．

ラプラス変換については以下の性質が成り立つ．

定理 9.8. **（ラプラス変換の線形性）**
関数 $f(t)$ と $g(t)$ はともに区間 $[0,\infty)$ 上で連続で，$s>\alpha$ でラプラス変換可能とする．また，a,b を実数とする．このとき，$s>\alpha$ に対して

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)](s)=a\mathcal{L}[f(t)](s)+b\mathcal{L}[g(t)](s)$$

が成り立つ．

証明. $f(t)e^{-st}$ と $g(t)e^{-st}$ がともに区間 $[0,\infty)$ 上で広義積分可能ならば，$\{af(t)+bg(t)\}e^{-st}$ も広義積分可能なので

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[af(t)+bg(t)](s)&=\int_0^\infty\{af(t)+bg(t)\}e^{-st}\,dt\\&=a\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt+b\int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt=a\mathcal{L}[f(t)](s)+b\mathcal{L}[g(t)](s)\end{aligned}$$

が成り立つ． □

定理 9.9. **（導関数のラプラス変換）**
関数 $f(t)$ は区間 $[0,\infty)$ 上で C^1 級で，ある定数 α と正の定数 M に対して

$$|f(t)|\leqq Me^{\alpha t}\qquad(t\geqq 0)$$

をみたすとする．このとき，$s>\alpha$ に対して

$$\mathcal{L}[f'(t)](s)=s\mathcal{L}[f(t)](s)-f(0)$$

が成り立つ．

証明. $R>0$ とすれば

$$\int_0^R f'(t)e^{-st}\,dt=\Big[f(t)e^{-st}\Big]_0^R-\int_0^R f(t)(-s)e^{-st}\,dt=f(R)e^{-sR}-f(0)+s\int_0^R f(t)e^{-st}\,dt$$

となる．この両辺で $R\to\infty$ とすれば，$s>\alpha$ より

$$|f(R)e^{-sR}|\leqq Me^{-(s-\alpha)R}\quad\longrightarrow\quad 0\qquad(R\to\infty)$$

であるから

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt=s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt-f(0)$$

が成り立つ．これが求める等式である． □

これを繰り返せば，2 階導関数については

$$\mathcal{L}[f''(t)](s)=s\mathcal{L}[f'(t)](s)-f'(0)=s\big(s\mathcal{L}[f(t)](s)-f(0)\big)-f'(0)=s^2\mathcal{L}[f(t)](s)-sf(0)-f'(0)$$

が成り立つ．より高階の導関数に関しても同様の公式が成り立つ．
これらの定理より，簡単な常微分方程式を解くことができる．

例題 9.10.　次の微分方程式の解 $y = y(t)$ を求めよ．

(1) $y'' - 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 1$　　(2) $y'' - 5y' + 6y = t, \qquad y(0) = y'(0) = 1$

(3) $y'' - 5y' + 6y = \sin t, \qquad y(0) = y'(0) = 1$

（解答）

(1)　$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ とおく．微分方程式の両辺のラプラス変換をとれば

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y'' - 5y' + 6y] &= \bigl(s^2 Y - sy(0) - y'(0)\bigr) - 5\bigl(sY - y(0)\bigr) + 6Y \\ &= (s^2 - 5s + 6)Y - s + 4 = 0\end{aligned}$$

が得られる．これを Y について解けば

$$Y = \frac{s-4}{s^2 - 5s + 6} = \frac{s-4}{(s-2)(s-3)} = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-3}$$

が成り立つ．この両辺のラプラス逆変換をとると，$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \dfrac{1}{s-a}$ であったから，求める解は

$$y = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] = 2e^{2t} - e^{3t}$$

である．

(2)　$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ とおく．微分方程式の両辺のラプラス変換をとれば，$\mathcal{L}[t^n](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ より

$$(s^2 - 5s + 6)Y - s + 4 = \frac{1}{s^2}$$

が得られる．これを Y について解けば

$$\begin{aligned}Y &= \frac{s-4}{(s-2)(s-3)} + \frac{1}{s^2(s-2)(s-3)} = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-3} + \frac{5}{36s} + \frac{1}{6s^2} - \frac{1}{4(s-2)} + \frac{1}{9(s-3)} \\ &= \frac{7}{4}\frac{1}{s-2} - \frac{8}{9}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{6}\frac{1}{s^2} + \frac{5}{36}\frac{1}{s}\end{aligned}$$

が成り立つ．この両辺のラプラス逆変換をとると，求める解は

$$y = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{7}{4}e^{2t} - \frac{8}{9}e^{3t} + \frac{t}{6} + \frac{5}{36}$$

である．

(3)　$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ とおく．微分方程式の両辺のラプラス変換をとれば，$\mathcal{L}[\sin t](s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ より

$$(s^2 - 5s + 6)Y - s + 4 = \frac{1}{s^2+1}$$

が得られる．これを Y について解けば

$$\begin{aligned}Y &= \frac{s-4}{(s-2)(s-3)} + \frac{1}{(s-2)(s-3)(s^2+1)} = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-3} + \frac{1}{10}\left(\frac{-2}{s-2} + \frac{1}{s-3} + \frac{s+1}{s^2+1}\right) \\ &= \frac{9}{5}\frac{1}{s-2} - \frac{9}{10}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{10}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{10}\frac{s}{s^2+1}\end{aligned}$$

が成り立つ．この両辺のラプラス逆変換をとると，$\mathcal{L}[\cos t](s) = \dfrac{s}{s^2+1}$ より，求める解は

$$y = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{9}{5}e^{2t} - \frac{9}{10}e^{3t} + \frac{1}{10}\sin t + \frac{1}{10}\cos t$$

である．

（解答終）

9.4 スツルムリウビル型微分方程式の解のなす直交系

命題 9.11.（ルジャンドル多項式）

自然数 n に対して

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2-1)^n$$

とおくと，以下が成り立つ．

(1) $P_n(x)$ は n 次多項式

(2) $(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$

この $P_n(x)$ を**ルジャンドル多項式**（Legendre polynomials）という．

証明． $f_n(x) = (x^2-1)^n$ とおくと，これは展開すれば $2n$ 次の多項式で

$$f_n(x) = x^{2n} - nx^{2n-2} + \cdots + (-1)^n \tag{9.1}$$

である．

(1) $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\,\dfrac{d^n}{dx^n}\,f_n(x)$ であるから，$2n$ 次多項式を n 回微分したものなので n 次多項式である．

(2) $f_n(x) = (x^2-1)^n$ を微分すれば

$$f_n'(x) = n(x^2-1)^{n-1}\cdot 2x = 2nx(x^2-1)^{n-1}$$

より

$$(x^2-1)f_n'(x) = 2nxf_n(x) \tag{9.2}$$

が成り立つ．この両辺を $n+1$ 回微分すると，ライプニッツの定理より左辺は

$$\begin{aligned}\left\{(x^2-1)f_n'(x)\right\}^{(n+1)} &= (x^2-1)f_n^{(n+2)}(x) + {}_{n+1}\mathrm{C}_1(x^2-1)'f_n^{(n+1)}(x) + {}_{n+1}\mathrm{C}_2(x^2-1)''f_n^{(n)}(x) \\ &= (x^2-1)f_n^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)f_n^{(n+1)}(x) + n(n+1)f_n^{(n)}(x)\end{aligned}$$

であり，右辺は

$$\begin{aligned}\{2nxf_n(x)\}^{(n+1)} &= 2nxf_n^{(n+1)}(x) + {}_{n+1}\mathrm{C}_1(2nx)'f_n^{(n)}(x) \\ &= 2nxf_n^{(n+1)}(x) + 2n(n+1)f_n^{(n)}(x)\end{aligned}$$

となる．よって，これらを (9.2)に代入すれば

$$(1-x^2)f_n^{(n+2)}(x) - 2xf_n^{(n+1)}(x) + n(n+1)f_n^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つ．この両辺を $2^n n!$ で割れば，求める等式

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

が得られる．

(3)　$m \leqq n$ としても一般性を失わない．また

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{1}{2^{m+n}m!n!}\int_{-1}^{1} f_m^{(m)}(x)f_n^{(n)}(x)\,dx \tag{9.3}$$

である．ここで，数学的帰納法により $k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して，ある多項式 $g_k(x)$ を用いて

$$f_n^{(k)}(x) = (x^2-1)^{n-k}g_k(x)$$

と表せるから

$$f_n^{(k)}(1) = f_n^{(k)}(-1) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{9.4}$$

となる．よって，(9.4)を用いて部分積分すれば

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f_m^{(m)}(x)f_n^{(n)}(x)\,dx &= \left[f_m^{(m)}(x)f_n^{(n-1)}(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f_m^{(m+1)}(x)f_n^{(n-1)}(x)\,dx \\ &= -\int_{-1}^{1} f_m^{(m+1)}(x)f_n^{(n-1)}(x)\,dx\end{aligned}$$

であるから，これを繰り返せば

$$\int_{-1}^{1} f_m^{(m)}(x)f_n^{(n)}(x)\,dx = (-1)^m\int_{-1}^{1} f_m^{(2m)}(x)f_n^{(n-m)}(x)\,dx \tag{9.5}$$

となる．さらに，(9.1)より

$$f_m^{(2m)}(x) = (2m)! = 2^m m!(2m-1)!! \tag{9.6}$$

なので，(9.3), (9.5), (9.6)から

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{(-1)^m(2m-1)!!}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f_n^{(n-m)}(x)\,dx \tag{9.7}$$

が成り立つ．

ゆえに，$m < n$ のときは，(9.4)より

$$\int_{-1}^{1} f_n^{(n-m)}(x)\,dx = \left[f_n^{(n-m-1)}(x)\right]_{-1}^{1} = 0$$

なので，(9.7)より

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0$$

となる．$m = n$ のときは，(9.7)より

$$\int_{-1}^{1} \{P_n(x)\}^2\,dx = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = \frac{2(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx$$

である．ここで，$x = \sin\theta$ と置換積分すれば

$$\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx = \int_{0}^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)^n\cos\theta\,d\theta = \int_{0}^{\pi/2}\cos^{2n+1}\theta\,d\theta = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

より

$$\int_{-1}^{1} \{P_n(x)\}^2\,dx = \frac{2(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1}$$

が成り立つ．

□

命題 9.12.（ラゲール多項式）
自然数 n に対して

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

とおくと，以下が成り立つ．

(1) $L_n(x)$ は n 次多項式

(2) $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}\,dx = \begin{cases} (n!)^2 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$

この $L_n(x)$ を**ラゲール多項式**（Laguerre polynomials）という．

証明. $f_n(x) = x^n e^{-x}$ とおくと，$L_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x)$ である．

(1) ライプニッツの定理より

$$f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (x^n)^{(n-k)}(e^{-x})^{(k)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_n\mathrm{C}_k \frac{n!}{k!}\,x^k e^{-x}$$

なので

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_n\mathrm{C}_k \frac{n!}{k!}\,x^k \tag{9.8}$$

は n 次多項式で，$L_n(x)$ の x^n の係数は $(-1)^n$ である．

(2) $f_n(x) = x^n e^{-x}$ を微分すれば，$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$ より

$$xf_n'(x) = (n-x)f_n(x) \tag{9.9}$$

が成り立つ．この両辺を $n+1$ 回微分すると，ライプニッツの定理より左辺は

$$\begin{aligned}\{xf_n'(x)\}^{(n+1)} &= xf_n^{(n+2)}(x) + {}_{n+1}\mathrm{C}_1 (x)' f_n^{(n+1)}(x) \\ &= xf_n^{(n+2)}(x) + (n+1)f_n^{(n+1)}(x)\end{aligned}$$

であり，右辺は

$$\begin{aligned}\{(n-x)f_n(x)\}^{(n+1)} &= (n-x)f_n^{(n+1)}(x) + {}_{n+1}\mathrm{C}_1 (n-x)' f_n^{(n)}(x) \\ &= (n-x)f_n^{(n+1)}(x) - (n+1)f_n^{(n)}(x)\end{aligned}$$

となる．よって，これらを (9.9)に代入すれば

$$xf_n^{(n+2)}(x) + (x+1)f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)f_n^{(n)}(x) = 0 \tag{9.10}$$

が成り立つ．また，$f_n^{(n)}(x) = e^{-x}L_n(x)$ なので

$$f_n^{(n+1)}(x) = e^{-x}\{L_n'(x) - L_n(x)\}$$

$$f_n^{(n+2)}(x) = e^{-x}\{L_n''(x) - 2L_n'(x) + L_n(x)\}$$

であるから，これらを (9.10)に代入して e^x をかければ

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$$

が得られる．

(3)　$m \leqq n$ としても一般性を失わない．また，(1) より $L_n(x)$ は多項式なので，広義積分

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}\,dx = \int_0^\infty L_m(x)f_n^{(n)}(x)\,dx \tag{9.11}$$

は (多項式) $\times e^{-x}$ の形だから，命題 6.32(2) より収束する．また，数学的帰納法により $k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して，ある多項式 $g_k(x)$ を用いて

$$f_n^{(k)}(x) = x^{n-k}g_k(x)e^{-x}$$

と表せるから

$$f_n^{(k)}(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{9.12}$$

となる．よって，$t > 0$ として，(9.12)を用いて部分積分すれば

$$\begin{aligned}\int_0^t L_m(x)f_n^{(n)}(x)\,dx &= \Big[L_m(x)f_n^{(n-1)}(x)\Big]_0^t - \int_0^t L_m'(x)f_n^{(n-1)}(x)\,dx \\ &= L_m(t)f_n^{(n-1)}(t) - \int_0^t L_m'(x)f_n^{(n-1)}(x)\,dx\end{aligned}$$

である．ここで，$k = 0, 1, \ldots, m$ に対して，$L_m^{(k)}(x)f_n^{(l)}(x)$ も (多項式) $\times e^{-x}$ の形なので，$t \to \infty$ とすれば

$$\int_0^\infty L_m(x)f_n^{(n)}(x)\,dx = -\int_0^\infty L_m'(x)f_n^{(n-1)}(x)\,dx$$

が得られる．これを繰り返せば

$$\int_0^\infty L_m(x)f_n^{(n)}(x)\,dx = (-1)^m\int_0^\infty L_m^{(m)}(x)f_n^{(n-m)}(x)\,dx \tag{9.13}$$

となる．さらに，(9.8)より

$$L_m^{(m)}(x) = (-1)^m m! \tag{9.14}$$

なので，(9.11), (9.13), (9.14)から

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}\,dx = m!\int_0^\infty f_n^{(n-m)}(x)\,dx \tag{9.15}$$

が成り立つ．

ゆえに，$m < n$ のときは，(9.12)より

$$\int_0^\infty f_n^{(n-m)}(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big[f_n^{(n-m-1)}(x)\Big]_0^t = \lim_{t\to\infty} f_n^{(n-m-1)}(t) = 0$$

なので，(9.15)より

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}\,dx = 0$$

となる．$m = n$ のときは，(9.15)とガンマ関数の性質から

$$\int_0^\infty \{L_n(x)\}^2e^{-x}\,dx = n!\int_0^\infty f_n(x)\,dx = n!\int_0^\infty x^ne^{-x}\,dx = n!\,\Gamma(n+1) = (n!)^2$$

が成り立つ．

□

命題 9.13. （エルミート多項式）

自然数 n に対して

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

とおくと，以下が成り立つ．

(1) $H_n(x)$ は n 次多項式

(2) $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 2^n n!\sqrt{\pi} & (m = n) \\ \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$

この $H_n(x)$ を**エルミート多項式**（Hermite polynomials）という．

証明． $f(x) = e^{-x^2}$ とおくと，$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} f^{(n)}(x)$ である．

(1) $k = 1, 2, \ldots$ に対して，$k-1$ 次以下の多項式 $g_{k-1}(x)$ を用いて

$$f^{(k)}(x) = \{(-2)^k x^k + g_{k-1}(x)\}e^{-x^2} \tag{9.16}$$

と表せることが数学的帰納法により示せる．よって

$$H_n(x) = 2^n x^n + (-1)^n g_{n-1}(x) \tag{9.17}$$

は n 次多項式で，$H_n(x)$ の x^n の係数は 2^n である．

(2) $f(x) = e^{-x^2}$ を微分すれば，$f'(x) = -2xe^{-x^2}$ より

$$f'(x) = -2xf(x)$$

が成り立つ．この両辺を $n+1$ 回微分すると，ライプニッツの定理より

$$\begin{aligned} f^{(n+2)}(x) = \{-2xf(x)\}^{(n+1)} &= -2xf^{(n+1)}(x) + {}_{n+1}\mathrm{C}_1(-2x)'f^{(n)}(x) \\ &= -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x) \end{aligned}$$

となる．よって

$$f^{(n+2)}(x) + 2xf^{(n+1)}(x) + 2(n+1)f^{(n)}(x) = 0 \tag{9.18}$$

が成り立つ．また，$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$ なので

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n e^{-x^2}\{H_n'(x) - 2xH_n(x)\}$$

$$f^{(n+2)}(x) = (-1)^n e^{-x^2}\{H_n''(x) - 4xH_n'(x) + (4x^2 - 2)H_n(x)\}$$

であるから，これらを (9.18)に代入して $(-1)^n e^{x^2}$ をかければ

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

が得られる．

(3)　$m \leqq n$ としても一般性を失わない．また，(1) より $H_n(x)$ は多項式なので，広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)f^{(n)}(x)\,dx \tag{9.19}$$

は (多項式) $\times\, e^{-x^2}$ の形だから，命題 6.32(2) と同様の理由より収束する．よって，$s < 0 < t$ として部分積分すれば

$$\begin{aligned}\int_s^t H_m(x)f^{(n)}(x)\,dx &= \Big[H_m(x)f^{(n-1)}(x)\Big]_s^t - \int_s^t H_m'(x)f^{(n-1)}(x)\,dx \\ &= H_m(t)f^{(n-1)}(t) - H_m(s)f^{(n-1)}(s) - \int_s^t H_m'(x)f^{(n-1)}(x)\,dx\end{aligned}$$

である．ここで，$k = 0, 1, \ldots, m$ に対して，$H_m^{(k)}(x)f^{(l)}(x)$ も (多項式)$\times\, e^{-x^2}$ の形なので，$s \to -\infty$, $t \to \infty$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)f^{(n)}(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} H_m'(x)f^{(n-1)}(x)\,dx$$

が得られる．これを繰り返せば

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)f^{(n)}(x)\,dx = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(m)}(x)f^{(n-m)}(x)\,dx \tag{9.20}$$

となる．さらに，(9.17)より

$$H_m^{(m)}(x) = 2^m m! \tag{9.21}$$

なので，(9.19), (9.20), (9.21)から

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = (-1)^{m+n} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-m)}(x)\,dx \tag{9.22}$$

が成り立つ．

ゆえに，$m < n$ のときは，(9.16)より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-m)}(x)\,dx = \lim_{s\to-\infty,\, t\to\infty} \Big[f^{(n-m-1)}(x)\Big]_s^t = 0$$

なので，(9.22)より

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = 0$$

となる．$m = n$ のときは，命題 7.8 の証明中で示したことより

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2I = \sqrt{\pi}$$

であるから，(9.22)より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{H_n(x)\}^2 e^{-x^2}\,dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

が成り立つ．

□

ここまでの多項式列について，ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ のみたす微分方程式

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

は次の形

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}\right)P_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

で表せる．同様にラゲール多項式 $L_n(x)$ のみたす微分方程式

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$$

は

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{d}{dx}\right)L_n(x) + ne^{-x}L_n(x) = 0$$

と，エルミート多項式 $H_n(x)$ のみたす微分方程式

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

は

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{d}{dx}\right)H_n(x) + 2ne^{-x^2}H_n(x) = 0$$

と表せる．これらは関数 $p(x), \rho(x)$ と実数 λ を用いて

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)u(x) = -\lambda\rho(x)u(x)$$

とまとめることができる．これは物理でもよく現れるスツルムリウビル (Sturm-Liouville) 方程式と呼ばれる微分方程式の特別な例となっている．

10　章末問題

練習問題 10.1.　自然数 n と実数 $0 \leqq x \leqq 1$ に対して，不等式

$$\frac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ．これを利用して，数列

$$a_n = \left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)\left(1+\frac{3^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)$$

の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

練習問題 10.2.　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n}^{3n}\frac{5kn-19n^2}{(n+k)(k^2-4kn+7n^2)}$$

練習問題 10.3.　自然数 n に対して

$$S_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$

とおく．このとき，不等式

$$\frac{1}{(n+1)^2\pi} \leqq S_n \leqq \frac{1}{n^2\pi} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

が成り立つことを示せ．また，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$ の値を求めよ．

練習問題 10.4.　n が 3 以上の自然数であるとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2} < \int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{\pi}{6}$$

練習問題 10.5. $\mathbb{R}$ 上で定義された C^1 級関数 $f(x)$ が次の関係式

$$f(x) = x^2 - \int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$$

をみたしている．このとき，次の手順に従って関数 $f(x)$ を求めよ．

(1) $f'(x) = 2x - f(x)$ となることを示せ．

(2) $\{e^x f(x)\}'$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ を求めよ．

練習問題 10.6. $t > e$ を定義域とする関数 $f(t)$ と $g(t)$ を

$$f(t) = \int_1^e \frac{t^2 \log x}{t-x}\,dx, \qquad g(t) = \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t-x}\,dx$$

で定める．

(1) $f(t) - g(t)$ を t の 1 次式で表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \left\{ f(t) - \frac{bt^2}{t-a} \right\} = 0$ となる定数 a と b を求めよ．

練習問題 10.7. 次の広義積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty (\sqrt{x^2+1}-x)^2\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx$

練習問題 10.8. 次の広義積分の収束・発散を調べよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\tan x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+\log x}\,dx$

練習問題 10.9. $p > 0,\ q > 0$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(\log x)^{q-1}}{x^{p+1}}\,dx$ をガンマ関数で表せ．

練習問題 10.10. $\displaystyle I = \int_1^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx$ とおく．

(1) 広義積分 I は収束することを示せ．

(2) I において $s = \dfrac{1}{x}$ とおくことにより，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx$ は収束し，その値は 0 であることを示せ．

(3) $a > 0$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx$ の値を求めよ．

練習問題 10.11. $a>0$ とする．サイクロイド曲線

$$C\colon x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\qquad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

について，以下の値を求めよ．

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれる部分 D の面積

(2) 曲線 C の弧長

(3) D を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積

(4) D を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の表面積

発展問題 10.12. ガンマ関数・ベータ関数と置換積分を利用して，次の広義積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos^4\theta\,d\theta$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\cos^4\theta\,d\theta$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^4}\,dx\qquad \left(t=\frac{1}{x+1}\right)$

(4) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx\qquad (t=\sqrt{x})$

発展問題 10.13. $f(x)$ は区間 $I=[0,\infty)$ 上の非負値連続関数で，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)\,dx$ が収束するとする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ ではないような $f(x)$ の例を挙げよ．

(2) $f(x)$ が I 上で一様連続ならば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ であることを示せ．

発展問題 10.14. $-1<a<1$ とする．自然数 n に対して，等式

$$\int_0^{a}\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}-\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

が成り立つことを示せ．また，次の等式を示せ．

$$\log\frac{1+a}{1-a}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

発展問題 10.15. $a>0$ とする．次でパラメータ表示される曲線

$$C\colon x=a(1+\cos t)\cos t,\quad y=a(1+\cos t)\sin t\qquad (0\leqq t\leqq \pi)$$

の弧長を求めよ．

発展問題 10.16. 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}\,dx$ の値を求めよ．

第7章　級数と関数項級数

この章ではここまでに学習した極限・微分法・積分法を利用して，いろいろな計算を行う方法を紹介する．

まずそのための準備として，部分和を求められない級数の収束・発散についての判定法を扱う．第4章においては無限級数が与えられたときにその部分和を直接計算し，その収束・発散について調べる方法を学習した．しかし，実際には部分和を具体的に求められない無限級数の方が圧倒的に多い．そこで，不等式や広義積分および級数の一般項から収束・発散を判定する方法について学習する．何か級数の値をパソコンで近似的に求める場合にはその収束性を保証しておくことが重要となるので，具体的な和が求められない級数の扱いに習熟できるよう練習すること．

その後に関数の無限級数である関数項級数についての議論を展開し，一様収束性の概念を用いて項別微分・項別積分ができる条件を説明する．

それらを利用して，整級数を利用したさまざまな近似計算の方法や微分方程式の解法などを紹介する．また，これまでに証明していなかった関数のマクローリン展開の公式もすべて証明する．

1　級数の収束・発散

1.1　基本的事項の復習

第 3 章 4 節で説明した級数の定義と性質をもう一度述べておく．証明などはそちらを参照すること．

定義 1.1.（級数の定義）

(1)　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各項を形式的に $+$ でつないだ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のつくる級数といい，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と表す．

(2)　第 n 項までの和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を第 n 部分和といい，数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するか発散するかに応じて，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束**するまたは**発散**するという．部分和が収束する場合に $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ を級数の和といい，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ と書く．また，$S = \pm\infty$ となる場合にも，それぞれ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$ で表す．

定理 1.2.（級数が収束する必要条件）

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束しないならば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

命題 1.3.（無限等比級数）　$a \neq 0$ とする．

(1) $|r| < 1$ のとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は収束し，その和は $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}$ である．

(2) $|r| \geqq 1$ のとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は発散する．

定理 1.4.（収束する級数の和）

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するならば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ も収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

が成り立つ．

すべての無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について，その部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ が具体的に n の式で表せるとは限らない．そこで本節では，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するか発散するかを部分和を直接計算せずに判定する方法について考察する．

1.2 正項級数の収束・発散の判定法

最初から一般の場合を扱うのは難しいので，まずは簡単な場合から考えることにする．

定義 1.5. （正項級数）
級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ がすべての自然数 n に対して $a_n \geqq 0$ であるとき，**正項級数**であるという．

正項級数の定義は $a_n \geqq 0$ となることだが，$a_n = 0$ という項がいくつかあっても級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散および級数の和には関係ないから，特に断りがなければ常に $a_n > 0$ の場合を考えればよい．

定理 1.6. （正項級数の収束条件）
正項級数は収束するか正の無限大に発散するかのいずれかである．収束するための必要十分条件は，部分和が有界になることである．

証明. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を正項級数とする．このとき，部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を考えれば，$a_n \geqq 0$ より $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である．よって，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界ならば実数の連続性より収束し，有界でなければ正の無限大に発散する． □

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対しては，その部分和のなす数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加であるから，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$ は ∞ を含めて確定する．ゆえに，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は記号として意味をもつ．

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の部分和を求められない場合には，広義積分のときと同様に比較判定法を用いればよい．

定理 1.7. （正項級数の比較判定法）
正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ において，$a_n \leqq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ であるとする．このとき

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も発散する．

証明. 部分和を $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ とおく．このとき，$0 \leqq a_n \leqq b_n$ より，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに単調増加数列で，$S_n \leqq T_n$ が成り立つ．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するとし，その和を $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ とおく．このとき，$S_n \leqq T_n \leqq T$ より $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列となるから収束する．よって，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が正の無限大に発散するとする．このとき，$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ であるから，$S_n \leqq T_n$ より $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ となる．よって，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は正の無限大に発散する．

□

注意 1.8. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の有限個の項の値は級数の収束・発散には関係がない．よって，定理 1.7 の仮定は『ある自然数 N が存在して $a_n \leqq b_n \quad (n \geqq N)$ が成り立つ』としてもよい．

数列に関しても同位の無限小という概念が定義できて，次の定理が成り立つ．

定義 1.9. **（同位の無限小）**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 でない実数 c に対して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

が成り立つとき，a_n と b_n は**同位の無限小**という．

定理 1.10. **（正項級数の比較判定法）**
正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ において，a_n と b_n が同位の無限小とする．このとき

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も収束する．

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も発散する．

証明. $a_n > 0,\ b_n > 0$ としてよい．$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ および $c > 0$ であるから，ある自然数 $N = N(c/2)$ で

$$n \geqq N \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \frac{c}{2}$$

となるものが存在する．よって，$n \geqq N$ ならば

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \frac{c}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{c}{2}\, b_n < a_n < \frac{3c}{2}\, b_n$$

が成り立つ．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，上の左側の不等式より

$$0 < b_n < \frac{2}{c}\, a_n \qquad (n \geq N)$$

となるから，比較判定法より $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も収束する．

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ならば，上の右側の不等式より

$$0 < \frac{2}{3c}\, a_n < b_n \qquad (n \geq N)$$

となるから，比較判定法より $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ である．

□

比較判定法を有効に使えるようにするためには，収束・発散を簡単に判定できる級数の例を知っておくことが重要である．そこで，もっとも代表的な級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ について調べることにする．そのために広義積分を利用した判定法を紹介する．なお，この級数は $\alpha \leqq 0$ ならば明らかに発散するから，$\alpha > 0$ の場合を考える．

定義 1.11. **（一般調和級数）**

$\alpha > 0$ に対して，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ を**一般調和級数**とよばれる．

定理 1.12. **（正項級数の比較判定法）**

関数 $f(x)$ は区間 $[1, \infty)$ 上で連続で，さらに $f(x) > 0$ かつ単調減少とする．このとき

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ が収束するならば，正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ も収束する．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ が発散するならば，正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ も発散する．

証明. $f(x)$ は単調減少なので

$$f(k+1) \leqq f(x) \leqq f(k) \qquad (k \leqq x \leqq k+1)$$

より，この両辺を $[k, k+1]$ 上で積分すれば

$$f(k+1) \leqq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqq f(k)$$

となる．これを $k = 1, 2, \ldots, n$ について和をとれば，次の不等式が成り立つ．

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

(1) $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ が収束するならば，上の左側の不等式と $f(x) > 0$ より

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqq \int_1^\infty f(x)\,dx$$

となる．よって，部分和が上に有界なので，正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ は収束する．

(2) $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx = \infty$ ならば，上の右側の不等式

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

において $n \to \infty$ とすれば，部分和が正の無限大に発散する．よって，正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ は発散する．

□

例題 1.13. **（一般調和級数の収束条件）**

一般調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束するための必要十分条件は $\alpha > 1$ であることを示せ．

（解答） 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ は区間 $[1, \infty)$ 上で連続で，$f(x) > 0$ かつ単調減少である．よって，正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ と広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ の収束・発散は等しい．ここで，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ が収束するための必要十分条件は命題 6.15 より $\alpha > 1$ であったから，正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ についても同じ条件となる．

（解答終）

例題 1.14. 次の級数の収束・発散を調べよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1}-n)$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3n^4+1}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$

（解答）

(1) 一般項について

$$0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \qquad (n \geqq 1)$$

が成り立つ．さらに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する．よって，比較判定法により，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ も収束する．

(2) $\displaystyle\sqrt{n^2+1}-n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ なので，級数の一般項を $\dfrac{1}{n}$ と比較すると

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2} \ (\fallingdotseq 0)$$

が成り立つ．さらに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散する．よって，比較判定法により，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1}-n)$ も発散する．

(3) 一般項について

$$0 < \frac{2n^2+1}{3n^4+1} < \frac{2n^2+1}{3n^4} = \frac{2}{3n^2} + \frac{1}{3n^4} \qquad (n \geqq 1)$$

が成り立つ．さらに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^2}$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^4}$ はともに収束するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3n^2} + \frac{1}{3n^4}\right)$ は収束する．よって，比較判定法により，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3n^4+1}$ も収束する．

(4) $\displaystyle f(x) = \frac{1}{x\log x}$ とおけば，区間 $[2,\infty)$ 上で連続で，$f(x) > 0$ かつ単調減少である．また，$t = \log x$ とおけば

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t}\,dt = \infty$$

となる．よって，広義積分による比較判定法により，$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ も発散する．

（解答終）

他にもいろいろな解法があるので，各自で確かめてみること．例えば，(3) は

$$0 < \frac{2n^2+1}{3n^4+1} < \frac{2n^2+n^2}{3n^4} = \frac{1}{n^2} \qquad (n \geqq 1)$$

とすればもっと簡単である．

比較判定法を用いる場合には，ほとんどの場合 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ と比較することになる．他に収束・発散を判定できる級数は多くないので，この比較が困難な場合には級数の一般項から判定することになる．

定理 1.15. （コーシー・アダマールの判定法）

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ ならば，次が成り立つ．

(1) $0 \leqq r < 1$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する． (2) $1 < r \leqq \infty$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

証明.

(1) $r < \rho < 1$ となる ρ を 1 つとる．このとき，仮定よりある自然数 N で

$$n \geqq N \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} < \rho$$

となるものが存在する．よって，$a_n < \rho^n$ $(n \geqq N)$ であり，級数 $\sum_{n=N}^{\infty} \rho^n$ は $0 < \rho < 1$ より収束するから，比較判定法により $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．

(2) $r > \rho > 1$ となる ρ を 1 つとる．このとき，仮定よりある自然数 N で

$$n \geqq N \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} > \rho$$

となるものが存在する．よって，$a_n > \rho^n$ $(n \geqq N)$ であり，級数 $\sum_{n=N}^{\infty} \rho^n$ は $\rho > 1$ より発散するから，比較判定法により $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．

□

定理 1.16. （ダランベールの判定法）

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ とするとき，次が成り立つ．

(1) $0 \leqq r < 1$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する． (2) $1 < r \leqq \infty$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

証明.

(1) $r < \rho < 1$ となる ρ を 1 つとる．このとき，仮定よりある自然数 N で

$$n \geqq N \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho$$

となるものが存在する．よって，$a_{n+1} < \rho a_n$ $(n \geqq N)$ であるから，$n > N$ ならば

$$a_n < \rho a_{n-1} < \rho^2 a_{n-2} < \cdots < \rho^{n-N} a_N \qquad \therefore\ a_n < \rho^{n-N} a_N$$

となる．ここで，級数 $\sum_{n=N}^{\infty} \rho^{n-N} a_N$ は $0 < \rho < 1$ より収束するから，比較判定法により $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．

(2) $r < \rho < 1$ となる ρ を 1 つとる．このとき，仮定よりある自然数 N で

$$n \geqq N \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > \rho$$

となるものが存在する．よって，$a_{n+1} > \rho a_n$ $(n \geqq N)$ であるから，$n > N$ ならば

$$a_n > \rho a_{n-1} > \rho^2 a_{n-2} > \cdots > \rho^{n-N} a_N \qquad \therefore\ a_n > \rho^{n-N} a_N$$

となる．ここで，級数 $\sum_{n=N}^{\infty} \rho^{n-N} a_N$ は $\rho > 1$ より発散するから，比較判定法により $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も発散する．

□

例題 1.17. 次の級数の収束・発散を調べよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n+1}\right)^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

（解答）

(1) $a_n=\dfrac{1}{n!}$ とおけば，$a_n>0$ で

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0\ (<1)$$

である．よって，ダランベールの判定法より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ は収束する．

(2) $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$ とおけば，$a_n>0$ で

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\ (>1)$$

である．よって，ダランベールの判定法より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ は発散する．

(3) $a_n=\left(\dfrac{2n+5}{3n+1}\right)^n$ とおけば，$a_n>0$ で

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{5}{n}}{3+\dfrac{1}{n}}=\frac{2}{3}\ (<1)$$

である．よって，コーシー・アダマールの判定法より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n+1}\right)^n$ は収束する．

(4) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$ とおけば，$a_n>0$ で

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{-1}=e^{-1}\ (<1)$$

である．よって，コーシー・アダマールの判定法より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ は収束する．

（解答終）

コーシー・アダマールの判定法とダランベールの判定法において，$r=1$ の場合には級数の収束・発散は判定できない．例えば，一般調和級数について $a_n=\dfrac{1}{n^\alpha}$ とおけば

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha}=1$$

であるが，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は $\alpha>1$ のときと $0<\alpha\leqq 1$ のときで収束・発散が異なる．

また，実は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$$

が成り立つので，ダランベールの判定法はコーシー・アダマールの判定法に完全に含まれる定理である．そのためにコーシー・アダマールの判定法の方が適用できる範囲は広い．しかし，具体的な計算問題では，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ よりも $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ の方が計算しやすいことが多いので，両方とも使いこなせるようにしておくこと．

ダランベールの判定法やコーシー・アダマールの判定法では判定できない場合には次の定理が知られている．

定理 1.18. （ラーベの判定法）

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において，$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=r$ とするとき，次が成り立つ．

(1) $-\infty \leqq r < -1$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．　　(2) $-1 < r$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

証明.

(1)　$r < \eta < -1$ となる η を 1 つとり固定する．このとき，仮定よりある自然数 N が存在して

$$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) < \eta \qquad (n \geqq N)$$

が成り立つ．この不等式を変形すれば，$a_n > 0$ より

$$n(a_{n+1}-a_n) < \eta a_n$$

$$na_{n+1}-(n-1)a_n < (\eta+1)a_n$$

となり，この両辺を $N \leqq n \leqq m$ について加えれば

$$\sum_{n=N}^{m}(\eta+1)a_n > \sum_{n=N}^{m}\{na_{n+1}-(n-1)a_n\} = ma_{m+1}-(N-1)a_N > -(N-1)a_N$$

が成り立つ．よって，$\eta+1<0$ であるから

$$\sum_{n=N}^{m} a_n < -\frac{(N-1)a_N}{\eta+1}$$

が成り立つ．ここで，この右辺は m によらない定数であるから，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の部分和は上に有界となる．ゆえに，正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

(2)　$-1 < \eta < r$ となる η を 1 つとり固定する．このとき，仮定よりある自然数 N が存在して

$$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) > \eta \qquad (n \geqq N)$$

が成り立つ．この不等式を変形すれば，$a_n > 0$ と $\eta+1>0$ より

$$n(a_{n+1}-a_n) > \eta a_n$$

$$na_{n+1}-(n-1)a_n > (\eta+1)a_n > 0$$

となり，$na_{n+1} > (n-1)a_n$ $(n \geqq N)$ が成り立つ．よって，$n > N$ ならば

$$(n-1)a_n > (n-2)a_{n-1} > \cdots > (N-1)a_N \qquad\qquad \therefore\ a_n > \frac{(N-1)a_N}{n-1}$$

が成り立つ．さらに，$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(N-1)a_N}{n-1}$ は発散する．ゆえに，比較判定法より $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

□

試しにラーベの判定法を使ってみる．実際には比較判定法の方が楽なこともあるため，これが最良とは限らないので考えてみること．

例題 1.19. 次の級数の収束・発散を調べよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$

（解答）

(1) $a_n=\dfrac{1}{n^2}$ とおけば，$a_n>0$ で

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^2}{(n+1)^2}\quad\longrightarrow\quad 1\qquad(n\to\infty)$$

であるから，ダランベールの判定法からは収束・発散はわからない．そこで，ラーベの判定法を適用すれば

$$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=n\left(\frac{n^2}{n^2+2n+1}-1\right)=\frac{-2n^2-n}{n^2+2n+1}=-2\ \ (<-1)$$

より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束する．

(2) $a_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ とおけば，$a_n>0$ で

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!(2n+3)}\cdot\frac{(2n)!!(2n+1)}{(2n-1)!!}=\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}\quad\longrightarrow\quad 1\qquad(n\to\infty)$$

であるから，ダランベールの判定法からは収束・発散はわからない．そこで，ラーベの判定法を適用すれば

$$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=n\left(\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}-1\right)=\frac{-6n^2-5n}{4n^2+10n+6}=-\frac{3}{2}\ \ (<-1)$$

より，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ は収束する．

(3) $a_n=\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ とおけば，$a_n>0$ で

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4^{n+1}\{(n+1)!\}^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}=\frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{2n+2}{2n+1}\quad\longrightarrow\quad 1\qquad(n\to\infty)$$

であるから，ダランベールの判定法からは収束・発散はわからない．そこで，ラーベの判定法を適用すれば

$$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\ \ (>-1)$$

より，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ は発散する．

（解答終）

他にも級数の収束・発散を調べる定理は知られているが，ここではこれ以上深入りしないことにする．このテキストでもここまでの判定法で十分である．

1.3　絶対収束と条件収束

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が正項級数でない場合には，広義積分の場合と同様に絶対値をとった $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ を考えれば，これは正項級数なので前に述べた定理を適用できる．そのためにまずは次の定理を証明する．

定理 1.20.（絶対収束する級数の収束性）
級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．

証明.　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して

$$a_n^+ \coloneqq \max\{a_n, 0\}, \qquad a_n^- \coloneqq -\min\{a_n, 0\}$$

とおけば

$$0 \leqq a_n^+ \leqq |a_n|, \qquad 0 \leqq a_n^- \leqq |a_n|$$

が成り立つ．よって，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するならば，正項級数に関する比較判定法により，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ と $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ はともに収束する．さらに，$a_n = a_n^+ - a_n^-$ であるから，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

が成り立つ．□

級数についても絶対収束と条件収束の概念が広義積分と同様に定義される．当然，正項級数の場合にはこの 2 つの収束を区別する意味はない．

定義 1.21.（絶対収束・条件収束）

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**絶対収束**するという．

(2) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ は発散するが，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**条件収束**するという．

具体的な級数の収束・発散を調べるには，まずは絶対収束するかどうかを調べればよい．その際には正項級数に対する判定法が有効である．

例題 1.22.　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$ の収束・発散を調べよ．

（解答）　すべての自然数 n に対して

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leqq \frac{1}{n^2}$$

であり，$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ は収束するから，比較判定法より $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right|$ も収束する．よって，$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$ は絶対収束する．

（解答終）

絶対収束しない級数についての収束・発散を判定することは一般に難しい．ただし，次に定義する交代級数に関しては特別な場合に判定法が知られている．

定義 1.23. （交代級数）

$a_n > 0$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

のように符号が交互に現れる級数を**交代級数**という．

定理 1.24. （ライプニッツの定理）

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a_n > 0$ である単調減少数列で，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば，交代級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は収束する．

証明. $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ とおく．このとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少なので $a_{2k} - a_{2k+1} \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leqq a_1 \end{aligned}$$

より，$\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である．また

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqq S_{2n}$$

であるから，$\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である．

よって，$\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列なので収束するから，極限値を $S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$ とおく．さらに

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = S + 0 = S$$

であるから，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は S に収束するので，交代級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は収束する． □

例 1.25. 交代級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ はライプニッツの定理の仮定をすべてみたすので収束する．一方，これは

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$$

より絶対収束はしないので，条件収束する級数の例である．

注意 1.26. ライプニッツの定理の仮定の $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の単調減少性は外すことはできない．実際

$$a_{2n-1} = \frac{2}{n}, \qquad a_{2n} = \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めると，$a_n > 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるが，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は発散する．実際

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}a_k = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} - a_{2k}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \quad \longrightarrow \quad \infty \qquad (n \to \infty)$$

であるから，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ とあわせて $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ であることがわかる．

例題 1.27.　次の級数が絶対収束・条件収束・発散のいずれであるかを判定せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}ne^{-n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+3n+1}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin^3\frac{1}{n}$

（解答）

(1)　絶対収束するか調べるために

$$a_n = \left|(-1)^{n-1}ne^{-n}\right| = \frac{n}{e^n}$$

とおく．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^{n+1}}\cdot\frac{e^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{e} = \frac{1}{e}\ (<1)$$

である．よって，ダランベールの判定法より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する．ゆえに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}ne^{-n}$ は絶対収束する．

(2)　絶対収束するか調べるために

$$a_n = \left|(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+3n+1}\right| = \frac{n}{n^2+3n+1}$$

とおく．このとき

$$a_n = \frac{n}{n^2+3n+1} > \frac{n}{n^2+3n^2+n^2} = \frac{1}{5n} \qquad (n \geqq 1)$$

であり，さらに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するので，比較判定法より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も発散する．ゆえに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+3n+1}$ は絶対収束しない．

また

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n^2+3n+1} - \frac{n+1}{n^2+5n+5} = \frac{n^2+n-1}{(n^2+3n+5)(n^2+5n+5)} > 0 \qquad (n \geqq 1)$$

であるから，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列で，さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n = 0$ である．したがって，交代級数に関するライプニッツの定理より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+3n+1}$ は条件収束する．

(3)　$0<x<\pi$ では $0<\sin x<x$ であるから，

$$\left|(-1)^{n-1}\sin^3\frac{1}{n}\right| = \sin^3\frac{1}{n} < \frac{1}{n^3} \qquad (n \geqq 1)$$

が成り立つ．さらに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ は収束する．よって，比較判定法より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\sin^3\frac{1}{n}\right|$ も収束する．ゆえに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin^3\frac{1}{n}$ は絶対収束する．

（解答終）

部分和が具体的に求められない級数の収束・発散の判定は上のようになる．もし級数が絶対収束せず，さらに交代級数に関するライプニッツの定理も適用できない場合には，それが条件収束なのか発散なのかの判定は困難なことが多い．

絶対収束級数と条件収束級数は大きく性質が異なる．それは次の定理である．

定理 1.28. （絶対収束級数の項の入れ替えと和の関係）
絶対収束級数は項の順序を入れ替えても和は変わらない．つまり，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を絶対収束する級数，$\phi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を全単射とし，$b_n = a_{\phi(n)}$ とおくとき，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も絶対収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

が成り立つ．

証明． まず $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が正項級数の場合を示す．部分和を $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ とし，$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とおく．任意の自然数 n に対して

$$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_{\phi(1)} + a_{\phi(2)} + \cdots + a_{\phi(n)} \leqq S$$

となるから，$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列である．よって，正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するので，その和を T とおく．このとき，$T \leqq S$ が成り立つ．
a_n と b_n の役割を入れ替えて同様の議論をすれば

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_{\phi^{-1}(1)} + b_{\phi^{-1}(2)} + \cdots + b_{\phi^{-1}(n)} \leqq T$$

より $S \leqq T$ も得られるから，$S = T$ が成り立つ．よって，収束する正項級数については項の順番を入れ替えても和は変わらない．

次に $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束級数の場合を示す．定理 1.20 の証明と同じ記号を用いれば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ と $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ は収束する正項級数で

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

と表すことができる．$b_n = a_{\phi(n)}$ であるから，正項級数については項の順番を入れ替えても和は変わらないので

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$$

となる．ゆえに，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も絶対収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

が成り立つ． □

ここでは証明しないが，もし $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が条件収束級数ならば上の記号で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$ となることが知られている．よって，形式的には $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ は $\infty - \infty$ となり，微妙なバランスで級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束していることがわかる．そのために，条件収束級数については項の順番を入れ替えれば，和が変わるだけではなく ∞ に発散するようにもできる．その具体例は次で挙げるので参照すること．

例 **1.29.** （条件収束級数の計算例）

交代級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ は絶対収束せず，ライプニッツの定理より条件収束することがわかる．その和は部分和を $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ とおけば

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} \\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\log 2$$

である．

一方，この級数の項の順番を変えた級数，特に正の項 2 個と負の項 1 個の順に並べた級数

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$$

について考えると，この部分和を T_n とおけば

$$T_{3n}=\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

であり

$$S_{4n}=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}
T_{3n}-S_{4n} &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}S_{2n}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}T_{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{4n}+\frac{1}{2}S_{2n}\right)=\log 2+\frac{1}{2}\log 2=\frac{3}{2}\log 2$$

となる．また

$$\lim_{n\to\infty}T_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(T_{3n}+\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{3}{2}\log 2$$

$$\lim_{n\to\infty}T_{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(T_{3n+1}+\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{3}{2}\log 2$$

であるから

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots=\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{3}{2}\log 2$$

が得られる．これは $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\log 2$ とは異なる．

1.4 積級数

2 つの級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ の積を形式的に計算してみると

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) &= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) + \cdots\end{aligned}$$

となる．ただし，項を見やすくかつ漏れなく書くために，添え字の和が一定になるようにまとめておいた．ここで，添え字の和が n となる項を列挙すると

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

となる．そこで，次のように用語を定める．

定義 1.30. （Cauchy 積級数）
2 つの級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ から，次の c_n を一般項とする級数をつくる．

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

このとき，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ を Cauchy **積級数**という．

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに収束するとし，それらの和を

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

とおく．このとき，Cauchy 積級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ はこれらの級数の積だから，当然収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = ST$$

となると思うかもしれない．しかし，これは自明なことではない．

実際，もし $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ や $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が条件収束する場合には，それぞれの級数で項の順番を入れ替えると和が変わってしまう．そのために級数どうしの積を展開した場合，必ずしも上で述べたように項をまとめる必然性がないため，展開した後どのように項を並べるかによって級数の積の値が変わってしまうかもしれない．そこで，項の順番を入れ替えても値が変わらない絶対収束級数で考えるのが妥当である．

絶対収束級数どうしの Cauchy 積については，確かに次が成り立つ．

定理 1.31. （絶対収束級数の Cauchy 積級数）
級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに絶対収束するならば，Cauchy 積級数も絶対収束し，次が成り立つ．

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

証明． 積 $a_i b_j$ を項とする級数

$$a_0b_0 + a_1b_0 + a_1b_1 + a_0b_1 + a_2b_0 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 + a_0b_2 + a_3b_0 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_1b_3 + a_0b_3 + \cdots$$

を考える．この級数の一般項を A_n とおくと，$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ の第 m^2 項までの部分和は

$$\sum_{n=1}^{m^2} A_n = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} a_i b_j = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1})(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{m-1}) = \left(\sum_{n=0}^{m-1} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{m-1} b_n\right)$$

となる．そこで，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ が絶対収束することを示すために，各項に絶対値をつけた級数を考えれば

$$\sum_{n=1}^{m^2} |A_n| = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} |a_i b_j| = \left(\sum_{n=0}^{m-1} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{m-1} |b_n|\right) \leqq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\right)$$

となる．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに絶対収束しているから，部分和 $\sum_{n=1}^{m^2} |A_n|$ は上に有界となるので，正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ は収束する．よって，$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ は絶対収束する．

定理 1.28 より絶対収束級数は項の順番を変えても和が変わらないので

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} A_n &= a_0b_0 + a_1b_0 + a_1b_1 + a_0b_1 + a_2b_0 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 + a_0b_2 + \cdots \\
&= a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + (a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)
\end{aligned}$$

であるから，Cauchy 積級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$ も絶対収束する．さらに

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m^2} A_n = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{m-1} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{m-1} b_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

が成り立つ． □

例題 1.32. $0<|a|<|b|$ とするとき，$\dfrac{1}{1-(a+b)x+abx^2}$ の Maclaurin 展開を求めよ．

（解答） $\dfrac{1}{1-(a+b)x+abx^2}=\dfrac{1}{(1-ax)(1-bx)}$ であるから，$|ax|<1$ かつ $|bx|<1$ ならば

$$\frac{1}{1-(a+b)x+abx^2}=\frac{1}{1-ax}\cdot\frac{1}{1-bx}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ax)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(bx)^n\right)$$

となる．この右辺の級数はそれぞれ絶対収束しているから，定理 1.31 より

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ax)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(bx)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(ax)^k(bx)^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}\right)x^n$$

であり，さらに

$$\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}=b^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^k=b^n\cdot\frac{1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{a}{b}}=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$$

なので

$$\frac{1}{1-(a+b)x+abx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}\,x^n\qquad\left(|x|<\frac{1}{|b|}\right)$$

（解答終）

例題 1.33. すべての実数 x,y に対して，次が成り立つことを示せ．

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}$$

（解答） すべての実数 x に対して $\left|\dfrac{x^n}{n!}\right|=\dfrac{|x|^n}{n!}$ であり

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{|x|^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0\ \ (<1)$$

なので，ダランベールの判定法より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$ は収束する．よって，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ は絶対収束する．

ゆえに，定理 1.31 と二項定理より

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\,x^ky^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}\end{aligned}$$

が成り立つ．

（解答終）

例題 1.33 は指数法則 $e^xe^y=e^{x+y}$ が成り立つことの証明となっている．

2　関数列

ここでは関数列の極限について考察する．以下では特に断りがなければ I を区間とし，$f_n(x)$ は I 上の関数とする．ここまでの章では関数の記号として $f(x)$ と f を区別していなかったが，厳密には f は写像であり，$f(x)$ は x を代入したときの実数を意味していると考えるのが適切な場合が多い（関数の変数を明記したいのであえて $f(x)$ と書くこともある）．この節の内容を正しく理解するにはこれらの記号の区別が必要なので，この章においては意識して記号を用いることにする．

2.1　各点収束と一様収束

関数列の極限として数式的に素直に考えられるものは次のものである．

定義 2.1.（各点収束）

関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と関数 f に対して，任意の $x \in I$ を固定するときに極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在して

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in I)$$

となるとき，f を $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限関数**といい，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に**各点収束**するという．また，I を**収束域**という．

これをイプシロン・デルタ論法で表せば『任意の $x \in I$ と $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(x,\varepsilon)$ が存在して，$n \geqq N(x,\varepsilon)$ をみたす任意の自然数 n について $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ をみたす』となる．まず $x \in I$ を固定して $n \to \infty$ の極限を考えるので，定義内の自然数 N は許容誤差 ε だけでなく x にも依存して決まるものである．

例題 2.2.　次の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数 f を求めよ．

(1) $I = [0,1],\quad f_n(x) = x^n$

(2) $I = \mathbb{R},\quad f_n(x) = \begin{cases} 1 & (n \leqq x < n+1) \\ 0 & (x < n,\ n+1 \leqq x) \end{cases}$

(3) $I = [0,2],\quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}\right) \\ -n^2 x + 2n & \left(\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{2}{n}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{2}{n} \leqq x\right) \end{cases}$

（解答）　いずれも $y = f_n(x)$ のグラフを描いて考えてみること．以下ではスペースの関係で数式のみを示す．

(1)　$0 \leqq x < 1$ と $x = 1$ で場合分けすれば

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

(2)　実数 x を任意にとり固定すると，$N = [x] + 1$ とおけば，$n \geqq N$ ならば $f_n(x) = 0$ が成り立つ．よって

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(3)　実数 x を任意にとり固定する．$x = 0$ ならば，すべての自然数 n に対して $f_n(0) = 0$ であるから，$f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ である．$0 < x \leqq 2$ ならば，$N = \left[\dfrac{2}{x}\right] + 1$ とおけば $f_n(x) = 0\ \ (n \geqq N)$ であるから，$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ である．ゆえに

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (x \in I)$$

（解答終）

関数列の各点収束の概念は一見素朴なようであるが，実は私たちが直感的にイメージしてる収束の様子を表しているものではない．そのために関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に各点収束しても，f_n の性質が f に遺伝しないことがよく起こる．例題 2.2 の関数列については次のようになる．

例 2.3. （連続関数の極限関数が不連続である例）

$I=[0,1]$ 上の関数列 $f_n(x)$ を $f_n(x)=x^n$ で定めると，$f_n(x)$ は I 上の連続関数である．一方，極限関数は

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

であるから，$f(x)$ は $x=1$ で左連続ではない．ゆえに $f(x)$ は I 上の連続関数ではない．このことから，**連続関数の各点収束極限関数は連続とは限らないことがわかる**．これを数式で表せば

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \fallingdotseq \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1-0} f_n(x)\right)$$

となる．

例 2.4. （極限と積分が交換できない広義積分の例）

$\mathbb{R}$ 上の関数列 $f_n(x)$ を $f_n(x)=\begin{cases} 1 & (n \leqq x < n+1) \\ 0 & (x<n,\ n+1 \leqq x) \end{cases}$ で定めると，すべての自然数 n に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_n^{n+1} 1\,dx = 1$$

より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1$ である．一方，極限関数は $f(x)=0$ なので，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=0$ である．よって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = 0 \fallingdotseq 1 = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

となる．ゆえに，$n\to\infty$ **の極限と積分は交換できるとは限らないことがわかる**．

例 2.5. （極限と積分が交換できない定積分の例）

$I=[0,2]$ 上の関数列 $f_n(x)$ を $f_n(x)=\begin{cases} n^2x & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}\right) \\ -n^2x+2n & \left(\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{2}{n}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{2}{n} \leqq x\right) \end{cases}$ で定めると，すべての自然数 n に対して，$y=f_n(x)$ のグラフを描けば

$$\int_0^2 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot n = 1$$

より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^2 f_n(x)\,dx=1$ である．一方，極限関数は $f(x)=0$ なので，$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=0$ である．よって

$$\int_0^2\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = 0 \fallingdotseq 1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^2 f_n(x)\,dx$$

となる．ゆえに，$n\to\infty$ **の極限と積分は交換できるとは限らないことがわかる**．

応用上は $\displaystyle\int_I \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx$ の片方は計算が簡単で，片方は複雑な計算となることも多い．これに限らず 2 つ以上の極限をとる場合には簡単な極限から計算したいので，自由に極限の順番を交換できるための条件を知っておきたい．ここで，導関数は平均変化率の極限，定積分はリーマン和の極限であったことを思い出しておくこと．

そこで例題 2.2 の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ とその極限関数 f についてそれらのグラフを観察してみると，すべて極限として $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ をみたしているが『グラフとしては』収束していないことがわかる．

(1) $x = 1$ の近くではずっと $f_n(x)$ と $f(x)$ はおよそ 1 離れていて，極限をとった瞬間に $y = f_n(x)$ のグラフが $x = 1$ でちぎれて $y = f(x)$ のグラフになってしまっている．

(2) $y = f_n(x)$ のグラフにおける高さ 1 の部分は数直線上を無限の方に逃げているだけで，$f_n(x)$ と $f(x)$ の差の最大値は常に 1 を保っている．

(3) $y = f_n(x)$ のグラフにおける山はどんどん高く細くなり極限で消えているように見えるだけで，$f_n(x)$ と $f(x)$ の差の最大値は n であり，これはどんどん大きくなっている．

$y = f_n(x)$ のグラフが $y = f(x)$ のグラフに近づくというのは『全体的に近づいている』ことを意味するのが自然である．これを数学的に表せば『$|\,f_n(x) - f(x)\,|$ の最大値が $n \to \infty$ で 0 に収束する』となる．しかし，最大値は常に存在するとは限らないので，上限を用いて以下のように定義する．

定義 2.6. （一様収束）

関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と関数 f に対して，『$\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して，任意の $x \in I$ と $n \geqq N(\varepsilon)$ をみたす任意の自然数 n について $|\,f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon$ をみたす』とき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に**一様収束**するという．これは上限を用いれば

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |\,f_n(x) - f(x)\,| = 0$$

をみたすことと同値である．

定義式より $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束するとは，任意に許容誤差 $\varepsilon > 0$ を与えたときに，それに応じて適切に大きな自然数 $N(\varepsilon)$ を定めれば，$y = f(x)$ のグラフに上下に幅 ε の帯をつけたときに $n \geqq N(\varepsilon)$ ならば $y = f_n(x)$ のグラフはすべてこの帯に含まれることである．つまり，定義域のすべての点で『一様にグラフが近づいている』ことを意味している．定義からもこのイメージからもわかるように，関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 f に一様収束するならば各点収束する．

各点収束との違いは自然数 N が ε のみに依存し x には依存しないことである．このために各点 x ごとではなく定義域全体で $f_n(x)$ と $f(x)$ の誤差を一度に見積もれるため，次に述べるさまざまな有用な定理がある．

2.2 一様収束する関数列の性質

ここでは一様収束する関数列の性質について説明する．応用上は

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx, \qquad \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

のような計算を必要とすることが多い．しかし，ただ関数列が各点収束するだけではこれらが成り立たないことは前節で見てきた．これらの計算の正当性を一様収束性が保証してくれることを証明する．

一様収束する連続関数列の重要な性質は，その極限関数も連続となることである．

定理 2.7. （連続関数の一様収束極限関数の連続性）
I 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 f に一様収束するならば，f も I 上の連続関数である．

証明. 任意の $a \in I$ をとり固定し，f が $x = a$ で連続であることを示せばよい．任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束しているから，$\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$ に対して，ある自然数 $N\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$ が存在して

$$x \in I, \quad n \geqq N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \quad \Longrightarrow \quad |\,f_n(x) - f(x)\,| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．そこで，$N_\varepsilon = N\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$ とおけば，特に

$$|\,f_{N_\varepsilon}(x) - f(x)\,| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (x \in I)$$

となる．関数 f_{N_ε} は $x = a$ で連続なので，ある $\delta_1\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right) > 0$ が存在して

$$|\,x - a\,| < \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \quad \Longrightarrow \quad |\,f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)\,| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．よって，$\delta(\varepsilon) = \delta_1\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$ とおけば，$|\,x - a\,| < \delta(\varepsilon)$ となる任意の $x \in I$ に対して

$$|\,f(x) - f(a)\,| \leqq |\,f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)\,| + |\,f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)\,| + |\,f_{N_\varepsilon}(a) - f(a)\,| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

となるので，f は $x = a$ で連続である．$a \in I$ は任意だったので，f は I 上の連続関数である． □

この定理から，連続関数列の極限関数が連続でなければ，その収束は一様収束でないことがわかる．

定理 2.8. （一様収束に関する極限と定積分の可換性）

$I=[a,b]$ を有界閉区間とする．I 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 f に一様収束するならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つ．

証明. 定理 2.7 より f_n と f は I 上で連続なので積分可能である．よって，積分に関する三角不等式より

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b\{f_n(x)-f(x)\}\,dx\right|&\leqq\int_a^b|\,f_n(x)-f(x)\,|\,dx\\&\leqq\int_a^b\sup_{x\in I}|\,f_n(x)-f(x)\,|\,dx=(b-a)\sup_{x\in I}|\,f_n(x)-f(x)\,|\end{aligned}$$

であるから，一様収束性の仮定より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|\,f_n(x)-f(x)\,|=0$ なので，はさみうちの定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

が得られる． □

定積分については一様収束性があれば $n\to\infty$ の極限と積分は交換可能である．この事実は具体的な計算においても理論上も重要なので必ず理解しておくこと．また，広義積分については一様収束性だけでは交換可能とは限らない．広義積分については，例えば

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{t\to\infty}\int_0^t f_n(x)\,dx\right)$$

のように $n\to\infty$ および定積分（リーマン和の極限）に加えて区間の端点に関する極限も現れるためであり，この 3 個の極限の交換可能性を保証するには更なる条件が必要となる．

例 2.9. （一様収束しても極限と積分が交換できない広義積分の例）

$\mathbb{R}$ 上の関数列 $f_n(x)$ を $f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & (0\leqq x\leqq n)\\ 0 & (x<0,\ n<x)\end{cases}$ で定めると，すべての自然数 n に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)\,dx=\int_0^n\frac{1}{n}\,dx=1$$

より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)\,dx=1$ である．一方，極限関数は $f(x)=0$ であり

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\,f_n(x)-f(x)\,|=\frac{1}{n}\quad\longrightarrow\quad 0\qquad(n\to\infty)$$

なので，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上で f に一様収束する．しかし

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx=0\fallingdotseq 1=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)\,dx$$

となる．ゆえに，$n\to\infty$ の極限と広義積分は交換できるとは限らないことがわかる．

広義積分の場合でも極限と積分が交換できる十分条件は知られてるが，複雑なのでここでは述べないことにする．このあたりまで理解を深めたい場合にはルベーグ積分へアプローチすることを勧める．

関数列の極限と微分の交換についてはやや仮定が複雑となる．

定理 2.10. （一様収束に関する極限と微分の可換性）
I 上の C^1 級関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 f に各点収束し，さらに $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 g に一様収束するならば，f も I 上の C^1 級関数であり，$f' = g$ が成り立つ．これは

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

と表すことができる．

証明． 1 点 $a \in I$ を固定すれば，f_n は I 上の C^1 級関数なので f_n' は連続であり，微分積分学の基本定理より

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt \qquad (x \in I)$$

が成り立つ．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に各点収束し，$\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ が g に一様収束するから，定理 2.8 より $n\to\infty$ とすれば

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt \qquad (x \in I)$$

となる．定理 2.7 より g は連続なので，第 6 章定理 3.10 より右辺は微分可能であるから，f も微分可能で

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(f(a) + \int_a^x g(t)\,dt\right) = g(x) \qquad (x \in I)$$

が成り立つ．また，g は連続だったので f' も連続であるから，f は C^1 級である． □

関数列について $n\to\infty$ の極限と微分の交換可能性を保証するためには，その証明で微分積分学の基本定理を用いる関係で仮定が複雑となる．関数列自身ではなく，その**導関数の列の一様収束性**を必要とするところに注意すること．なお，定理 2.10 の仮定の下では，結果的に $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束していることもわかる．

なお，関数列の一様収束性のみでは，極限関数が微分可能かどうかさえわからない．次の例から，$n\to\infty$ の極限と微分の交換には導関数の列に関する仮定が必要不可欠であることがわかる．

例 2.11. （C^1 級関数列の一様収束極限関数が微分不可能となる例）
$\mathbb{R}$ 上の関数 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ について，関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は関数 $f(x) = |x|$ に一様収束する．実際

$$f_n(x) - f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \frac{\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}} + |x|}$$

であり，この右辺は明らかに $x = 0$ で最大値 $\dfrac{1}{n}$ をとるから

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\, f_n(x) - f(x)\,| = \frac{1}{n} \quad\longrightarrow\quad 0 \qquad (n\to\infty)$$

が成り立つ．よって，C^{∞} 級関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束するが，f は $x = 0$ で微分不可能である．

ここまでに一様収束性に基づく有用な定理を紹介したが，これらはすべて十分条件である．**一様収束でなければ極限関数が必ず不連続になったり，極限と積分や微分の交換が絶対できないわけではない**ことには注意すること．一様収束でなくても極限関数が連続となることはあるし，結果的に極限と積分が交換できる例も存在する．

一様収束性の判定は定義に従えばよい．次の例は後で重要となる．

例題 2.12.　次の I 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一様収束するかどうか調べよ．ただし，$0 < a < 1$ とする．

(1) $I = [0, 1),\quad f_n(x) = x^n$　　(2) $I = [0, a],\quad f_n(x) = x^n$

（解答）

(1)　$0 \leqq x < 1$ より，極限関数は $f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$ である．ここで

$$\sup_{x\in I} |\, f_n(x) - f(x)\,| = \sup_{0\leqq x<1} x^n = 1 \quad \longrightarrow \quad 1 \qquad (n \to \infty)$$

より，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上で f に一様収束しない．

(2)　$0 \leqq x \leqq a < 1$ より，極限関数は $f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$ である．ここで

$$\sup_{x\in I} |\, f_n(x) - f(x)\,| = \sup_{0\leqq x\leqq a} x^n = a^n \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (n \to \infty)$$

より，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上で f に一様収束する．

（解答終）

この例題のように関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が同じでも区間 I が異なれば一様収束かどうかが異なることがある．そのため，関数列が一様収束するかどうかはその定義域である区間を明示しなければ判定できない．

また，$f_n(x) = x^n$ については $I = [0, 1)$ 上では一様収束しないが，任意の $0 < a < 1$ に対して I に含まれる有界閉区間 $I_a = [0, a]$ 上では一様収束している．これより $J \subset I$ となる任意の有界閉区間 J 上で一様収束していることがわかる．他の例でもこのようなことは多く見られるので，次のように用語を用意しておく．

定義 2.13. （広義一様収束）
I 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と関数 f に対して，$J \subset I$ となる任意の有界閉区間 J 上で一様収束するときに，I 上で**広義一様収束**するという．

応用上は関数列が I 上で広義一様収束していれば極限と微分・積分との交換は可能であることが多い．実際，定積分を I に含まれる有界閉区間上で考えるならば一様収束性が従うからであり，微分についてもその証明を見返せば広義一様収束性から同様に示せることがわかる．後の節で詳しく学習する整級数については広義一様収束性の概念が中心となる．

例題 2.14. 次の I 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一様収束するかどうか調べよ．

(1) $I=[0,1]$, $f_n(x)=x(1-x)^n$ (2) $I=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ (3) $I=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

（解答）

(1) $0<x\leqq 1$ のときの極限関数は，$0\leqq 1-x<1$ より $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x(1-x)^n=0$ である．また，$f_n(0)=0$ より $f(0)=0$ となる．よって，$f(x)=0$ である．そこで，f_n の増減を調べると

$$f_n'(x)=(1-x)^n-nx(1-x)^{n-1}=\{1-(n+1)x\}(1-x)^{n-1}=0$$

より，$x=\dfrac{1}{n+1}$ であり，増減表は

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{n}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$	$\searrow$	0

となる．ゆえに

$$\sup_{x\in I}|\,f_n(x)-f(x)\,|=\sup_{x\in I}f_n(x)=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\quad\longrightarrow\quad 0\cdot e^{-1}=0\qquad(n\to\infty)$$

より，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上で f に一様収束する．

(2) $x\fallingdotseq 0$ のときの極限関数は $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+n^2x^2}=0$ である．また，$f_n(0)=1$ より $f(0)=1$ となる．よって，f_n は $\mathbb{R}$ 上で連続であるが，極限関数 f は $x=0$ で不連続であるから，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に $x=0$ を含む区間において一様収束しない．

(3) $x\fallingdotseq 0$ のときの極限関数は $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{nx}+nx}=0$ である．また，$f_n(0)=0$ より $f(0)=0$ となる．よって，$f(x)=0$ である．そこで，f_n は奇関数なので $x\geqq 0$ での増減を調べると

$$f_n'(x)=\frac{n(1+n^2x^2)-nx\cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}=\frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}=0$$

より，$x=\dfrac{1}{n}$ であり，増減表は

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{n}$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	(0)

となる．ゆえに

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\,f_n(x)-f(x)\,|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|=\frac{1}{2}\quad\longrightarrow\quad\frac{1}{2}\qquad(n\to\infty)$$

より，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上で f に一様収束しない．

（解答終）

3 関数項級数

ここでは関数列の級数について考える．以下では特に断りがなければ I を区間とし，$f_n(x)$ は I 上の関数とする．関数列の級数も部分和の極限として定義されるので，前節と同様な議論の部分も多い．

3.1 一様収束とその判定法

定義 3.1. （関数項級数）

関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ とおく．関数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I 上で各点収束するならば，極限関数を

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x) \qquad (x\in I)$$

とおき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**関数項級数**という．また，$T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|$ とおくとき，関数列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ が各点収束するならば，関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は**絶対収束**するという．

級数の場合と同様に，絶対収束する関数項級数は各点収束することがわかる．さらに，関数項級数が絶対収束すれば，関数列の順序を変えても和は変わらない．また，関数項級数は部分和のなす関数列の極限であるから，もちろん一様収束性の概念が重要となる．

定義 3.2. （関数項級数の一様収束）

関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，部分和 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ のなす関数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I 上で一様収束するとき，関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上で**一様収束**するという．

一般に与えられた関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ に対して，その部分和 $\sum_{k=1}^{n} f_k$ を直接求めるのは大変である．そこで，部分和を計算することなく一様収束であることを示す方法があると便利だが，一番有用なのは次の定理である．

定理 3.3. （ワイエルシュトラスの M 判定法）

関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$|f_n(x)|\leqq M_n \quad (x\in I), \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} M_n : \text{収束}$$

となる数列 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するならば，関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上で絶対収束かつ一様収束する．

証明． 比較判定法より，任意の $x\in I$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ は収束する．よって，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上で絶対収束する．

次に，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ とその部分和 $S_m(x)=\sum_{n=1}^{m} f_n$ の差を評価すれば

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)-S_m(x)\right|=\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x)\right|\leqq \sum_{n=m+1}^{\infty}|f_n(x)|\leqq \sum_{n=m+1}^{\infty} M_n$$

となる．ここで，$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束することより

$$\sup_{x\in I}\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)-S_m(x)\right|\leqq \sum_{n=m+1}^{\infty} M_n \quad\longrightarrow\quad 0 \qquad (m\to\infty)$$

が成り立つから，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上で一様収束する． □

ワイエルシュトラスの M 判定法における $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ を**優級数**という．そのため，ワイエルシュトラスの M 判定法は優級数判定法とも呼ばれる．与えられた関数項級数が一様収束であることを示すには，この優級数を探すのが一番最初の指針となる．

例題 3.4.　次の関数項級数が $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^4+x^2}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$

（解答）

(1)　すべての自然数 n と実数 x に対して

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqq \frac{1}{n^2}$$

が成り立つ．さらに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する．

よって，ワイエルシュトラスの M 判定法より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する．

(2)　すべての自然数 n と実数 x に対して

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}n}{n^4+x^2}\right| = \frac{n}{n^4+x^2} \leqq \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

が成り立つ．さらに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ は収束する．

よって，ワイエルシュトラスの M 判定法より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^4+x^2}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する．

(3)　$f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$ は奇関数なので，$x \geqq 0$ での増減を調べる．

$$f_n'(x) = \frac{1+nx^2 - x\cdot 2nx}{n(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$

より，$f_n'(x) = 0$ となるのは $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ のときであり，増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2n\sqrt{n}}$	$\searrow$	(0)

である．よって，すべての自然数 n と実数 x に対して

$$|f_n(x)| \leqq \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}}$$

が成り立つ．さらに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ は収束する．

ゆえに，ワイエルシュトラスの M 判定法より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する．

（解答終）

3.2　項別微分・項別積分

関数項級数は部分和の関数列の極限だから，一様収束する場合には項別微分・項別積分ができる．つまり，無限和と微分や積分を交換できる．証明はもちろん関数列の極限の性質に帰着される．

定理 3.5. （連続関数の一様収束極限関数の連続性）
I 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ のなす関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が I 上で一様収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ も I 上の連続関数である．

証明． 部分和を $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_n$ とおけば，f_n は I 上で連続なので，それらの有限和である S_n も I 上で連続である．ここで，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ に I 上で一様収束するから，定理 2.7 より $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上で連続である． □

定理 3.6. （一様収束に関する無限和と定積分の可換性）
有界閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ のなす関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が I 上で一様収束するならば

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

が成り立つ．

証明． 部分和を $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_n$ とおく．$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ に I 上で一様収束するから，定理 2.8 より

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

が成り立つ．この左辺は

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

より，定理の主張の等式が成り立つことが示された． □

定理 3.7. （一様収束に関する無限和と微分の可換性）
I 上の C^1 級関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ のなす関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が I 上で各点収束し，さらに $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ が I 上で一様収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ も I 上の C^1 級関数であり

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

が成り立つ．

証明は上の定理と同様の議論によりできるので，各自で確かめてみよ．

例題 3.8. $-1 < a < 1$ かつ $a \neq 0$ とし，関数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx$ とおく．

(1) $f(x)$ を定める関数項級数は収束することを示せ．

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) 自然数 m に対して，$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \sin mx\, dx$ を求めよ．

（解答）

(1) $x \in \mathbb{R}$ に対して，$|a| < 1$ より

$$|a^n \sin nx| \leqq |a|^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a|^n \text{：収束}$$

であるから，$f(x)$ を定める関数項級数は $\mathbb{R}$ 上で絶対収束している．

(2) 各項を微分すると $(a^n \sin nx)' = na^n \cos nx$ であり

$$|na^n \cos nx| \leqq n|a|^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

となる．そこで，$M_n = n|a|^n$ とおけば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|a|^{n+1}}{n|a|^n} = \lim_{n\to\infty} |a| \left(1 + \frac{1}{n}\right) = |a| \quad (< 1)$$

より，ダランベールの判定法から $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束するので，ワイエルシュトラスの M 判定法より $\sum_{n=1}^{\infty} na^n \cos nx$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する．ゆえに，$f(x)$ は項別微分可能で，$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na^n \cos nx$ となる．

(3) (1) より $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx$ は $[0, 2\pi]$ 上で一様収束している．よって，それに有界な関数 $\sin mx$ をかけてもやはり $f(x) \sin mx = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx \sin mx$ も一様収束している．ゆえに，項別積分可能なので，第 6 章命題 9.3 より

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin mx\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \pi a^m$$

（解答終）

このような項別積分の計算はフーリエ級数の分野において頻繁に現れることになる．

例題 3.9. 自然数 n に対して $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ とおくとき，次の値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$

（解答）

(1) $t > 0$ とすれば

$$\int_0^t f_n(x)\,dx = \int_0^t (e^{-nx} - 2e^{-2nx})\,dx = \left[-\frac{1}{n}\,e^{-nx} + \frac{1}{n}\,e^{-2nx}\right]_0^t = -\frac{1}{n}\,e^{-nt} + \frac{1}{n}\,e^{-2nt}$$

であるから

$$\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\,e^{-nt} + \frac{1}{n}\,e^{-2nt}\right) = 0$$

となる．よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ である．

(2) $x > 0$ ならば，無限等比級数の和の公式より

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\{(e^{-x})^n - 2(e^{-2x})^n\} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{2}{e^{2x}-1} = \frac{1}{e^x+1}$$

となる．ここで，右辺は $x = 0$ まで含めて連続であるから，求める積分は

$$\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{e^x+1}\,dx$$

となり，$x = 0$ の方は定積分としてよい．$t = e^x$ とおけば，$x \to \infty$ のとき $t \to \infty$ であり

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \infty \\ \hline t & 1 & \to & \infty \end{array} \qquad dt = e^x\,dx = t\,dx \qquad \therefore\ dx = \frac{dt}{t}$$

であるから

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{e^x+1}\,dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{t(t+1)}\,dt$$

となる．そこで，$s > 1$ とすると

$$\int_1^s \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int_1^s\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \left[\log\left|\frac{t}{t+1}\right|\right]_1^s = \log\frac{s}{s+1} - \log\frac{1}{2}$$

であるから

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{e^x+1}\,dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{t(t+1)}\,dt = \lim_{s\to\infty}\left(\log\frac{1}{1+\frac{1}{s}} + \log 2\right) = \log 2$$

（解答終）

この関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ については

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx \neq \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

であるから，無限和と積分の交換はできない．直接計算により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}|f_n(x)|\,dx = \infty$ であることがわかるが，このように各項で絶対値をとった関数項級数が積分可能でない場合には，無限和と積分を交換できるかどうかはすぐにわからないので実際に確かめるしかない．

4　整級数

ここでは関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ の特別な形である整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の性質について考察する．当然ながら，整級数の性質は関数のマクローリン展開の計算に応用できる．

4.1　収束半径

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束する範囲と発散する範囲の境目は以下のようになる．

定理 4.1.　整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と 0 でない実数 r について，次が成り立つ．

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = r$ で収束すれば，開区間 $(-|r|, |r|)$ 上で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は広義一様収束かつ絶対収束する．

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = r$ で発散すれば，$|x| > |r|$ のとき $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する．

証明.

(1)　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ が収束するから，$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = 0$ である．よって，ある自然数 N が存在して

$$n \geqq N \quad \Longrightarrow \quad |a_n r^n| < 1$$

となる．任意の有界閉区間 $I \subset (-|r|, |r|)$ をとると，$x \in I$ ならば $|x| \leqq a < |r|$ となる a がとれる．ゆえに，$n \geqq N$ ならば，$x \in I$ のとき

$$|\,a_n x^n\,| = |\,a_n r^n\,|\left|\,\frac{x}{r}\,\right|^n < \left(\frac{a}{|r|}\right)^n$$

であり，級数 $\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{a}{|r|}\right)^n$ は $\frac{a}{|r|} < 1$ より収束する．ゆえに，ワイエルシュトラスの M 判定法より，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は I 上で絶対収束かつ一様収束する．したがって，開区間 $(-|r|, |r|)$ 上で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は広義一様収束かつ絶対収束する．

(2)　もしある x_0 $(|x_0| > |r|)$ で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が収束したならば，(1) より $|x| < |x_0|$ では $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束することになる．しかし，仮定より $x = r$ では発散するからこれは矛盾である．

□

注意 4.2.　$x = r$ のときの収束・発散から，$x = -r$ での収束・発散を判定することはできない．

前の定理の考察から，次のように用語を定める．

定義 4.3. （**収束半径**）

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について，

$$|x| < \rho \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は絶対収束}, \qquad\qquad |x| > \rho \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は発散}$$

となる正の実数 ρ が存在するとき，ρ を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の**収束半径**という．また

- すべての実数 x について $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が絶対収束するときには $\rho = \infty$
- $x \neq 0$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が発散するときには $\rho = 0$

と約束する．

収束半径の定義より，整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が $\rho > 0$ ならば，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < \rho$ で広義一様収束かつ絶対収束することがわかる．また，収束域は

$$(-\rho, \rho), \quad (-\rho, \rho], \quad [-\rho, \rho), \quad [-\rho, \rho]$$

のいずれかとなる．

収束半径の定義と定理 2.7 より，次が成り立つ．

定理 4.4. （**整級数の連続性**）

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を $0 < \rho \leqq \infty$ とすれば，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は開区間 $(-\rho, \rho)$ 上で連続である．

注意 4.5. 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対して，収束半径が $\rho > 0$ ならば，その収束域は上で挙げたように区間となる．ここで,『収束半径』という用語に違和感をもつかもしれない．

実際には，変数を実数 x ではなく複素数 z で考えることも多い．その際には整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束・発散の境目として，複素平面上に原点を中心とする円が現れる．そのため，その円の半径を収束半径と呼んでいる．詳細は複素関数論において勉強してほしい．

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は，以下の定理を用いて計算できる．いずれも級数の収束・発散の判定法に基づいている．

定理 4.6. 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について，極限値

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

が存在すれば，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は ρ である．$\rho = \infty$ の場合も同様の主張が成り立つ．

証明． $0 < \rho < \infty$ とする．$|x| < \rho$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = \frac{1}{\rho} |x| < 1$$

であるから，ダランベールの判定法により，$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ は収束する．よって，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する．

$|x| > \rho$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{1}{\rho} |x| > 1$$

であるから，ダランベールの判定法の証明より，$\lim_{n\to\infty} |a_n x^n| = \infty$ となる．よって，$\lim_{n\to\infty} a_n x^n \neq 0$ であるから，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する．

以上より，ρ が $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径である．$\rho = 0$ ならば $x \neq 0$ であるすべての実数 x に対して

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = \infty$$

より上の議論の後半のみが，$\rho = \infty$ ならばすべての実数 x に対して

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = 0 < 1$$

より上の議論の前半のみが適用されるので，定理の主張は確かに正しい． □

コーシー・アダマールの判定法を用いても同様に収束半径を求めることができる．証明は全く同様である．

定理 4.7. 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について，極限値

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

が存在すれば，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は ρ である．$\rho = \infty$ の場合も同様の主張が成り立つ．

一般的にはダランベールの判定法の方が計算が簡単だが，コーシー・アダマールの判定法の方が解決できる問題の種類が多い．

例題 4.8.　次の整級数の収束半径を求めよ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n+1} x^n$　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$　　(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{\log n}} x^n$

（解答）

(1)　$a_n = \frac{n+1}{n!}$ とおけば

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n+2} = \infty$$

より，収束半径は ∞ である.

(2)　$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n+1}$ とおけば

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n+1}\cdot\frac{2^{n+1}+1}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{2^n}} = 2$$

より，収束半径は 2 である.

(3)　$a_n = n^n$ とおけば

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{1}{e}\cdot 0 = 0$$

より，収束半径は 0 である.

(4)　$a_n = \frac{1}{3^{\log n}}$ とおけば

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{\log n}}\cdot 3^{\log(n+1)} = \lim_{n\to\infty}3^{\log(n+1)-\log n} = \lim_{n\to\infty}3^{\log(1+\frac{1}{n})} = 1$$

より，収束半径は 1 である.

（解答終）

例題 4.9.　整級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} x^{2n+1}$ の収束半径を求めよ.

（解答）　$y = x^2$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^{2n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}y^n$$

である．そこで，$a_n = \frac{2^n}{n(n+1)}$ とおき，y の整級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ の収束半径を求めると

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

より，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ の収束半径は $\frac{1}{2}$ である.

これを x に直せば，$|x^2| < \frac{1}{2}$ で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ は収束し，$|x^2| > \frac{1}{2}$ で発散するから，収束と発散の境目は $|x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる．よって，求める収束半径は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ である.

（解答終）

定理 4.10.　級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば，整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は閉区間 $[0,1]$ 上で一様収束する．

もし級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば，整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x=1$ で収束するからその収束半径は 1 以上である．よって，収束半径が 1 だとしても右半開区間 $[0,1)$ 上で整級数は広義一様収束することはわかるが，定理 4.10 のポイントは端点をこめた $[0,1]$ 上で一様収束するということである．

証明.　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するから

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad T_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

とおくと，閉区間 $[0,1]$ 上で $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ であり，また $\lim_{n\to\infty} T_n = 0$ である．よって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ が存在して

$$n \geqq N \quad \Longrightarrow \quad |T_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．

ゆえに，任意の $0 \leqq x \leqq 1$ と $m > n \geqq N$ に対して

$$\begin{aligned} S_m(x) - S_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{m} (T_k - T_{k+1}) x^k \\ &= \sum_{k=n+1}^{m} T_k x^k - \sum_{k=n+2}^{m+1} T_k x^{k-1} = \sum_{k=n+1}^{m} T_k (x^k - x^{k-1}) - T_{m+1} x^m + T_{n+1} x^n \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} |\,S_m(x) - S_n(x)\,| &\leqq \sum_{k=n+1}^{m} |T_k|(x^{k-1} - x^k) + |T_{m+1}| x^m + |T_{n+1}| x^n \\ &< \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\varepsilon}{2}(x^{k-1} - x^k) + \frac{\varepsilon}{2} x^m + \frac{\varepsilon}{2} x^n = \varepsilon x^n \leqq \varepsilon \end{aligned}$$

となる．この不等式で $m \to \infty$ とすれば

$$|\,S(x) - S_n(x)\,| \leqq \varepsilon \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

であるから，x について上限をとれば

$$\sup_{0 \leqq x \leqq 1} |\,S(x) - S_n(x)\,| \leqq \varepsilon$$

となるので

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leqq x \leqq 1} |\,S(x) - S_n(x)\,| = 0$$

が成り立つ．したがって，$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ は S に $[0,1]$ 上で一様収束するから，整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は閉区間 $[0,1]$ 上で一様収束する．　□

一般に整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を ρ としたときに，$x = \pm\rho$ では収束しているかどうかさえわからない．ただし，もし $x = \rho$ での級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ が収束するならば，そこまで含めて整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が連続になるという主張を述べたものが次のアーベルの連続性定理である．

定理 4.11. （アーベルの連続性定理）

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を $0 < \rho < \infty$ とする．もし $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ が収束するならば

$$\lim_{x \to \rho - 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$$

が成り立つ．$x = -\rho$ でも同様のことが成り立つ．

証明. $x = \rho y$ とおくと，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n y^n$ は y についての整級数であり，その収束半径は 1 である．$x = \rho$ で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束するから，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n y^n$ は $y = 1$ で収束するので，定理 4.10 より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n y^n$ は $0 \leqq y \leqq 1$ で一様収束する．よって，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n y^n$ は $0 \leqq y \leqq 1$ で連続であるから

$$\lim_{x \to \rho - 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{y \to 1 - 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$$

が成り立つ． □

Cauchy 積級数を用いれば次のように整級数展開を計算できることもある．

例題 4.12. $e^x \sin x$ はすべての実数 x について Maclaurin 展開可能であり

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots$$

となることを示せ．

（解答） $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ と $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ はともに収束半径 ∞ である．よって，すべての実数 x に対して絶対収束するから，定理 1.31 よりこれらの積である $e^x \sin x$ も整級数展開可能で

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\right) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots \end{aligned}$$

となる．

（解答終）

このように既に整級数展開がわかっている関数の積の場合には，その整級数展開の一般項を表すのが簡単でない場合でも次数が低い項から順番に具体的に計算できる．なお，$e^x \sin x$ については第 5 章例題 4.12 より

$$(e^x \sin x)^{(n)} = 2^{n/2} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

であったから，$n \to \infty$ のとき剰余項が 0 に収束することが示せるので

$$e^x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n$$

が成り立つ．

4.2　項別微分・項別積分

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の計算においては，項別微分や項別積分が重要な場面が多い．そこで，これらの計算が可能なことを確かめておく．まずその準備として，一般項を微分や積分した整級数の収束性について調べておく．

命題 4.13.　3 つの整級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$$

の収束半径は等しい．

証明.　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$ の収束半径をそれぞれ ρ_1, ρ_2, ρ_3 とする．

$|x| < \rho_2$ とすると，$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ が絶対収束するから，$|a_n x^n| \leqq n|a_n x^n|$ より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ も絶対収束する．よって，収束半径の定義より $\rho_2 \leqq \rho_1$ である（もし $\rho_2 = 0$ のときは，この不等式は明らかに成り立つ）．

$|x| < \rho_1$ とする．このとき，$c = \dfrac{|x| + \rho_1}{2}$ とおけば，$c < \rho_1$ より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ は収束する．よって，$\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$ なので，$\{a_n c^n\}_{n=0}^{\infty}$ は有界であるから，$|a_n c^n| \leqq M$ となる正の定数 M が存在する．ゆえに，$r = \dfrac{|x|}{c}$ とおけば

$$|n a_n x^n| = |a_n c^n| \cdot n \left(\frac{|x|}{c}\right)^n \leqq nMr^n$$

となる．ここで，$0 < r < 1$ であり，また

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)Mr^{n+1}}{nMr^n} = \lim_{n\to\infty} r\left(1 + \frac{1}{n}\right) = r \quad (< 1)$$

なので，ダランベールの判定法より $\sum_{n=0}^{\infty} nMr^n$ は収束する．したがって，$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ も絶対収束するから，$\rho_1 \leqq \rho_2$ である（もし $\rho_1 = 0$ のときは，この不等式は明らかに成り立つ）．

以上のことより $\rho_1 = \rho_2$ である．また，$b_n = \dfrac{a_n}{n+1}$ とおいて b_n を係数とする整級数にこの議論を適用すれば，$\rho_1 = \rho_3$ が成り立つことがわかる．　□

定理 4.14.（項別微分・項別積分）

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を $0 < \rho \leqq \infty$ とする．このとき，$-\rho < x < \rho$ ならば，次が成り立つ．

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

このそれぞれの右辺の整級数の収束半径も ρ であり，整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $(-\rho, \rho)$ 上で C^{∞} 級である．

証明.　整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は開区間 $(-\rho, \rho)$ 上で広義一様収束しているから，$(-\rho, \rho)$ に含まれる任意の有界閉区間上で一様収束している．ゆえに，定理の主張にあるような項別微分・項別積分が可能である．その結果の収束半径は命題 4.13 より変わらないから，また同じ開区間 $(-\rho, \rho)$ 上で項別微分・項別積分が可能なので，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $(-\rho, \rho)$ 上で C^{∞} 級であることがわかる．　□

例題 4.15. 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}\, x^n\, dx$ の値を求めよ.

（解答） $a_n = \dfrac{n+1}{3^n}$ とおけば，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)}{n+2} = 3$$

である．よって，$[0,1]$ 上で一様収束しているから項別積分可能で

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}\, x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{n+1}{3^n}\, x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{3^n} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

（解答終）

例題 4.16. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}\, x^{2n+1}$ であることを示せ.

（解答） $\sin t$ をマクローリン展開すれば

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n}$$

となる．$a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ とおけば，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ の収束半径は

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} (2n+2)(2n+3) = \infty$$

である．よって，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^{2n}$ の収束半径も ∞ なので任意の有界閉区間上で項別積分可能で，任意の実数 x に対して

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}\, x^{2n+1}$$

（解答終）

例題 4.17. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$ の和を求めよ.

（解答） $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}\, x^n$ とおく．$a_n = \dfrac{1}{2^n n}$ とおけば，$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2$$

である．よって，$f(x)$ は $|x| < 2$ では項別微分可能で

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, x^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}$$

となるから，$|x| < 2$ では積分定数を C とすれば

$$f(x) = -\log(2-x) + C$$

である．また，$f(0) = 0$ より $C = \log 2$ である．ゆえに，$f(x) = -\log(2-x) + \log 2$ だから，求める和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} = f(1) = \log 2$$

（解答終）

例題 4.18.　次の級数の和を求めよ．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{3^n}$　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

（解答）　$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ であるから，この両辺を微分すれば左辺は項別微分できて

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (|x|<1)$$

となる．この両辺に x をかければ，$|x|<1$ ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \tag{4.1}$$

が成り立つ．

(1)　(4.1)で $x=\frac{1}{2}$ を代入すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

(2)　$|x|<1$ ならば，(4.1)と無限等比級数の和の公式より

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)x^n = 3\sum_{n=1}^{\infty} nx^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{3x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} = \frac{x(2+x)}{(1-x)^2}$$

が成り立つ．よって，$x=\frac{1}{3}$ を代入すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{7}{4}$$

(3)　(4.1)の両辺を微分すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 - x\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

となる．この両辺に x をかければ，$|x|<1$ ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

が成り立つ．よって，$x=\frac{1}{2}$ を代入すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 6$$

（解答終）

項別微分を用いれば計算も簡単なうえに，公比が x の場合の公式 (4.1)などもわかるのが利点である．このように，第 n 部分和よりも無限級数の和の方が容易に求められることは少なくない．

4.3 初等関数の整級数展開

例題 4.19. （対数関数のマクローリン展開）

$\log(1+x)$ の Maclaurin 展開を求めよ．また，それを利用して級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ の和を求めよ．

（解答） 無限等比級数の和の公式から，$|t|<1$ ならば

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

となる．よって，$|x|<1$ のとき，この両辺を積分すれば左辺は

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \Big[\log|1+t|\Big]_0^x = \log(1+x)$$

であり，右辺は項別積分できて

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\,x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n$$

となるから，$\log(1+x)$ の Maclaurin 展開

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n \qquad (|x|<1)$$

が得られる．

上の議論は $|x|<1$ のときであるが，右辺の整級数で $x=1$ とすれば，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ は交代級数でライプニッツの定理が適用できる形なので収束する．ゆえに，アーベルの連続性定理と $\log(1+x)$ の $x=1$ での連続性より

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n \qquad (-1<x\leqq 1)$$

が成り立つ．したがって，この式で $x=1$ とすれば

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$$

（解答終）

例 1.29 と比べてみると，簡単に級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ の和が求められていることがわかる．前にも述べたように $\log(1+x)$ に Maclaurin の定理を適用した剰余項はやや複雑なので，項別積分を利用した $\log(1+x)$ の Maclaurin 展開の導き方を含めて理解しておくこと．

より一般に $\log x$ の $x=a$ のまわりでの Taylor 展開を求めれば

$$\log x = \log a\left(\frac{x-a}{a}+1\right) = \log a + \log\left(1+\frac{x-a}{a}\right) = \log a + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-a}{a}\right)^n$$

より

$$\log x = \log a + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}(x-a)^n \qquad (0<x\leqq 2a)$$

が成り立つことがわかる．

例題 4.20. （逆正接関数のマクローリン展開）

$\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ の Maclaurin 展開を求めよ．また，それを利用して級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ の和を求めよ．

（解答）　無限等比級数の和の公式から，$|t|<1$ ならば

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$$

となる．よって，$|x|<1$ のとき，この両辺を積分すれば左辺は

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \Big[\mathrm{Tan}^{-1}\,t\Big]_0^x = \mathrm{Tan}^{-1}\,x$$

であり，右辺は項別積分できて

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1}$$

となるから，$\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ の Maclaurin 展開

$$\mathrm{Tan}^{-1}\,x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1} \qquad (|x|<1)$$

が得られる．

これは $|x|<1$ のときであるが，右辺の整級数で $x=1$ とすれば，$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ は交代級数でライプニッツの定理が適用できる形なので収束する．$x=-1$ のときも同様に収束するから，アーベルの連続性定理より

$$\mathrm{Tan}^{-1}\,x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1} \qquad (|x|\leqq 1)$$

が成り立つ．したがって，この式で $x=1$ とすれば

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \mathrm{Tan}^{-1}\,1 = \frac{\pi}{4}$$

（解答終）

上の例題の結果より

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

と円周率を無限級数で表すことができる．ただし，これは収束が遅いため円周率 π の近似値の計算には適さない．収束半径ぎりぎりのところでの計算では収束速度についての良い結果は望めないのである．実際には加法定理を用いて次の「マチンの公式」

$$4\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{1}{5} - \mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

を示せるから（各自確かめよ），これを用いて

$$\frac{\pi}{4} = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)239^{2n+1}}$$

とした方が収束が速いので近似計算にはより適している．例えば「高野喜久雄の公式」

$$\frac{\pi}{4} = 12\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{1}{49} + 32\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{1}{57} - 5\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{1}{239} + 12\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{1}{110443}$$

を用いて記録が更新されたこともあった．2024 年現在では小数点以下 100 兆桁まで計算されたと発表されている．

0 以上の整数 m に対しては，二項展開

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_n\, x^n$$

が Maclaurin 展開となっている．そこで，指数 α が 0 以上の整数でない場合を考える．

例題 4.21. （べき乗のマクローリン展開）

α は 0 以上の整数でないとき，べき乗関数のマクローリン展開

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad (|x|<1)$$

が成り立つことを示せ．

（解答）　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

で定義する．この整級数の収束半径 ρ を求めると，$a_n = \binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ とおけば

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1$$

であるから，$f(x)$ は $|x|<1$ で定義できる．また，$|x|<1$ のときには項別微分可能で

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^{n-1}$$

であるから

$$\begin{aligned}
(1+x)f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha-n+1)\binom{\alpha}{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha-n)\binom{\alpha}{n} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\binom{\alpha}{n} x^n = \alpha f(x)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$|x|<1$ のとき

$$\begin{aligned}
\{f(x)(1+x)^{-\alpha}\}' &= f'(x)(1+x)^{-\alpha} - \alpha f(x)(1+x)^{-\alpha-1} \\
&= (1+x)^{-\alpha-1}\{(1+x)f'(x) - \alpha f(x)\} = 0
\end{aligned}$$

となるから，$f(x)(1+x)^{-\alpha}$ は定数関数である．その定数 C は特に $x=0$ とすれば $C=f(0)=1$ であるから

$$f(x) = (1+x)^\alpha \qquad (|x|<1)$$

が得られる．

（解答終）

例題 4.22. (逆正弦関数のマクローリン展開)
$\mathrm{Sin}^{-1}\, x$ の Maclaurin 展開を求めよ．

(解答)　一般二項展開の公式から，$|t| < 1$ ならば

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(-t^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-t^2)^n$$

となる．ここで

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

であるから

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, t^{2n}$$

が成り立つ．よって，$|x| < 1$ のとき，この両辺を積分すれば左辺は

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \Big[\, \mathrm{Sin}^{-1}\, t \,\Big]_0^x = \mathrm{Sin}^{-1}\, x$$

であり，右辺は項別積分できて

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\, x^{2n+1}$$

となるから，$\mathrm{Sin}^{-1}\, x$ の Maclaurin 展開

$$\mathrm{Sin}^{-1}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\, x^{2n+1} \qquad (|x| < 1)$$

が得られる．

これは $|x| < 1$ のときであるが，右辺の整級数で $x = 1$ とすれば，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ は例題 1.19(2) より収束する．$x = -1$ のときも同様に収束するから，アーベルの連続性定理より

$$\mathrm{Sin}^{-1}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\, x^{2n+1} \qquad (|x| \leqq 1)$$

が成り立つ．

(解答終)

これを用いて，広義積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Sin}^{-1}\, x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ を 2 通りで計算すれば（細かい議論を省略すると）

$$I = \lim_{t\to 1-0} \left[\frac{1}{2} (\mathrm{Sin}^{-1}\, x)^2 \right]_0^t = \lim_{t\to 1-0} \frac{1}{2} (\mathrm{Sin}^{-1}\, t)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

であり，$a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ とおいて項別積分すれば

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

より，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ となる．これより，$S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ とおけば

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{S}{4} + \frac{\pi^2}{8}$$

であるから，$S = \dfrac{\pi^2}{6}$ が得られる．この計算を正当化することを試みてみよ．

4.4 常微分方程式のべき級数解

項別微分の応用例として，微分方程式の解法の 1 つを紹介する．

例題 4.23. 次の微分方程式の解 $y = y(x)$ を求めよ．

$$y'' - 2xy' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

このような問題に対しては直接的に解を求めるのが難しいので，べき級数解を探してみることも有効である．つまり，とりあえず

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

とおいて，係数 a_n を求めるという方針で考えてみる．このとき，x の範囲を気にせず項別微分ができるとすると

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

であるから，方程式に代入して

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' - 2y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2n a_n - 2a_n\} x^n = 0 \end{aligned}$$

となる．これがすべての x で成り立つためには，x^n の係数がすべて 0 でなければならない．よって

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2n a_n - 2a_n = 0 \qquad \therefore\ a_{n+2} = \frac{2}{n+2}\, a_n$$

という漸化式が得られる．後は初期条件から

$$y(0) = a_0 = 1, \qquad y'(0) = a_1 = 0$$

が得られるので，次の漸化式から定まる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を求めればよい．

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad a_{n+2} = \frac{2}{n+2}\, a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

これより，$a_{2m+1} = 0 \ \ (m = 0, 1, 2, \ldots)$ であることはすぐにわかり，$n = 2m$ のときは

$$a_{2m+2} = \frac{2}{2m+2}\, a_{2m} = \frac{1}{m+1}\, a_{2m}$$

より

$$a_{2m} = \frac{1}{m}\, a_{2m-2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m-1}\, a_{2m-4} = \cdots = \frac{1}{m(m-1)\cdots 1}\, a_0 = \frac{1}{m!}$$

となる．ゆえに

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\, x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x^2)^m}{m!} = e^{x^2}$$

が得られる．

途中で「解 y はマクローリン展開できる」や「項別微分できる」と仮定したが，最後に得られた $y = e^{x^2}$ を微分方程式に代入すれば，確かに解であることが直接計算で確認できる．したがって，これが求める解である．もちろん $y = e^{x^2}$ はすべての実数 x でマクローリン展開できるから，上の議論も結果的に正しいことになる．

第8章　多変数関数の極限

この章では多変数関数の微積分の準備として，多変数関数の極限について学習する．主に 2 変数関数の極限について説明するが，3 変数以上の場合でもすべて定義や性質・定理は同じである．

1 変数関数 $f(x)$ の極限については，直接調べるのが難しい場合には左極限と右極限を考えて

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$$

という定理を用いれば，極限が存在するかどうかの判定および存在するときの極限値の計算ができた．これは数直線上を点 x が点 a に近づくときには，本質的には数直線上で負の方向から近づくか，正の方向から近づくかの 2 通りしかないので，左極限と右極限を調べることにより『すべての点 a への近づき方を網羅して調べた』ことになるからである．

しかし，2 変数関数 $f(x,y)$ の極限については状況が一変する．例えば，極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

は点 (x,y) が原点 $(0,0)$ に（途中で原点に到達することなく）限りなく近づくときに，$f(x,y)$ が限りなく近づく値を意味していると考えるのが妥当であるが，点 (x,y) が平面を動くので原点への近づき方が無数に存在する．例えば x 軸上を動いて原点に近づく，y 軸上を動いて原点に近づく，直線 $y=x$ に沿って原点に近づく，放物線 $y=x^2$ に沿って原点に近づく，原点のまわりで渦を作るようにぐるぐる回りながら近づく，$y = x\sin\dfrac{1}{x}$ のように波を描きながら振幅が減衰していって原点に近づく，などこれらは本質的に近づき方が異なる．そのため，多変数関数の極限については左極限・右極限のような概念はなく，すべて $\varepsilon-\delta$ 論法に基づいた定義および計算を実行するしかない．後の例でも出てくるが，高校以来の『限りなく近づく』といった直感的な捉え方は完全に破綻するので，理論・計算とも難しくなるがしっかり計算練習をして慣れておくこと．

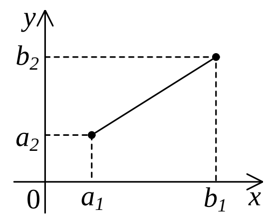
1 ユークリッド空間の位相

1.1 座標平面の開集合・閉集合

n 次元の場合を説明すると記号が難しくなるので，まずは座標平面 $\mathbb{R}^2 = \{\,(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\,\}$ の場合を説明する．以下では座標平面の点を原点を始点とする位置ベクトルを用いて $\boldsymbol{x} = (x,y)$ で表す．偏微分法以降の内容では縦ベクトルで表すのが自然なのだが，スペースや見やすさの関係でこの章では横ベクトルで表すことにする．

高校数学 II で学習したように，座標平面上の 2 点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ に対して，その 2 点間の距離は

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$



で与えられる．高校ではベクトルの絶対値も $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$ で表すが，ここではベクトルとスカラーの区別をはっきりさせるために上記の記号を用いることにする．これに関しても三角不等式

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つことが図形的にわかる．

座標平面上の点列の極限を定義するためには点と点が “近い” という概念を用意しなければならない．そこで，第 2 章定義 1.3 と同様に次を定義する．

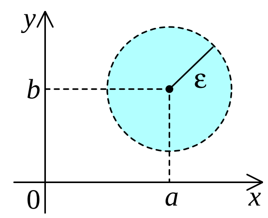
定義 1.1. （近傍）
$\varepsilon > 0$ と座標平面の点 $\boldsymbol{a} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = \{\,\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon\,\}$$

とおき，これを点 (a,b) の **ε-近傍**という．

$\boldsymbol{x} = (x,y)$ であるから，近傍の定義において

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2$$



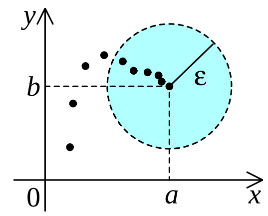
となるので，$U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ は中心 (a,b)，半径 ε の円の内部（境界線は含まない）を表している．

定義 1.2. （座標平面内の点列の極限）
座標平面内の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ と点 $\boldsymbol{a} = (a,b)$ が『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して，$n \geqq N(\varepsilon)$ をみたす任意の自然数 n について $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon$ をみたす』とき，$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\boldsymbol{a}$ に**収束する**といい

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a} \qquad \text{または} \qquad \boldsymbol{x}_n \longrightarrow \boldsymbol{a} \qquad (n \to \infty)$$

で表す．

定義 1.2 は第 3 章で学習した数列の極限の定義 1.2 と意味は同じである．そちらの方も復習しておくこと．なお，数列の極限との比較で上のように書いたが，近傍の記号を用いて表せば，『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して，$n \geqq N(\varepsilon)$ をみたす任意の自然数 n について $\boldsymbol{x}_n \in U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ をみたす』となる．つまり，点 $\boldsymbol{a}$ を中心とするどんなに小さな半径の小さな円を考えても，ある番号から先の点列はすべてその円の内部にあるということであり，「点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $\boldsymbol{a}$ に限りなく近づく」と言うことを表している．



命題 1.3. 座標平面内の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ と点 $\boldsymbol{a} = (a, b)$ に対して，$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{a}$ に収束するための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

が成り立つことである．

証明. $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{a}$ に収束するとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して，$n \geqq N(\varepsilon)$ をみたす任意の自然数 n について $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon$ が成り立つ．よって，$n \geqq N(\varepsilon)$ ならば

$$|x_n - a| \leqq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon$$

より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$ が成り立つ．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = b$ についても同様である．

逆に，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = b$ が成り立つとする．任意の $\varepsilon > 0$ をとる．このとき，$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0$ に対して，ある自然数 $N_1(\varepsilon')$ と $N_2(\varepsilon')$ が存在して

$$n \geqq N_1(\varepsilon') \implies |x_n - a| < \varepsilon', \qquad n \geqq N_2(\varepsilon') \implies |y_n - b| < \varepsilon'$$

が成り立つ．よって，$N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon'), N_2(\varepsilon')\}$ とおけば，$n \geqq N(\varepsilon)$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \sqrt{(\varepsilon')^2 + (\varepsilon')^2} = \sqrt{2}\,\varepsilon' = \varepsilon$$

となるから，$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\boldsymbol{a}$ に収束する． □

命題 1.3 より，点列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が点 (a, b) に収束することと，x 座標と y 座標がそれぞれ a と b に収束することが同値であるから，こちらの意味で収束の定義を理解してもよい．

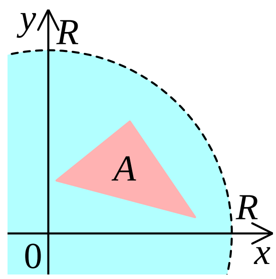
定義 1.4. （有界集合）

$\mathbb{R}^2$ の空でない部分集合 A が，ある $R > 0$ に対して

$$A \subset U_R\big((0, 0)\big)$$

となるとき，A は有界であるという．

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 A が有界であるとは，A が原点を中心とする十分大きな円に含まれるということであるから，大雑把にいえば A が無限にのびていないということである．



例えば，$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\{(x, y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ y = 3\}, \quad \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}, \quad \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\{(x, y) \mid x - y \geqq 0,\ 3x + y - 12 \leqq 0,\ x + 3y - 4 \geqq 0\}$$

は有界である．また

$$\{(x, y) \mid x > 0\}, \qquad \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geqq 1\}, \qquad \{(x, y) \mid 4x^2 - y^2 = 1\}$$

は有界ではない．これらの集合を座標平面に図示して確かめてみよ．

また，点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることも同様に定義される．

定義 1.5. （開集合・閉集合）

A を $\mathbb{R}^2$ の空でない部分集合とする．

(1) 点 $\boldsymbol{a}=(a,b)\in A$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して

$$U_\delta(\boldsymbol{a})\subset A$$

が成り立つとき，(a,b) は A の**内点**という．また，A の内点全体の集合を $\mathrm{Int}\,A$ で表し，A の**内部**という．

(2) A のすべての点が A の内点であるとき，つまり $A=\mathrm{Int}\,A$ が成り立つとき，A は**開集合**であるという．

(3) 点 $\boldsymbol{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して

$$U_\delta(\boldsymbol{x})\cap A=\emptyset$$

が成り立つとき，(x,y) は A の**外点**という．

(4) 点 $\boldsymbol{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ が A の内点でも外点でもないとき，つまり任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$U_\varepsilon(\boldsymbol{x})\cap A\neq\emptyset,\qquad U_\varepsilon(\boldsymbol{x})\cap A^c\neq\emptyset$$

が成り立つとき，(x,y) は A の**境界点**という．また，A の境界点全体の集合を ∂A で表し，A の**境界**という．

(5) 点 $\boldsymbol{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ が A の内点または境界点であるとき，つまり任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$U_\varepsilon(\boldsymbol{x})\cap A\neq\emptyset$$

が成り立つとき，(x,y) は A の**触点**という．また，A の触点全体の集合を $\overline{A}$ とおき，A の**閉包**という．

(6) $A=\overline{A}$ が成り立つとき，A は**閉集合**であるという．

(7) A が有界かつ閉集合であるとき，A は**有界閉集合**または**コンパクト**であるという．

用語の定義より常に $\mathrm{Int}\,A\subset A\subset\overline{A}$ が成り立つ．この左側の包含関係が等号になるときが開集合であり，右側の包含関係が等号になるときが閉集合である．用語が多いので大雑把にいえば，座標平面上の図形 A に対して，A の境界とは文字通り A の端のことである．境界が A にすべて含まれていなければ A は開集合，すべて含まれていれば A は閉集合となる．なお，すべての集合が開集合か閉集合のどちらかであるというわけではなく，開集合でも閉集合でもない集合はいくらでも存在するので注意すること．例えば，次の集合が開集合・閉集合かどうか調べてみる．まずは感覚的な答えだけ述べて，次のページで詳しく解答する．

$$A=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2<1\,\},\qquad B=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\,\},\qquad C=A\cup\{\,(x,y)\mid x^2+y^2=1,\ y\geqq 0\,\}$$

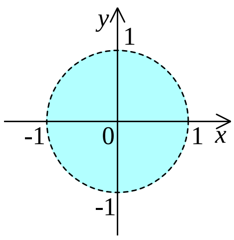


図 8.1: 集合 A

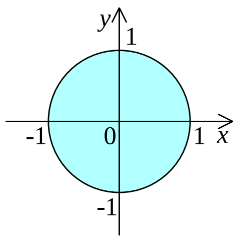


図 8.2: 集合 B

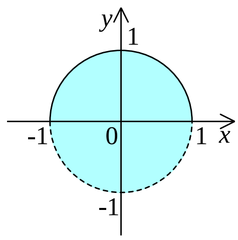


図 8.3: 集合 C

A の内部 $\mathrm{Int}\,A$，境界 ∂A，閉包 $\overline{A}$ はそれぞれ

$$\mathrm{Int}\,A=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2<1\,\},\qquad \partial A=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2=1\,\},\qquad \overline{A}=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\,\}$$

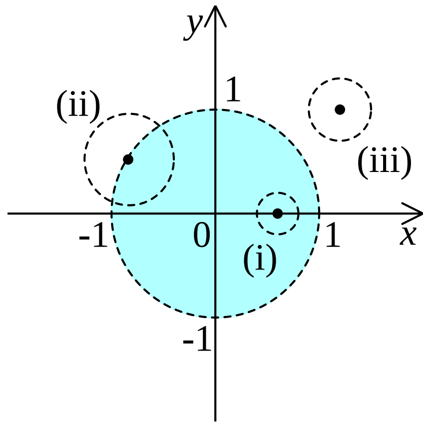
となる．よって，$A=\mathrm{Int}\,A$ であるから，A は開集合である．B と C の内部，境界，閉包はすべて A のそれらと同じである．よって，$B=\overline{B}$ であるから B は閉集合である．一方，$C\neq\mathrm{Int}\,C$ かつ $C\neq\overline{C}$ であるから C は開集合でも閉集合でもない．

例題 1.6.　次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A の内部 $\mathrm{Int}\,A$，境界 ∂A，閉包 $\overline{A}$ を求め，開集合か閉集合かどうか調べよ．

$$A = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\,\}$$

（解答）

(i)　任意の $\boldsymbol{a} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$，$a^2 + b^2 < 1$ をとると，$\delta = \dfrac{1 - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ は正の数である．また，$U_\delta(\boldsymbol{a}) \subset A$ が成り立つ．よって，(a, b) は A の内点である．



(ii)　任意の $\boldsymbol{a} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$，$a^2 + b^2 = 1$ をとる．これは円周上の点であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ は A と補集合 A^c の両方と共通部分をもつ．よって，(a, b) は A の境界点である．

(iii)　任意の $\boldsymbol{a} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$，$a^2 + b^2 > 1$ をとると，$\delta = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - 1}{2}$ は正の数である．また，$U_\delta(\boldsymbol{a}) \cap A = \emptyset$ が成り立つ．よって，(a, b) は A の外点である．

　したがって

$$\mathrm{Int}\,A = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\,\}, \quad \partial A = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\,\}, \quad \overline{A} = (\mathrm{Int}\,A) \cup \partial A = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\,\}$$

である．また，$A = \mathrm{Int}\,A$ より，A は開集合である．

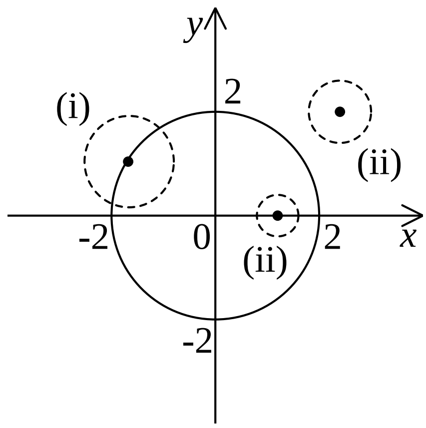
（解答終）

例題 1.7.　次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A の内部 $\mathrm{Int}\,A$，境界 ∂A，閉包 $\overline{A}$ を求め，開集合か閉集合かどうか調べよ．

$$A = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\,\}$$

（解答）

(i)　任意の $\boldsymbol{a} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$，$a^2 + b^2 = 4$ をとる．これは円周上の点であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ は A と補集合 A^c の両方と共通部分をもつ．よって，(a, b) は A の境界点である．



(ii)　任意の $\boldsymbol{a} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$，$a^2 + b^2 \fallingdotseq 4$ をとると，$\delta = \dfrac{\left|\sqrt{a^2 + b^2} - 2\right|}{2}$ は正の数である．また，点が円の内側でも外側でも $U_\delta(\boldsymbol{a}) \cap A = \emptyset$ が成り立つ．よって，(a, b) は A の外点である．

　したがって

$$\mathrm{Int}\,A = \emptyset, \qquad \partial A = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\,\}$$

$$\overline{A} = (\mathrm{Int}\,A) \cup \partial A = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\,\}$$

である．また，$A = \overline{A}$ より，A は閉集合である．

（解答終）

　このように内部が空集合となることもある．(a, b) が A の内点であることの定義は，ある小さな $\delta > 0$ に対して中心 (a, b)，半径 δ の円板が A に含まれなければならない．そのために A が点や曲線の集まりならばこのような条件をみたす点が存在しないので，A の内部は空集合となる．

座標平面内の点列についても数列と同様の定理が成り立つ．

定理 1.8. （Bolzano − Weierstrass の定理）
座標平面内の有界な点列は，収束する部分列をもつ．

証明. 点列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であるとする．このとき，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である．よって，第 3 章定理 6.8（Bolzano-Weierstrass の定理）より $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列をもつ．そこで，このような部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を選び，極限値を $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ とおく．

この選び出した番号に対して部分列 $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ も有界であるから，Bolzano-Weierstrass の定理より，さらに部分列を選んで $\{y_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ で $\lim_{l\to\infty} y_{n_{k_l}} = b$ と収束するものが存在する．ここで $\{x_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ は $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の部分列であるから同じ極限値に収束するので，$\lim_{l\to\infty}(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) = (a, b)$ が成り立つ．ゆえに，$\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}})\}_{l=1}^{\infty}$ は収束する． □

証明をきちんと述べると大変だが，要は各成分ごとに Bolzano-Weierstrass の定理を適用し順番に収束する部分列を選んでいるだけである．このように各成分ごとに同様の議論を繰り返すことで次の Cauchy 列に関する定理が成り立つ．

定義 1.9. （Cauchy 列）
点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在し，$m \geqq N(\varepsilon),\ n \geqq N(\varepsilon)$ を満たす任意の自然数 m, n について，$\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n\| < \varepsilon$ が成り立つ』とき，数列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は **Cauchy 列**であるという．

定理 1.10. 点列が収束するための必要十分条件は，Cauchy 列であることである．

証明. 点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{a} = (a, b)$ に収束するとする．任意の $\varepsilon > 0$ をとる．このとき，$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ に対して，ある自然数 $N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ が存在して

$$n \geqq N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．よって，$N(\varepsilon) = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ とおけば，$m \geqq N(\varepsilon),\ n \geqq N(\varepsilon)$ ならば

$$\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n\| \leqq \|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となるので，$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である．

逆に，点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であるとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在し

$$m \geqq N(\varepsilon), \quad n \geqq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n\| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって，$m \geqq N(\varepsilon),\ n \geqq N(\varepsilon)$ ならば

$$|\,x_m - x_n\,| \leqq \|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n\| < \varepsilon, \qquad |\,y_m - y_n\,| \leqq \|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n\| < \varepsilon$$

なので，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに Cauchy 列である．ゆえに，第 3 章定理 6.11 よりこれらは収束する．そこで，極限値をそれぞれ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

とおけば，命題 1.3 より $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (a, b)$ が成り立つから，点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する． □

定義 1.11. （領域）

$\mathbb{R}^2$ の開集合 A について，A の任意の 2 点をとったときに A の中だけを通る連続な曲線でその 2 点を結ぶことができるとき，A を**領域**という．これを数式で表現すれば，A の任意の 2 点 (a_1, a_2) と (b_1, b_2) に対して，ある $[0, 1]$ 上の連続関数 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ で

$$\bigl(\varphi(0), \psi(0)\bigr) = (a_1, a_2), \qquad \bigl(\varphi(1), \psi(1)\bigr) = (b_1, b_2)$$

$$\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr) \in A \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

となるものが存在するということである．

直感的には領域とは開集合であって「つながった 1 つの集合」のことである．

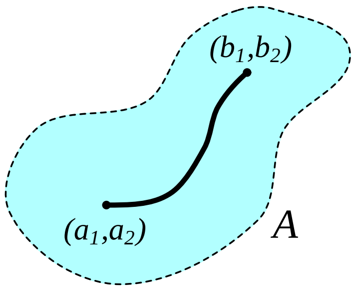


図 8.4: 領域

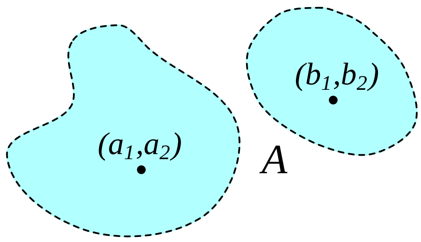


図 8.5: 領域でない

第 9 章偏微分法においてはこのような領域上の関数を考えることが基本になる．なぜならば，定義域が開集合ならば境界を含まないから，各点の十分小さな近傍が定義域に含まれて片側極限のようなものを考える必要がない．また，もし定義域が右図のように 2 つ以上に分かれていれば，それぞれの部分で極大・極小を調べればよいからである．

一方，関数の最大値や最小値を考えるときには有界閉集合（コンパクト）を考えるのが基本になる．なぜならば，1 変数関数の場合には定義域が開区間のように端点を含まなければ最大値や最小値があるかどうかわからず，$[0, \infty)$ のような有界な区間でない場合にもそれらの存在が保証されない．これと同様に境界を含みかつ有界でなければ最大値・最小値が存在しないかもしれないからである．

開集合と有界閉集合は今後よく現れるので，その定義と性質および上で述べたこれらを考える理由を理解しておくこと．

閉集合を特徴付ける性質として次の 2 つの定理が挙げられる．証明は難しくはないがやや複雑なので，ここまでに出てきた用語の定義を確認しつつ直感的に理解できれば大丈夫である．

定理 1.12. （閉集合の特徴づけ１）
$\mathbb{R}^2$ の空でない部分集合 K が閉集合であるための必要十分条件は『$\boldsymbol{x}_n \in K,\ \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$ ならば $\boldsymbol{a} \in K$』が成り立つことである．

証明. K を閉集合とし，$\boldsymbol{x}_n \in K,\ \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$ とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geqq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x}_n \in U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$$

が成り立つ．よって，$\boldsymbol{x}_{N(\varepsilon)} \in U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \cap K$ となるから，$U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \cap K \neqq \emptyset$ となる．ゆえに，$\boldsymbol{a}$ は K の触点となり $\boldsymbol{a} \in \overline{K}$ である．したがって，仮定より K は閉集合であるから $K = \overline{K}$ より，$\boldsymbol{a} \in K$ が成り立つ．

逆に,『』内の主張が成り立つとする．任意の $\boldsymbol{a} \in \overline{K}$ をとる．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \cap K \neqq \emptyset$ であるから，特に自然数 n に対して $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ とすれば，$\boldsymbol{x}_n \in U_{1/n}(\boldsymbol{a}) \cap K$ となる $\boldsymbol{x}_n$ を 1 つ選ぶことができる．ここで

$$\boldsymbol{x}_n \in K, \qquad \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| < \frac{1}{n}$$

であるから，はさみうちの定理より $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$ が得られる．よって,『』の仮定より $\boldsymbol{a} \in K$ が成り立つ．ゆえに $\overline{K} \subset K$ となるが，常に $K \subset \overline{K}$ であるから $K = \overline{K}$ となるので，K は閉集合である． □

よく誤解されるが，定理の条件『$\boldsymbol{x}_n \in K,\ \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$ ならば $\boldsymbol{a} \in K$』が成り立つことは当たり前のことではない．例えば

$$K = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\,\}, \qquad \boldsymbol{x}_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 0\right)$$

とおけば，$\boldsymbol{x}_n \in K,\ \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = (1, 0)$ であるが，$(1, 0) \notin K$ である．このように K 内の点列であってもその極限も K の点とは限らない．極限がはみ出ないことを保証する条件が K が閉集合，すなわち境界点がすべて K に属することである．

定理 1.13. （閉集合の特徴づけ２）
$\mathbb{R}^2$ の空でない部分集合 K が閉集合であるための必要十分条件は補集合 K^c が開集合であることである．

証明. K が閉集合であるとする．任意の $\boldsymbol{x} \in K^c$ をとると，$\boldsymbol{x} \notin K = \overline{K}$ より $\boldsymbol{x}$ は K の外点である．よって，ある $\delta > 0$ が存在して $U_\delta(\boldsymbol{x}) \cap K = \emptyset$ が成り立つ．これは $U_\delta(\boldsymbol{x}) \subset K^c$ と同値であるから，$\boldsymbol{x}$ は K^c の内点となる．ゆえに $K^c \subset \mathrm{Int}(K^c)$ となるが，常に $\mathrm{Int}(K^c) \subset K^c$ であるから $K^c = \mathrm{Int}(K^c)$ となるので，K^c は開集合である．

逆に，K^c が開集合であるとする．任意の $\boldsymbol{x} \in K^c$ をとると，$\boldsymbol{x}$ は K^c の内点なので，ある $\delta > 0$ が存在して $U_\delta(\boldsymbol{x}) \subset K^c$ となる．これは $U_\delta(\boldsymbol{x}) \cap K = \emptyset$ と同値であるから，$\boldsymbol{x}$ は K の外点となる．ゆえに

$$\boldsymbol{x} \in K^c \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} \text{ は } K \text{ の外点}$$

となるので，この対偶をとれば

$$\boldsymbol{x} \text{ が } K \text{ の触点} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} \in K$$

が得られる．ゆえに $\overline{K} \subset K$ となるが，常に $K \subset \overline{K}$ であるから $K = \overline{K}$ となるので，K は閉集合である． □

この定理の主張は K が閉集合ならば K の境界 ∂K はすべて K に含まれるので，その補集合 K^c については境界 $\partial(K^c) = \partial K$ はすべて K^c に含まれない．よって，K^c は開集合ということである．

1.2 $\mathbb{R}^n$ の開集合・閉集合

n 個の実数を並べて得られる集合を

$$\mathbb{R}^n = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, \ldots, n) \,\}$$

とおき，2 点間の距離を $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 \right)^{1/2}$$

で定める．この $\mathbb{R}^n$ を n **次元ユークリッド空間**という．

n 次元のときの各種概念（近傍，極限，内点・外点・境界点・触点，開集合・閉集合，領域）の定義はまったく同様である．実際，平面のときは距離が

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

で定められていたが，これをすべて

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

で読み替えればよい．命題や定理の証明についても同様に行うことができる．例えば，$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ の近傍の定義は

$$U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon \,\}$$

であり，内点の定義などは見た目はまったく同じである．

3 次元ユークリッド空間は高校数学 B で学習した xyz 空間のことであり，点 $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ の近傍

$$U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon \,\}$$

は点 (a, b, c) を中心とし，半径が ε の球の内部（表面の球面は含まない）となる．

4 次元以上の場合にはもはや図を描くことはできないが，応用上は重要である．例えば空間内の質点の移動に関してはその位置だけなら 3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ で表せるが，その速度ベクトルも並べれば

$$(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}'(t)) = (x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t))$$

と 6 次元になる．また，実験の際に温度や圧力などの他のパラメータを加えればより変数が多くなる．このように 3 次元空間内の現象を捉えるためだけでも 3 変数の理論では不十分であり，必ず n 変数の理論が必要となる．n 次元ユークリッド空間および今後述べる n 変数関数の議論は，決して現象と無関係な数学的対象物ではないので，しっかりと内容を把握していくこと．ただし，いきなり n 変数の場合の説明を行うと初学者にとって議論が必要以上に見にくくなる場合も少なくないので，たいていの場合には 2 変数関数の議論から順を追って解説することにする．

2　2 変数関数の極限

2.1　2 変数関数の定義とそのグラフ

定義 2.1. （**2 変数関数**）
　$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D に対して，写像 $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ を **2 変数関数**という．このとき，D を $f(x,y)$ の**定義域**といい，次の $\mathbb{R}$ の部分集合

$$f(D) = \{\, f(x,y) \mid (x,y) \in D \,\}$$

を $f(x,y)$ の**値域**という．また，$\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\{\, (x,y,z) \mid z = f(x,y),\ (x,y) \in D \,\}$$

を関数 $z = f(x,y)$ の**グラフ**という．これを曲面 $z = f(x,y)$ とも呼ぶ．

　f の定義域を $\mathbb{R}^2$ 全体，g の定義域を $D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1 \,\}$ とすれば

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

は 2 変数関数である．

　$z = f(x,y)$ のグラフを描くのは難しいが，等高線を考えてみるとわかりやすい．まず $z = x^2 + y^2 \geqq 0$ である．また，$z = c > 0$ とおくと $x^2 + y^2 = c$ となり，これは xy 平面で原点を中心とする半径 $\sqrt{c}$ の円となる．これより曲面 $z = f(x,y)$ の z 軸に垂直な断面の様子がわかるので，グラフの概形を把握することができる．

　また，$z = g(x,y)$ のグラフは座標空間内で原点を中心とし，半径が 1 の球面の上半分となる．なぜならば

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqq 0$$

だからである．

　このように，2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，$z = f(x,y)$ のグラフは座標空間内の曲面になる．ただ，実際にグラフを描くのは難しいことが多い．簡単に描けるのは次に挙げる空間内の平面である．

命題 2.2. （**平面の方程式**）
　$(a,b,c) \fallingdotseq (0,0,0)$ とし，d を実数とする．座標空間において，方程式

$$ax + by + cz + d = 0$$

は $\boldsymbol{n} = (a,b,c)$ に垂直な平面の方程式を表す．

証明.　点 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ を通りベクトル $\boldsymbol{n} = (a,b,c)$ に垂直な平面を H とする．このとき，点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ が平面 H 上にあるための必要十分条件は $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ である．これを成分計算すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \boldsymbol{n} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a,b,c) &= (x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c \\ &= ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0\end{aligned}$$

そこで，$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ とおけば，$ax + by + cz + d = 0$ が成り立つ．　□

　このことより，x と y の 1 次式で表される関数 $z = ax + by + d$ のグラフは，方程式が

$$ax + by - z + d = 0$$

と表せるので，点 $(0,0,d)$ を通りベクトル $\boldsymbol{n} = (a,b,-1)$ と垂直な平面であることがわかる．

2.2　2 変数関数の極限の定義と性質

定義 2.3. （2 変数関数の極限）

関数 $f(x,y)$ は点 $\boldsymbol{a}=(a,b)$ の近傍上で定義されているとする（ただし，点 $\boldsymbol{a}$ では定義されていなくてもよい）．このとき，ある実数 α が存在して『任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon)>0$ が存在し

$$0 \fallingdotseq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < \delta(\varepsilon)$$

をみたす任意の $\boldsymbol{x}=(x,y)$ について

$$|\,f(x,y)-\alpha\,| < \varepsilon$$

となる』という条件をみたすとき，点 (a,b) で $f(x,y)$ は α に**収束**するといい

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\alpha \qquad \text{または} \qquad f(x,y)\to\alpha \qquad (\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a})$$

のように表す．また，どのような実数にも収束しないとき**発散**するという．

この定義を大雑把に言い直すと『点 (x,y) が点 (a,b) と異なる値をとりながら (a,b) にどのように近づいても，$f(x,y)$ がいつも同じ一定の値 α に近づく』ということである．これを曖昧さを排除し厳密に記述したものが定義 2.3 となる．

極限の議論に慣れるために，当たり前に成り立つべきと考えられる事実を定義に従って確認してみる．

例題 2.4.　次の極限が成り立つことを示せ．

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x=a, \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y=b$$

（解答）　$\boldsymbol{a}=(a,b)$ とおく．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ とおく．このとき，$0 \fallingdotseq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < \delta(\varepsilon)$ となる任意の $\boldsymbol{x}=(x,y)$ に対して

$$|\,x-a\,| \leqq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < \delta(\varepsilon)=\varepsilon, \qquad |\,y-b\,| \leqq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < \delta(\varepsilon)=\varepsilon$$

となる．ゆえに，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} x=a,\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} y=b$ が成り立つ．

（解答終）

例題 2.5.　次の極限が成り立つことを示せ．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}=0$$

（解答）　任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ とおくと，$0 \fallingdotseq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{0}\| < \delta(\varepsilon)$ となる任意の $\boldsymbol{x}=(x,y)$ に対して

$$\left|\sqrt{x^2+y^2}-0\right| = \sqrt{x^2+y^2} = \|\boldsymbol{x}\| < \delta(\varepsilon)=\varepsilon$$

となる．ゆえに，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}=0$ が成り立つ．

（解答終）

2 変数関数の極限についても具体的な計算の場合には，イプシロン・デルタ論法ではなく後に述べるはさみうちの定理や関数の連続性を用いるのが普通である．ただし，極限の定義に関する正しい理解が必要となるので，1 変数関数の極限ほど簡単ではない．

n 変数関数の極限の定義は，$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}$ とすれば，定義 2.3 とまったく同じである．これから述べる定理などもすべて同様に成り立つ．そこで，計算例については主に 2 変数関数の場合を説明する．

n 変数関数の極限についても，1 変数関数の極限と類似の定理が成り立つ．

定理 2.6. （2 変数関数の極限の性質）
$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\alpha,\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=\beta$ であるとき，次が成り立つ．

(1) $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ に対して，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}\{\lambda f(x,y)+\mu g(x,y)\}=\lambda\alpha+\mu\beta$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y)=\alpha\beta$

(3) $\beta\fallingdotseq 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{\alpha}{\beta}$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}|f(x,y)|=|\alpha|$

証明. $\lambda=\mu=0$ のときは両辺とも 0 で明らかなので，$(\lambda,\mu)\fallingdotseq(0,0)$ とする．また，$\boldsymbol{a}=(a,b)$ とおく．
任意の $\varepsilon>0$ をとる．このとき，$\varepsilon^*=\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|+|\mu|}>0$ に対して，ある $\delta_1(\varepsilon^*)>0$ が存在して

$$0\fallingdotseq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta_1(\varepsilon^*)\quad\Longrightarrow\quad|f(x,y)-\alpha|<\varepsilon^*$$

が成り立つ．また，同じ $\varepsilon^*>0$ に対して，ある $\delta_2(\varepsilon^*)>0$ が存在して

$$0\fallingdotseq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta_2(\varepsilon^*)\quad\Longrightarrow\quad|g(x,y)-\beta|<\varepsilon^*$$

が成り立つ．そこで，$\delta(\varepsilon)=\min\{\,\delta_1(\varepsilon^*),\,\delta_2(\varepsilon^*)\,\}$ とおくと，$0\fallingdotseq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta(\varepsilon)$ となる任意の $\boldsymbol{x}=(x,y)$ に対して

$$\begin{aligned}|\{\lambda f(x,y)+\mu g(x,y)\}-(\lambda\alpha+\mu\beta)|&=|\lambda\{f(x,y)-\alpha\}+\mu\{g(x,y)-\beta\}|\\&\leqq|\lambda|\,|f(x,y)-\alpha|+|\mu|\,|g(x,y)-\beta|<\big(|\lambda|+|\mu|\big)\varepsilon^*=\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}\{\lambda f(x,y)+\mu g(x,y)\}=\lambda\alpha+\mu\beta$ が成り立つ．

(2), (3), (4) についても同様であるから，各自の演習問題とする． □

この定理の証明の流れは第 3 章定理 2.1 などと同じである．2 変数関数の極限の定義は一見難しいが，その代わりに定理の主張やその証明は 1 変数関数の極限の場合と似たようなものになる．そのため，今後は定理の主張を紹介するにとどめ，その証明は演習問題とする．なお，第 4 章定理 1.7 のように 2 変数関数の極限を平面内の点列の極限を利用して特徴付けることもできる．その方針でこれらの定理を証明してもよい．

定理 2.7. 点 (a,b) のある近傍上の点 $(x,y)\fallingdotseq(a,b)$ について

$$f(x,y)\leqq g(x,y)$$

が成り立ち，さらに

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\alpha,\qquad\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=\beta$$

であるとき，$\alpha\leqq\beta$ が成り立つ．

定理 2.8. （はさみうちの定理）
点 (a,b) のある近傍上の点 $(x,y)\fallingdotseq(a,b)$ について

$$|f(x,y)-\alpha|\leqq g(x,y)$$

が成り立ち，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=0$ であるとき，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\alpha$ が成り立つ．

2.3　2 変数関数の極限の計算例

2 変数関数の不定形の極限を調べるときには，収束するときと発散するときで全く解答の方針が異なる．

収束する場合には “ どのような近づき方でも ” 同じ値に収束することを示さなければならないので，基本的にはさみうちの定理を用いなければならない．以下では主に $(x, y) \to (0, 0)$ の場合の極限の例を挙げる（そうでなければ関数全体を平行移動すればよい）．このときには $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおけば，例題 2.5 より $(x, y) \to (0, 0)$ のとき $r \to +0$ となる．そこで

$$|x| \leqq \sqrt{x^2 + y^2} = r, \qquad |y| \leqq \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

などを利用して

$$|\, f(x, y) - \alpha \,| \leqq g(r), \qquad \lim_{r \to +0} g(r) = 0$$

となる関数 $g(r)$ を見つければ，はさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \alpha$ が成り立つ．

一方，発散することを示すには「ある 2 通りの異なる近づき方で異なる値に収束する」または「ある近づき方で発散する」ことを示せば十分である．直線 $y = kx$ に沿って近づくと k の値によって極限値が異なることを示してもよいが，極限を考える関数が複雑になると文字を含んだ計算が面倒になること，およびいつも $y = kx$ とすればよいわけではないことに注意すること．

例題 2.9.　次の関数の極限を調べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$　　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

（解答）

(1)　$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと，$|x| \leqq r,\ |y| \leqq r$ である．よって，$(x, y) \fallingdotseq (0, 0)$ に対して

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x| \cdot |y|}{r} \leqq \frac{r \cdot r}{r} = r \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (r \to +0)$$

となる．ゆえに，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ である．

(2)　$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \quad \big((x, y) \fallingdotseq (0, 0)\big)$ とおく．

x 軸上を動きながら原点に近づくときは，$x(t) = t,\ y(t) = 0$ として $t \to 0$ とすればよいから

$$\lim_{t \to 0} f(t, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0} = \lim_{t \to 0} 0 = 0$$

となる．

直線 $y = x$ に沿って原点に近づくときは，$x(t) = t,\ y(t) = t$ として $t \to 0$ とすればよいから

$$\lim_{t \to 0} f(t, t) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

となる．

ゆえに，原点への近づき方を変えると極限値が変わるので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ は存在しない．

（解答終）

(1) は分母は 2 乗のルートなのでおよそ 1 次式で，分子は 2 次式と考えられるから，分母よりも分子が 0 に近づく方が速いと予想できる．(2) は分母と分子がともに 2 次式で 0 に近づく速さが釣り合っているので，近づき方の経路によって極限値が変わると予想できる．このような予想に基づいて解答を始めたものが上の答案である．1 変数関数の不定形の極限における漸近展開の利用を思い出すと，$\dfrac{0}{0}$ の不定形であれば一番次数が低い項（主要項）が重要であった．そのため，分母と分子の一番低い次数に着目するのは有効なことが多い．ただし，すべてが次数で決まるわけではないので，予想した結果を論証できるようにしておくこと．

例題 2.10.　次の関数の極限を調べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin y}{x^2+y^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+x^2y^2}{2x^2+3y^2}$　(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

（解答）

(1)　$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくと，$|x|\leqq r,\ |\sin y|\leqq|y|\leqq r$ である．よって，$(x,y)\fallingdotseq(0,0)$ に対して

$$\left|\frac{x^2\sin y}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{|x^2\sin y|}{x^2+y^2}=\frac{|x|^2\,|\sin y|}{r^2}\leqq\frac{r^2\cdot r}{r^2}=r\quad\longrightarrow\quad 0\qquad(r\to+0)$$

となる．ゆえに，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin y}{x^2+y^2}=0$ である．

(2)　$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくと，$|x|\leqq r,\ |y|\leqq r$ である．よって，$(x,y)\fallingdotseq(0,0)$ に対して

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{|x^3-y^3|}{r^2}\leqq\frac{|x^3|+|y^3|}{r^2}=\frac{|x|^3+|y|^3}{r^2}\leqq\frac{r^3+r^3}{r^2}=2r\quad\longrightarrow\quad 0\qquad(r\to+0)$$

となる．ゆえに，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=0$ である．

(3)　$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくと，$|x|\leqq r,\ |y|\leqq r$ である．よって，$(x,y)\fallingdotseq(0,0)$ に対して

$$0<r^2=x^2+y^2\leqq 2x^2+3y^2$$

であるから

$$\left|\frac{x^4+x^2y^2}{2x^2+3y^2}-0\right|=\frac{x^4+x^2y^2}{2x^2+3y^2}\leqq\frac{r^4+r^2r^2}{r^2}=2r^2\quad\longrightarrow\quad 0\qquad(r\to+0)$$

となる．ゆえに，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+x^2y^2}{2x^2+3y^2}=0$ である．

(4)　$f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$　$\big((x,y)\fallingdotseq(0,0)\big)$ とおく．

y 軸上を動きながら原点に近づくときは，$x(t)=0,\ y(t)=t$ として $t\to 0$ とすればよいから

$$\lim_{t\to 0}f(0,t)=\lim_{t\to 0}\frac{0}{\sqrt{0+t^2}}=\lim_{t\to 0}0=0$$

となる．

x 軸上を正の方向から原点に近づくときは，$x(t)=t,\ y(t)=0$ として $t\to+0$ とすればよいから

$$\lim_{t\to+0}f(t,0)=\lim_{t\to+0}\frac{t}{\sqrt{t^2+0}}=\lim_{t\to+0}\frac{t}{|t|}=\lim_{t\to+0}\frac{t}{t}=\lim_{t\to+0}1=1$$

となる．

ゆえに，原点への近づき方を変えると極限値が変わるので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は存在しない．

（解答終）

不定形の極限計算においては，最初に収束するか発散するかの見極めが重要になる．1 変数関数の漸近展開を思い出せば，およその様子は分母と分子で一番次数が低いものに着目すれば見当がつくこともある．分母と分子で一番低い次数が同じであれば極限値が近づき方に依存して変化しやすく，例えば分子が分母より高位の無限小ならば 0 に収束するのではと予想できる．(1) は $\sin y$ の漸近展開が $y+\cdots$ であるから，分母は 2 次で分子は 3 次だから極限値は 0 だろうと予想して解答を始めている．

また，論述では三角不等式をよく用いるが，$|a+b|\leqq|a|+|b|$ の他に $|a-b|\leqq|a|+|b|$ もよく用いられる．$|a-b|\leqq|a|-|b|$ **ではない**（これだと右辺が負になりうるから明らかにおかしい）ので注意すること．

収束を示すときに，r や三角不等式などを使わずに『直線 $y = mx$ に沿って原点に近づく場合（と y 軸に沿う場合）を調べて，それが m によらない値になることを示せばよいのでは？』と思うかもしれない．確かに 360 度すべての方向から原点にまっすぐ近づく場合を調べれば，すべての近づき方をカバーできているのではと期待したい気持ちもわかる．

しかし，そのような考え方が正しくないことを示すものが次の例題である．

例題 2.11. 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ を調べよ．

（解答） $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} \quad \big((x,y) \neq (0,0)\big)$ とおく．

x 軸上を動きながら原点に近づくときは，$x(t) = t,\ y(t) = 0$ として $t \to 0$ とすればよいから

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cdot 0}{t^4+0} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

となる．

放物線 $y = x^2$ に沿って原点に近づくときは，$x(t) = t,\ y(t) = t^2$ として $t \to 0$ とすればよいから

$$\lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

となる．

よって，原点への近づき方を変えると極限値が変わるので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ は存在しない．

（解答終）

解答には直接関係ないが，他の近づき方の様子も調べてみる．

y 軸上を動きながら原点に近づくときは，$x(t) = 0,\ y(t) = t$ として $t \to 0$ とすればよいから

$$\lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} \frac{0 \cdot t}{0+t^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

となる．

直線 $y = mx$ $(m \neq 0)$ に沿って原点に近づくときは，$x(t) = t,\ y(t) = mt$ として $t \to 0$ とすればよいから

$$\lim_{t\to 0} f(t,mt) = \lim_{t\to 0} \frac{mt^3}{t^4+m^2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{mt}{t^2+m^2} = 0$$

となる．

このように直線に沿って原点に近づくときはいつも同じ値に収束するが，放物線のようにカーブを描きながら近づくときには異なる値に収束することがある．これより，直線に沿って近づく場合だけを調べても，極限の収束は示せないことがわかる．

この例を講義で紹介すると，どうすれば $y = x^2$ に沿った経路を思いつくのかと質問されることも多いが，それには「慣れ」と答えている．多変数関数の解析に慣れてくれば，分母と分子で x の指数と y の指数がともに $2:1$ だから，バランスをとるために $y = x^2$ とすれば約分できる形になるな…と予想はできる．ただ，初学者が個別の問題ごとに解法を暗記することにはあまり意味がないので，こういった問題よりもまずは前のページの例題の計算に慣れるよう試行錯誤しつつ練習してほしい．

注意 2.12.（極座標変換を用いた解答への注意）

一部の参考書では 2 変数関数の極限の計算において

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \qquad (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

と極座標に変換をして，$r \to +0$ のとき θ によらずに一定の値に収束すればよいという解法を紹介している．この極座標変換による解法は勘違いを起こしやすいので，私は推奨しないし絶対に講義でも紹介しない．なぜなら，無意識に頭の中で θ を任意に固定して $r \to +0$ としてしまいがちだからである．

例えば，前の例題『極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ を調べよ』に対して,『極座標に変換すれば

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} \cos\theta\sin\theta = \cos\theta\sin\theta$$

より，極限値が θ によって変わるから極限は存在しない』という解答が書いてある本もある．しかし，(x, y) が原点に近づく際に r と θ が独立とは限らない．例えば，原点の周りをぐるぐる回りながら原点に近づけば，r が変わると連動して θ も変化しているので最後のイコールは誤りにしか見えない．θ は r によらず一定で定数扱いとするのであれば，最初から傾き m の直線 $y = mx$ に沿って近づく場合を考えるとした方が論理が明確なうえに計算も簡単になることが多い（y 軸に沿った近づき方が対象外になるが，それが致命的なことは少ない）.

実際，解析演習（東京大学出版会）など有名な本でも極座標変換に起因する誤答が見受けられる．例えば，既に挙げた例題 2.11 がまさにそのようなものである．これを極座標で考えると，収束して極限値 0 と間違えやすい．そのためかいくつかの参考書や web 上のプリントにおいては，2 変数関数の極限を常に極座標変換を用いて計算しているのに，上の例題だけ急に極座標変換を用いない解答にシフトしている．常に適用できるわけではないうえに誤解を生みやすい解法を，いかにも便利で万能なもののように紹介するのは個人的にはどうかと思う．

また，3 変数以上の場合には極座標変換の計算は簡単ではない．多変数関数でも計算できるよう，極座標による具体的な表示に頼らずに，次数から無限小の位数を通して関数の挙動を予想できるようになることは意味がある．極座標変換を用いることによる三角関数についての無駄に細かな計算よりも，三角不等式や絶対値の取り扱いを通して不等式評価に慣れるための題材として，この 2 変数関数の極限の問題を取り扱う方が適切なように感じる．

2.4　2 変数関数の累次極限

2 変数関数の極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ は点 (x,y) を点 (a,b) に近づけたときの極限であり，詳しい定義と計算例は前に述べたとおりである．よく勘違いされやすいが，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ は次の累次極限と呼ばれる 2 回繰り返して極限をとった

$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right), \qquad \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$$

とは異なるものである．

例題 2.13.　$\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$

に対して，極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ を調べよ．

（解答）　$y \neq 0$ ならば

$$|f(x,y)| = \left|x\cos\frac{1}{y}\right| = |x|\left|\cos\frac{1}{y}\right| \leqq |x|$$

であり，$y = 0$ ならば

$$|f(x,0)| = 0 \leqq |x|$$

となる．よって，$(x,y) \neq (0,0)$ に対して

$$|f(x,y)| \leqq |x| \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad \big((x,y) \to (0,0)\big)$$

となる．ゆえに，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である．

$y \neq 0$ を固定すれば

$$|f(x,y)| = \left|x\cos\frac{1}{y}\right| = |x|\left|\cos\frac{1}{y}\right| \leqq |x| \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (x \to 0)$$

となる．ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$ である．したがって，$\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$ となる．

$x \neq 0$ を固定すれば

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} x\cos\frac{1}{y}$$

は第 4 章例題 3.8 と同様に関数が振動して極限が存在しない．したがって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ は存在しない．

（解答終）

この例題では

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$$

となっている．このように，極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \alpha$ が存在するからといって

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \alpha$$

が成り立つとは限らないので注意すること．座標平面内の点列の収束については各成分ごとに極限をとればよかったが，2 変数関数の極限については無条件に各成分ごとの極限に分けることはできない．

例題 2.14. 次の $f(x,y)$ に対して，極限 $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right), \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を調べよ．

(1) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} & (x+y \fallingdotseq 0) \\ 0 & (x+y=0) \end{cases}$　　(2) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^2}{x-3y} & (x-3y \fallingdotseq 0) \\ 0 & (x-3y=0) \end{cases}$

（解答）

(1)　$y \fallingdotseq 0$ を固定すれば，$|x|<|y|$ のとき $x+y \fallingdotseq 0$ なので

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\frac{0-y}{0+y}=-1 \qquad \therefore\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=-1$$

$x \fallingdotseq 0$ を固定すれば，$|y|<|x|$ のとき $x+y \fallingdotseq 0$ なので

$$\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\frac{x-0}{x+0}=1 \qquad \therefore\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=1$$

形式的に $\dfrac{x-y}{x+y}=k$ とおくと，$y=\dfrac{1-k}{1+k}x$ となる．そこで，$k \fallingdotseq -1$ に対して $l_k\colon y=\dfrac{1-k}{1+k}x$ とおく．これは $y=-x$ と一致することはないから，この直線 l_k に沿って原点に近づけば

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in l_k}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in l_k}}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in l_k}} k=k$$

となる．ゆえに，原点への近づき方を変えると極限値が変わるので，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．

(2)　$y \fallingdotseq 0$ を固定すれば，$|x|<3|y|$ のとき $x-3y \fallingdotseq 0$ なので

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{y^2}{x-3y}=\frac{y^2}{0-3y}=-\frac{y}{3} \qquad \therefore\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{y}{3}\right)=0$$

$x \fallingdotseq 0$ を固定すれば，$|y|<\dfrac{|x|}{3}$ のとき $x-3y \fallingdotseq 0$ なので

$$\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{x-3y}=\frac{0}{x-0}=0 \qquad \therefore\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0} 0=0$$

形式的に $\dfrac{y^2}{x-3y}=k$ とおくと，$x=\dfrac{y^2}{k}+3y$ となる．そこで，$k \fallingdotseq 0$ に対して $C_k\colon x=\dfrac{y^2}{k}+3y$ とおく．これは $x=3y$ と原点でしか交わらないから，この放物線 C_k に沿って原点に近づけば

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_k}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_k}}\frac{y^2}{x-3y}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_k}} k=k$$

となる．ゆえに，原点への近づき方を変えると極限値が変わるので，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．

（解答終）

このように $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=0$ であっても，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ が成り立つとは限らない．2 変数関数の極限は定義に基づいて計算すること．

3　多変数連続関数とその性質

3.1　2 変数関数の各点での連続性

定義 3.1. （**2 変数関数の各点での連続性**）

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ があり，$(a,b) \in D$ とする．

(1)　点 (a,b) が D の内点でさらに

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

をみたすとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で**連続**であるという．

これをイプシロン･デルタ論法で述べれば『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し，$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < \delta(\varepsilon)$ をみたす任意の $\boldsymbol{x} = (x,y)$ について

$$|\, f(x,y) - f(a,b)\,| < \varepsilon$$

となる』という条件をみたすことである．

(2)　点 (a,b) が D の境界点でさらに (a,b) に D の中から近づいたときの極限について

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in D}} f(x,y) = f(a,b)$$

をみたすとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で**連続**であるという．

これをイプシロン･デルタ論法で述べれば『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し，$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < \delta(\varepsilon)$ をみたす任意の $\boldsymbol{x} = (x,y) \in D$ について

$$|\, f(x,y) - f(a,b)\,| < \varepsilon$$

となる』という条件をみたすことである．

点 $(a,b) \in D$ が D の境界点ならば，D の点で全方向から近づくことができないので上記のような定義となるが，本質的には $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ ということである．以下でも $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in D}} f(x,y)$ を $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ のように略記し，細かい記法の部分はあまり気にしないことにする．

n 変数関数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ での連続性も同様に

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$$

が成り立つこととして定義される．また，以下に述べる定理も同様の主張がすべて成り立つ．

定理 2.6 より次の定理が成り立つ．

定理 3.2. （2 変数関数の各点での連続性に関する性質）

関数 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ がともに点 (a,b) で連続であるとき，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lambda f(x,y) + \mu g(x,y), \qquad f(x,y)g(x,y), \qquad \frac{f(x,y)}{g(x,y)}, \qquad |f(x,y)|$$

も点 (a,b) で連続である．ただし，商については $g(a,b) \fallingdotseq 0$ とする．

定理 3.3. （2 変数関数の合成関数の各点での連続性）

関数 $u = f(x,y)$ と $v = g(x,y)$ がともに点 (a,b) で連続とし，関数 $h(u,v)$ は点 $(f(a,b), g(a,b))$ で連続とする．このとき，合成関数 $h\bigl(f(x,y), g(x,y)\bigr)$ も点 (a,b) で連続である．

3.2　2 変数関数の連続性

定義 3.4.（**2 変数関数の連続性**）

　$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D 上の関数 $f(x,y)$ が D のすべての点で連続であるとき，$f(x,y)$ は D 上で**連続**であるという．このとき，$f(x,y)$ は D 上の**連続関数**であるともいう．

　これをイプシロン・デルタ論法で述べれば『任意の $\boldsymbol{a}=(a,b)\in D$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta(\boldsymbol{a},\varepsilon)>0$ が存在し，$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta(\boldsymbol{a},\varepsilon)$ をみたす任意の $\boldsymbol{x}=(x,y)\in D$ について

$$|\,f(x,y)-f(a,b)\,|<\varepsilon$$

となる』という条件をみたすことである．

　n 変数関数 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ の連続性も同様に定義される．

　定理 3.2，定理 3.3 より次の定理が成り立つ．

定理 3.5.（2 変数連続関数の性質）

　関数 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ がともに D 上で連続であるとき，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ に対して

$$\lambda f(x,y)+\mu g(x,y),\qquad f(x,y)g(x,y),\qquad \frac{f(x,y)}{g(x,y)},\qquad |f(x,y)|$$

も D 上で連続である．ただし，商については $g(x,y)\fallingdotseq 0$ とする．

定理 3.6.（2 変数連続関数の合成関数の連続性）

　関数 $u=f(x,y)$ と $v=g(x,y)$ はともに D 上で連続とし，関数 $h(u,v)$ もその定義域で連続で，さらに合成関数 $h\bigl(f(x,y),g(x,y)\bigr)$ が定まるとする．このとき，$h\bigl(f(x,y),g(x,y)\bigr)$ も D 上で連続である．

　例題 2.4 より，$f(x,y)=x,\ g(x,y)=y$ は $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数であることがわかる．よって，x と y に関する多項式

$$x^2,\qquad y^3,\qquad x^2+y^3,\qquad x^4+2x^3y-xy^2+y+1,\qquad \ldots$$

はすべて定理 3.5 より連続関数となる．実数 $a_{i,j}$ に対して

$$\begin{aligned}P(x,y)&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}a_{j,k-j}x^jy^{k-j}\\&=a_{0,0}+(a_{1,0}x+a_{0,1}y)+(a_{2,0}x^2+a_{1,1}xy+a_{0,2}y^2)+\cdots+(a_{n,0}x^n+a_{n-1,1}x^{n-1}y+\cdots+a_{0,n}y^n)\end{aligned}$$

を 2 変数の**多項式関数**といい，$a_{n,0},a_{n-1,1},\ldots,a_{0,n}$ の少なくとも 1 つが 0 でないような最大の自然数 n を**次数**という．0 でない定数関数は 0 次である．さらに，2 つの多項式関数 $P(x,y)$ と $Q(x,y)$ により $\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ と表される関数を**有理関数**という．多項式関数は $\mathbb{R}^2$ 上で連続であり，有理関数は定義域（分母が 0 にならない範囲）で連続である．

　また，定理 3.6 より次の関数

$$\sin(x^2+2xy),\qquad \log(x^4+y^2+2),\qquad e^x\cos(y^2+x)+\frac{xy^2-\sin xy}{e^y+2}$$

はすべて $\mathbb{R}^2$ 上で連続であり

$$\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\quad\bigl((x,y)\fallingdotseq(0,0)\bigr),\qquad \log(2x+xy-y^3)\quad(2x+xy-y^3>0)$$

はその定義域で連続となる．

例題 3.7.　次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ の連続性を調べよ．

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \fallingdotseq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

（解答）　原点 $(0,0)$ 以外では $f(x,y)$ は初等関数で表されて，さらに分母が 0 になることはないので連続である．そこで，$f(x,y)$ が原点で連続かどうか調べる．

$(x,y) \fallingdotseq (0,0)$ のとき

$$|\,f(x,y)-f(0,0)\,| = \left|xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = |xy|\left|\,\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\right| \leqq |xy|$$

である．ここで，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}|xy| = 0$ なので，はさみうちの定理より

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

が成り立つから，$f(x,y)$ は原点で連続である．以上より，$f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ で連続である．

（解答終）

例題 3.8.　次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ の連続性を調べよ．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \fallingdotseq (0,0)) \\ 1 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

（解答 1）　原点 $(0,0)$ 以外では $f(x,y)$ は初等関数で表されて，さらに分母が 0 になることはないので連続である．そこで，$f(x,y)$ が原点で連続かどうか調べる．

x 軸上を動きながら原点に近づくときは，$x(t) = t,\ y(t) = 0$ として $t \to 0$ とすればよい．よって

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2-0}{t^2+0} = \lim_{t\to 0} 1 = 1$$

となる．また，y 軸上を動きながら原点に近づくときは，$x(t) = 0,\ y(t) = t$ として $t \to 0$ とすればよい．よって

$$\lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0}\frac{0-t^2}{0+t^2} = \lim_{t\to 0}(-1) = -1$$

ゆえに，原点への近づき方を変えると極限値が変わるので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．したがって，$f(x,y)$ は原点で連続でない．

（解答 2）　原点 $(0,0)$ 以外では $f(x,y)$ は初等関数で表されて，さらに分母が 0 になることはないので連続である．そこで，$f(x,y)$ が原点で連続かどうか調べる．

y 軸上を動きながら原点に近づくときは，$x(t) = 0, y(t) = t$ として $t \to 0$ とすればよい．よって

$$\lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0}\frac{0-t^2}{0+t^2} = \lim_{t\to 0}(-1) = -1 \fallingdotseq 1 = f(0,0)$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が $f(0,0)$ と等しくなることはない．したがって，$f(x,y)$ は原点で連続でない．

（解答終）

例題 3.9.　次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ の連続性を調べよ．

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\fallingdotseq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

（解答）　原点 $(0,0)$ 以外では $f(x,y)$ は初等関数で表されて，さらに分母が 0 になることはないので連続である．そこで，$f(x,y)$ が原点で連続かどうか調べる．

$(x,y)\fallingdotseq(0,0)$ のとき

$$|\,f(x,y)-f(0,0)\,|=\left|\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\frac{|\sin(xy)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqq\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

となる．そこで，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくと，$|x|\leqq r,\ |y|\leqq r$ であり

$$|\,f(x,y)-f(0,0)\,|\leqq\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|x|\,|y|}{r}\leqq\frac{r^2}{r}=r\quad\longrightarrow\quad 0\qquad(r\to+0)$$

となる，ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$$

が成り立つので，$f(x,y)$ は原点で連続である．以上より，$f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で連続である．

（解答終）

例題 3.10.　次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ の連続性を調べよ．

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\log(x^2+y^2) & ((x,y)\fallingdotseq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

（解答）　原点 $(0,0)$ 以外では $f(x,y)$ は初等関数で表されて，さらに真数も正なので連続である．そこで，$f(x,y)$ が原点で連続かどうか調べる．

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくと，$(x,y)\fallingdotseq(0,0)$ に対して

$$|\,f(x,y)-f(0,0)\,|=\left|\,\sqrt{x^2+y^2}\log(x^2+y^2)-0\,\right|=|\,r\log r^2\,|=2|r\log r|$$

となる．ここで，第 5 章命題 6.35 より

$$\lim_{r\to+0}r\log r=0$$

であるから

$$|\,f(x,y)-f(0,0)\,|=2|r\log r|\quad\longrightarrow\quad 0\qquad(r\to+0)$$

となる．ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$$

が成り立つので，$f(x,y)$ は原点で連続である．以上より，$f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で連続である．

（解答終）

コンパクト集合（有界閉集合）D 上の連続関数 $f(x,y)$ については，有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $g(x)$ と同様の性質が成り立つ．$\mathbb{R}^n$ 内の点列についても定理 1.8（Bolzano – Weierstrass の定理）が成り立つから，証明は 1 変数関数の場合と同じである．

定理 3.11. **（最大値・最小値の定理）**
コンパクト集合上で連続な関数は最大値と最小値をもつ．

定義 3.12. **（一様連続）**
D 上で定義された関数 $f(\boldsymbol{x})$ が次の条件『任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta(\varepsilon)$ をみたす任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$ について

$$|\, f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\,| < \varepsilon$$

となる』という条件をみたすとき，$f(\boldsymbol{x})$ は D 上で**一様連続**であるという．

定理 3.13. **（コンパクト集合上の連続関数の一様連続性）**
コンパクト集合上で連続な関数は一様連続である．

連続関数の等高線（等高面）は閉集合であることがわかる．

定理 3.14. $\mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $f(\boldsymbol{x})$ が連続ならば，実数 c に対して

$$K = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = c \,\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である．

証明. $K = \emptyset$ のときは閉集合だから，$K \neq \emptyset$ とする．定理 1.12 を適用するために，$\boldsymbol{x}_n \in K,\ \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$ となる点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意にとる．このとき，K の定義より $f(\boldsymbol{x}_n) = c$ であるから，$f(\boldsymbol{x})$ の連続性より

$$f(\boldsymbol{a}) = \lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) = \lim_{n\to\infty} c = c$$

が成り立つ．よって，$\boldsymbol{a} \in K$ であるから，定理 1.12 より K は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である． $\square$

4　章末問題

練習問題 4.1.　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の次の部分集合 A の内部 $\mathrm{Int}\,A$，境界 ∂A，閉包 $\overline{A}$ を求め，開集合か閉集合かどうか調べよ．

(1) $A = \{\,(x,y) \mid x+y \leqq 0\,\}$　　(2) $A = \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 > 1\,\}$

(3) $A = \{\,(x,y) \mid y = x^2\,\}$　　(4) $A = \{\,(x,y) \mid x>0,\ y \geqq 0\,\}$

練習問題 4.2.　次の関数 $f(x,y)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を調べよ．ただし，a と b は実数の定数とする．

(1) $f(x,y) = \dfrac{ax^2+by^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　(2) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} + y\cos\dfrac{1}{x} & (xy \fallingdotseq 0) \\ x+y & (xy=0) \end{cases}$　　(4) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & (x \fallingdotseq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

練習問題 4.3.　次の関数 $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上で連続かどうか調べよ．

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \fallingdotseq (0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$　　(2) $f(x,y) = \begin{cases} xy\log(x^2+y^2) & ((x,y) \fallingdotseq (0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{(x-3)^2+y^2} & ((x,y) \fallingdotseq (3,0)) \\ 0 & ((x,y)=(3,0)) \end{cases}$　　(4) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^3+y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \fallingdotseq (0,0)) \\ 1 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$

(5) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{Sin}^{-1}\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \fallingdotseq (0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$

発展問題 4.4.　原点の近傍上で定義された関数 $f(x,y)$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \alpha$ が存在し，さらに $y \fallingdotseq 0$ のとき極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,y)$ が存在するとする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Bigr)$ は存在し，その極限値は α であることを示せ．

発展問題 4.5.　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$A = \left\{\, \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \,\middle|\, m,n \in \mathbb{N} \,\right\}$$

の内部 $\mathrm{Int}\,A$，境界 ∂A，閉包 $\overline{A}$ を求めよ．

第 9 章　偏微分法

第 5 章では 1 変数関数 $y = f(x)$ の微分法およびそれを応用したさまざまな計算を学習した．しかし，応用上はもっと多くの変数を必要とすることが多い．例えば，数直線上に鉄でできた長さ L の棒を置き，その一部に熱を与えた後の温度変化の様子を関数で表そうと思うと，時刻 t 秒後の座標 $x \in [0, L]$ での温度は $u(t, x)$ と 2 つの変数を必要とする．このように時間と空間のパラメータを用いる場合が考えられる．他にも，高校物理で三角関数

$$y = \sin x$$

により波の様子を記述できることを学習したが，これは直線上の波の伝播の場合である．もし湖面の波の様子を記述しようと思えばそれは平面上の波なので，そのグラフを考えればわかる通り $z = f(x, y)$ という 2 変数関数となる．このように平面上や空間上の様子を表すためには，自然に 2 変数関数や 3 変数関数が必要となる．

そこで，この章ではそのような多変数関数の様子を把握するために偏微分法を使いこなせるようになることを目標とする．第 6 章でもみたように，2 変数になるだけでも極限の計算は格段に面倒になる．同様に偏微分に関しても計算・理論ともに難しくなる．また，1 変数関数のときと違って 2 変数関数のグラフはイメージしにくいので，これまでよりも抽象的な話題も増えてくる．とにかく大学数学の基礎の内容なので，理系に進む場合には確実に使う機会があるため，理解をするためにしっかり手を動かして計算練習をするしかない．

この章ではまず最初に偏微分の定義と計算法をした後，1 変数関数の微分の正統な拡張である全微分とその応用例について学習する．また，後半では多変数関数の極値の求め方やラグランジュの未定乗数法を利用した条件付き極値問題の解決法を扱う．

1 偏微分の定義と計算

1.1 偏微分可能の定義

定義 1.1. （偏微分可能）

関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) の近傍上で定義されているとする．

(1) 極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

が存在するとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で x に関して**偏微分可能**であるという．このとき

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

とおき，点 (a,b) **における** $f(x,y)$ **の** x **に関する偏微分係数**という．

(2) 極限値

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

が存在するとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で y に関して**偏微分可能**であるという．このとき

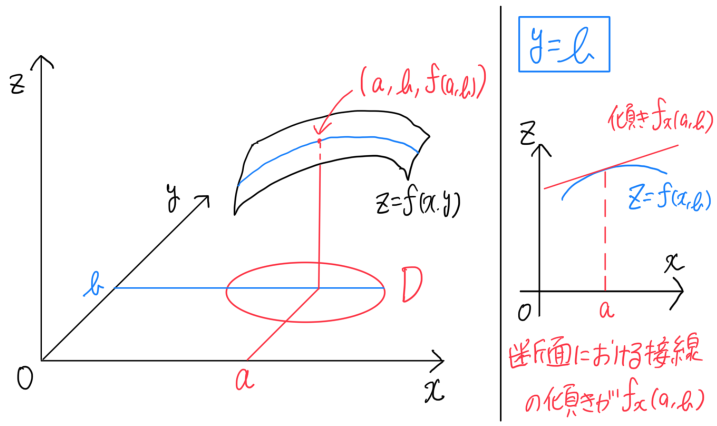
$$f_y(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

とおき，点 (a,b) **における** $f(x,y)$ **の** y **に関する偏微分係数**という．

(3) $f_x(a,b)$ と $f_y(a,b)$ がともに存在するとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で**偏微分可能**であるという．

関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) における x に関する偏微分係数 $f_x(a,b)$ とは，$y=b$ を固定して x だけを変数とする 1 変数関数 $g(x)=f(x,b)$ の $x=a$ での微分係数 $g'(a)$ のことである．図形的には曲面 $z=f(x,y)$ に対して，それを平面 $y=b$ で切ったときの断面に現れる曲線の $x=a$ での接線の傾きが偏微分係数 $f_x(a,b)$ となる．

同様に，点 (a,b) における y に関する偏微分係数 $f_y(a,b)$ とは，$x=a$ を固定して y だけを変数とする 1 変数関数 $h(y)=f(a,y)$ の $y=b$ での微分係数 $h'(b)$ のことである．



つまり，与えられた関数の偏微分係数を求めるには，偏微分したい変数以外の文字は定数だと思って 1 変数関数の微分をすればよいということになる．

例 1.2. $f(x,y)=x^2+4xy+y^3$ の点 $(2,1)$ における偏微分係数を求める．x については

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h,1)-f(2,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^2+8h+13)-13}{h}=\lim_{h\to 0}(h+8)=8$$

となる．よって，x に関して偏微分可能で $f_x(2,1)=8$ である．y については

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(2,1+k)-f(2,1)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{(k^3+3k^2+11k+13)-13}{k}=\lim_{k\to 0}(k^2+3k+11)=11$$

となる．よって，y に関して偏微分可能で $f_y(2,1)=11$ である．

1 変数関数の微分と同様に，毎回定義に従って偏微分係数を求めるのは面倒である．そこで，次のように偏導関数を定義し，偏微分を計算するのが現実的である．

定義 1.3. （偏導関数）

関数 $f(x,y)$ が領域 D のすべての点で偏微分可能であるとき，$f(x,y)$ は D 上で**偏微分可能**であるという．このとき，$(x,y) \in D$ に対して

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}, \qquad f_y(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

とおき，これらを**偏導関数**という．

また，関数 $z = f(x,y)$ に対して，x に関する偏導関数を

$$f_x(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

で，y に関する偏導関数を

$$f_y(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad z_y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

とも書く．

偏導関数の記号は正しく用いること．例えば，関数 $z = f(x,y)$ の x に関する偏導関数を $f_x'(x,y)$ などと**独自の記号を用いて書かないこと**．また，1 変数関数の微分の記号と混同して $\dfrac{df(x,y)}{dx}$ とも**決して書かないこと**．これは異なる意味となる．

定義 1.4. （C^1 級）

関数 $f(x,y)$ が領域 D 上で偏微分可能で，偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ がともに D 上で連続であるとき，$f(x,y)$ は D 上で C^1 **級**であるという．

なお，3 変数関数 $f(x,y,z)$ の偏導関数の定義に関しては全く同様なので，繰り返し述べない．例えば x で偏微分するには，y と z は定数だと思って x で微分すればよい．

例 1.5. $f(x,y) = x^2 + 4xy + y^3$ の偏導関数は，y を定数だと思って x で微分すれば

$$f_x(x,y) = 2x + 4y + 0 = 2x + 4y$$

であり，x を定数だと思って y で微分すれば

$$f_y(x,y) = 0 + 4x + 3y^2 = 4x + 3y^2$$

となる．よって，$f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ がともに $\mathbb{R}^2$ 上で連続であるから，$f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で C^1 級である．

また，例 1.2 で計算したものも，上の結果よりすぐに $f_x(2,1) = 8$, $f_y(2,1) = 11$ とわかる．

偏導関数の計算は実質的には 1 変数関数の導関数の計算と変わらない．ただし，頭の中で計算法を理解していても，偏微分する変数以外の文字が多いため練習が足りないと計算ミスをしやすい．大学の理工学系科目を修めるためには偏微分の計算ができることが必須なので，面倒がらずに計算練習をして速く正確に実行できるようにしておくこと．

1.2 偏微分の計算例

例題 1.6. 次の関数 $z = f(x, y)$ の偏導関数を求めよ．

(1) $z = 4x^2 + 5xy - 7y^3$ (2) $z = xy^2(2x - y)$ (3) $z = \sin(x^2 + xy)$

(4) $z = (x - y)\sqrt{x^2 + y^2}$ (5) $z = \dfrac{3x + 2y}{4x - 3y}$ (6) $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}$

(7) $z = e^{xy} + e^{-xy}$ (8) $z = xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (9) $z = xy \operatorname{Sin}^{-1} \dfrac{y}{x}$

（解答）

(1) $z_x = 8x + 5y,\ z_y = 5x - 21y^2$

(2) $z = 2x^2y^2 - xy^3$ であるから，$z_x = 4xy^2 - y^3,\ z_y = 4x^2y - 3xy^2$

(3) $z_x = (2x + y)\cos(x^2 + xy),\ z_y = x\cos(x^2 + xy)$

(4)
$$z_x = \sqrt{x^2 + y^2} + (x - y)\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x^2 - xy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$z_y = -\sqrt{x^2 + y^2} + (x - y)\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = -\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{xy - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-x^2 + xy - 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(5)
$$z_x = \frac{3(4x - 3y) - (3x + 2y) \cdot 4}{(4x - 3y)^2} = \frac{-17y}{(4x - 3y)^2}$$
$$z_y = \frac{2(4x - 3y) - (3x + 2y) \cdot (-3)}{(4x - 3y)^2} = \frac{17x}{(4x - 3y)^2}$$

(6)
$$z_x = \frac{y\sqrt{x^2 + xy + y^2} - xy\,\dfrac{2x + y}{2\sqrt{x^2 + xy + y^2}}}{x^2 + xy + y^2} = \frac{2y(x^2 + xy + y^2) - xy(2x + y)}{2(x^2 + xy + y^2)^{3/2}} = \frac{xy^2 + 2y^3}{2(x^2 + xy + y^2)^{3/2}}$$

また，関数が x と y について対称なので，$z_y = \dfrac{x^2y + 2x^3}{2(x^2 + xy + y^2)^{3/2}}$

(7) $z_x = y(e^{xy} - e^{-xy}),\ z_y = x(e^{xy} - e^{-xy})$

(8) $z = xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = xy\left(1 - \dfrac{2y^2}{x^2 + y^2}\right) = xy\left(-1 + \dfrac{2x^2}{x^2 + y^2}\right)$ より
$$z_x = y\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy\,\frac{2y^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$z_y = x\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - xy\,\frac{2x^2 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

(9) $\sqrt{x^2} = |x|$ に注意すれば
$$z_x = y \operatorname{Sin}^{-1} \frac{y}{x} + xy\,\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = y \operatorname{Sin}^{-1} \frac{y}{x} - \frac{|x|y^2}{x\sqrt{x^2 - y^2}}$$
$$z_y = x \operatorname{Sin}^{-1} \frac{y}{x} + xy\,\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{x} = x \operatorname{Sin}^{-1} \frac{y}{x} + \frac{|x|y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

（解答終）

例題 1.7. 次の関数 $u = f(x, y, z)$ の偏導関数を求めよ.

(1) $u = x^2y + xyz + xz^3$ (2) $u = \sin(xyz)$ (3) $u = e^{x^2y}\log(z^2+1)$

（解答）

(1) $u_x = 2xy + yz + z^3,\ u_y = x^2 + xz,\ u_z = xy + 3xz^2$

(2) $u_x = yz\cos(xyz),\ u_y = xz\cos(xyz),\ u_z = xy\cos(xyz)$

(3) $u_x = 2xye^{x^2y}\log(z^2+1),\ u_y = x^2e^{x^2y}\log(z^2+1),\ u_z = \dfrac{2ze^{x^2y}}{z^2+1}$

（解答終）

例題 1.8. 関数 $z = \sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{y}{x}$ は次の偏微分方程式

$$xz_x + yz_y = z$$

をみたすことを示せ.

（解答） 偏導関数を計算すれば

$$z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-y^2}}\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{x} + \sqrt{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{x} - \frac{|x|y}{x^2}$$

$$z_y = \frac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}}\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{x} + \sqrt{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{x} + \frac{|x|}{x}$$

なので

$$xz_x + yz_y = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{x} - \frac{|x|y}{x} + \frac{|x|y}{x} = \sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{x} = z$$

（解答終）

例題 1.9. n を自然数とする．関数 $z = \dfrac{y^n}{x^n}\,e^{-y/x}$ は次の偏微分方程式

$$xz_x + yz_y = 0$$

をみたすことを示せ.

（解答） 偏導関数を計算すれば

$$z_x = \frac{-ny^n}{x^{n+1}}\,e^{-y/x} + \frac{y^n}{x^n}\,e^{-y/x}\cdot\frac{y}{x^2} = \frac{(-nx+y)y^n}{x^{n+2}}\,e^{-y/x}$$

$$z_y = \frac{ny^{n-1}}{x^n}\,e^{-y/x} + \frac{y^n}{x^n}\,e^{-y/x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{(nx-y)y^{n-1}}{x^{n+1}}\,e^{-y/x}$$

なので

$$xz_x + yz_y = \frac{(-nx+y)y^n}{x^{n+1}}\,e^{-y/x} + \frac{(nx-y)y^n}{x^{n+1}}\,e^{-y/x} = 0$$

（解答終）

例題 1.10. 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

の偏導関数を求めよ．

（解答） $(x,y) \neq (0,0)$ のときは

$$f_x(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{-3y^2(x^2+y^2) - 2y(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{3x^2y^2 + 2x^3y + y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

また，$(x,y) = (0,0)$ のときは

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k-0}{k} = \lim_{k\to 0} (-1) = -1$$

（解答終）

例題 1.11. 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

は原点 $(0,0)$ で偏微分可能であるかどうか調べよ．

（解答） 点 $(0,0)$ において x で偏微分可能であるかどうか調べるには，極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

を調べればよい．ここで，$h \neq 0$ のとき

$$f(0+h,0) = f(h,0) = \frac{h^3+0}{\sqrt{h^2+0}} = \frac{h^3}{|h|} = \frac{h|h|^2}{|h|} = h|h|$$

であるから

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0$$

となる．よって，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で x に関して偏微分可能で，$f_x(0,0) = 0$ である．

点 $(0,0)$ において y で偏微分可能であるかどうか調べるには，極限

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k}$$

を調べればよい．ここで，$k \neq 0$ のとき

$$f(0,0+k) = f(0,k) = \frac{0+k^2}{\sqrt{0+k^2}} = \frac{k^2}{|k|} = \frac{|k|^2}{|k|} = |k|$$

であるから

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{|k| - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{|k|}{k}$$

となり，この極限は

$$\lim_{k\to +0} \frac{|k|}{k} = \lim_{k\to +0} \frac{k}{k} = \lim_{k\to +0} 1 = 1, \qquad \lim_{k\to -0} \frac{|k|}{k} = \lim_{k\to -0} \frac{-k}{k} = \lim_{k\to -0} (-1) = -1$$

なので存在しない．よって，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で y に関して偏微分不可能である．

（解答終）

例題 1.12.　関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & ((x,y)\fallingdotseq(0,0))\\[2mm] 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

は原点 $(0,0)$ で偏微分可能であることを示し，$f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ の値を求めよ．

（解答）　点 $(0,0)$ において x で偏微分可能であることを示すため，極限

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

を調べる．ここで，$h\fallingdotseq0$ のとき

$$f(0+h,0)=f(h,0)=\frac{h^2\cdot0}{h^4+0}=\frac{0}{h^4}=0,\qquad f(0,0)=0$$

より

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to0}0=0$$

である．よって，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で x に関して偏微分可能で，$f_x(0,0)=0$ となる．

同様にして

$$\lim_{k\to0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0-0}{k}=\lim_{k\to0}0=0$$

である．よって，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で y に関して偏微分可能で，$f_y(0,0)=0$ となる．

（解答終）

注意 1.13.　例題 1.12 の関数については，第 8 章例題 2.11 より極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ が存在しないから，当然

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)\fallingdotseq f(0,0)$$

となる．よって，関数 $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で連続ではない．ゆえに，例題 1.12 から『**偏微分可能であることは，連続であるための十分条件ではない**』ことがわかる．当然，連続でも偏微分可能であるとは限らないので必要条件でもないから，偏微分可能性と連続性はまったく無関係な概念である．

ここで復習をしておくと，1 変数関数 $f(x)$ の場合には

$$f(x)\ \text{が}\ x=a\ \text{で微分可能}\quad\Longrightarrow\quad f(x)\ \text{が}\ x=a\ \text{で連続}$$

という定理が成り立っていた.（第 5 章定理 1.2 参照）つまり『微分可能であることは，連続であるための十分条件』である．このことと注意 1.13 から，偏微分は 1 変数の微分の性質を受け継いでいるとは言いがたい．これは偏微分を高校以来の 1 変数関数の極限を用いて定義したことに起因する．つまり，点 (a,b) のまわりでの $z=f(x,y)$ の様子を調べるべきなのに，偏微分係数 $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ は y 軸に垂直な平面 $y=b$ による曲面 $z=f(x,y)$ の断面と x 軸に垂直な平面 $x=a$ による曲面 $z=f(x,y)$ の断面の様子しか調べていないのである．そのために全方向の様子を調べることができていない．そこで，2 変数関数の極限を用いて，**全微分**と呼ばれる 2 変数関数にふさわしい微分の概念を次に定義する．

練習問題 1.1.　次の関数の偏導関数を求めよ．

(1) $z=(x^2+2y)^4$　(2) $z=\log\sqrt{x^2+y^2}$　(3) $z=(x^2+y^2)\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$　(4) $z=x^y$

2　全微分の定義と接平面の方程式

2.1　全微分可能性と全微分

前節で述べたように，偏微分は 1 変数関数の微分の多変数関数版に相当する概念ではない．そこで，1 変数関数の微分の定義を多変数関数に拡張しやすい表現に直すことを試みる．1 変数関数 $f(x)$ の $x=a$ での微分係数 $f'(a)$ の定義を思い出すと，平均変化率の極限

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{2.1}$$

であった．しかし，この式のままでは 2 変数の式にはできない．なぜならば，分母の点 (a,b) から点 (x,y) への変位が $\boldsymbol{h}=(x-a,y-b)$ と 2 次元ベクトルになり，割り算ができないからである．そこで，(2.1)を変形すると

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-\{f(a)+f'(a)(x-a)\}}{x-a}=0$$

となる．つまり，関数 $f(x)$ と 1 次関数 $f(a)+f'(a)(x-a)$ のずれが $x\to a$ のとき $x-a$ よりも高位の無限小となっている．そこで，直線 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ を曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ における接線といい，これを利用して 1 次近似計算ができるのであった．これを $h=x-a$ とおいて表せば

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-\{f(a)+f'(a)h\}}{h}=0$$

となる．この視点では，微分係数 $f'(a)$ とは $f(a+h)-\{f(a)+mh\}$ が $h\to 0$ のとき h よりも高位の無限小となる実数 m のことであった．

このことから，2 変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で微分可能であるとは

「曲面 $z=f(x,y)$ が点 (a,b) の十分近くでは，ある平面で近似できる」

という定義が妥当であると考えられる．また，点 $(a,b,f(a,b))$ を通る平面の方程式は，α と β を実数として

$$z=f(a,b)+\alpha(x-a)+\beta(y-b) \tag{2.2}$$

と x と y の 1 次式で表される．よって，曲面 $z=f(x,y)$ と平面 $z=f(a,b)+\alpha(x-a)+\beta(y-b)$ のずれは

$$f(x,y)-\{f(a,b)+\alpha(x-a)+\beta(y-b)\}$$

である．さらに，点 (a,b) からの変位を $\boldsymbol{h}=(x-a,y-b)=(h,k)$ とおくときの「$\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{h}$ よりも高位の無限小」とは，長さを考えて $\boldsymbol{h}$ を $\|\boldsymbol{h}\|=\sqrt{h^2+k^2}$ と置き換えれば，分母にもってきても問題がない．ゆえに，$z=f(x,y)$ のグラフが (2.2)で表される平面で近似できることの意味は，1 変数関数の場合と同様に考えれば

「$f(a+h,b+k)-\{f(a,b)+\alpha h+\beta k\}$ が $(h,k)\to(0,0)$ のとき $\sqrt{h^2+k^2}$ よりも高位の無限小となる」

こととなり，この条件をみたす実数 α と β が存在するとき，微分可能であると定義することにする．

定義 2.1.（全微分可能）
点 (a,b) の近傍上で定義された関数 $f(x,y)$ に対して

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-\alpha h-\beta k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \tag{2.3}$$

となる実数 α と β が存在するとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で**全微分可能**であるという．

つまり，関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能とは，$f(x,y)$ と 1 次式 $f(a,b)+\alpha(x-a)+\beta(y-b)$ のずれ

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k)&=f(x,y)-\{f(a,b)+\alpha(x-a)+\beta(y-b)\}\\&=f(a+h,b+k)-\{f(a,b)+\alpha h+\beta k\}\end{aligned}$$

が，$(h,k)\to(0,0)$ のとき $\sqrt{h^2+k^2}$ よりも速く 0 に収束するような実数 α と β が存在することである．

定理 2.2. （全微分可能な関数の連続性）
関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能ならば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で連続である．

証明． $f(x,y)$ は点 (a,b) で全微分可能なので，その定義 (2.3)に現れる実数 α と β に対して

$$\varepsilon(h,k) = f(a+h,b+k) - \{f(a,b) + \alpha h + \beta k\}$$

とおけば，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ が成り立つ．よって，$(h,k) \fallingdotseq (0,0)$ のとき

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \alpha h + \beta k + \sqrt{h^2+k^2} \cdot \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

と変形すれば

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left\{ f(a,b) + \alpha h + \beta k + \sqrt{h^2+k^2} \cdot \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right\} = f(a,b)$$

となる．これは $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ を意味するから，$f(x,y)$ は点 (a,b) で連続である． □

これより，1 変数関数の「微分可能ならば連続である」と同様の事実が成り立っていることがわかるので，全微分可能性は 1 変数関数の微分可能性の性質を受け継いでいることが確認できた．

ただし，具体的な関数について全微分可能かどうかを定義に従って調べるのは難しい．なぜならば，定義式 (2.3) に現れる実数 α と β をどう決めればよいかがまだ示されていないからである．そこで，α の意味を考えてみると，α は曲面 $z = f(x,y)$ を近似する平面の方程式

$$z = f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b)$$

における x の係数であるから『平面の x 方向の傾き』である．つまり，平面 $y = b$ で切ったときの状況として，曲面の断面として現れる曲線 $z = f(x,b)$ の $x = a$ での接線が近似平面の断面として現れるべきだから，$\alpha = f_x(a,b)$ とすればよさそうである．実際にこの考察は正しいことが以下のように示される．

定理 2.3. （全微分可能な関数の性質）
関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能ならば，点 (a,b) で偏微分可能である．さらに，全微分可能の定義 (2.3) における α と β について

$$\alpha = f_x(a,b), \qquad \beta = f_y(a,b)$$

が成り立つ．

証明． $f(x,y)$ は点 (a,b) で全微分可能なので，その定義 (2.3)に現れる実数 α と β に対して

$$\varepsilon(h,k) = f(a+h,b+k) - \{f(a,b) + \alpha h + \beta k\}$$

とおけば，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = 0$ が成り立つ．特に $h(t) = t,\ k(t) = 0$ として $t \to 0$ とすれば

$$0 = \lim_{t\to 0} \left| \frac{\varepsilon(t,0)}{\sqrt{t^2+0}} \right| = \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(a+t,b) - f(a,b) - \alpha t}{t} \right| = \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t} - \alpha \right|$$

が成り立つ．ゆえに

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t} = \alpha$$

となるから，$f(x,y)$ は点 (a,b) で x に関して偏微分可能で，$\alpha = f_x(a,b)$ が成り立つ．
同様に $h(t) = 0,\ k(t) = t$ として $t \to 0$ とすれば，$\beta = f_y(a,b)$ となることがわかる． □

注意 2.4. 定理 2.3 より，関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であるかどうか判断するには，まず点 (a,b) で偏微分可能であることを確認し，次に

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-\{f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k\}}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \tag{2.4}$$

が成り立つかどうかを調べればよい．

以上より関数 $f(x,y)$ が全微分可能であるとは，$f(x,y)$ が 1 次近似できることであるから，以下のように用語を定める．

定義 2.5. （全微分）
関数 $f(x,y)$ が領域 D のすべての点で全微分可能であるとき，$f(x,y)$ は D 上で**全微分可能**であるといい

$$df=f_x(x,y)\,dx+f_y(x,y)\,dy$$

を $f(x,y)$ の**全微分**という．

関数 $f(x,y)$ が全微分可能であるとは，点が (x,y) から $(x+\Delta x,y+\Delta y)$ まで $(\Delta x,\Delta y)$ だけ微小変化したときの f の変化量

$$\Delta f=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

が

$$\Delta f\fallingdotseq f_x(x,y)\,\Delta x+f_y(x,y)\,\Delta y$$

と 1 次近似できることを表している．誤差を正確に表したい場合には，後で多変数関数版の Taylor の定理を扱うので，そちらも参照してほしい．

また，関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能ならば，(2.4)において $x=a+h,\ y=b+k$ とおけば

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-\{f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

が成り立つ．これは曲面 $z=f(x,y)$ が点 $(a,b,f(a,b))$ の近くでは平面

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

で近似できるということであったから，その平面を接平面と呼ぶ．

定義 2.6. （接平面）
関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) で全微分可能とする．このとき，平面

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

を曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(a,b,f(a,b))$ における**接平面**という．

全微分と接平面はどちらも 1 次近似を表していると考えてよい．全微分 df は変数 x と y が微小変化した際の関数 $f(x,y)$ の変化の様子を表しており，点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面は曲面 $z=f(x,y)$ を接点のまわりで近似する平面である．

例題 2.7.　関数 $f(x,y) = 2x + 3y + 4$ は $\mathbb{R}^2$ 上で全微分可能であることを示し，その全微分を求めよ．

（解答）　まず，偏導関数を計算すると

$$f_x(x,y) = 2, \qquad f_y(x,y) = 3$$

である．そこで注意 2.4 より，任意の (x,y) に対して

$$\varepsilon(h,k) = f(x+h, y+k) - \{f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k\}$$

とおくとき，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ であることを示せばよい．ここで

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k) &= f(x+h, y+k) - \{f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k\} \\ &= \{2(x+h) + 3(y+k) + 4\} - \{(2x+3y+4) + 2h + 3k\} = 0\end{aligned}$$

より

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{0}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つ．よって，$f(x,y)$ は全微分可能で

$$df = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy = 2\,dx + 3\,dy$$

となる．

（解答終）

曲面 $z = f(x,y) = 2x + 3y + 4$ は平面なので，もちろん全微分可能で 1 次近似（接平面）は自分自身となる．つまり，この例題は非常に当たり前のことを確認したものである．

例題 2.8.　関数 $f(x,y) = 2x^2 + 3xy^2$ は点 $(-2,1)$ で全微分可能であることを示せ．

（解答）　まず，偏導関数は

$$f_x(x,y) = 4x + 3y^2, \qquad f_y(x,y) = 6xy$$

より，$f_x(-2,1) = -5$，$f_y(-2,1) = -12$ である．

よって，$f(x,y)$ が $(-2,1)$ で全微分可能であることを示すには，$(h,k) \fallingdotseq (0,0)$ のときに

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k) &= f(-2+h, 1+k) - \{f(-2,1) + f_x(-2,1)h + f_y(-2,1)k\} \\ &= \{2(-2+h)^2 + 3(-2+h)(1+k)^2\} - (2 - 5h - 12k) \\ &= 2h^2 - 6k^2 + 6hk + 3hk^2\end{aligned}$$

とおくとき，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ であることを示せばよい．

そこで，$r = \sqrt{h^2+k^2}$ とおけば，$|h| \leqq r$，$|k| \leqq r$ なので，$(h,k) \fallingdotseq (0,0)$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \left|\frac{2h^2 - 6k^2 + 6hk + 3hk^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &\leqq \frac{2|h|^2 + 6|k|^2 + 6|h|\,|k| + 3|h|\,|k|^2}{r} \\ &\leqq \frac{2r^2 + 6r^2 + 6r^2 + 3r^3}{r} = 14r + 3r^2 \quad\longrightarrow\quad 0 \qquad (r \to +0)\end{aligned}$$

より，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ が成り立つ．よって，$f(x,y)$ は $(-2,1)$ で全微分可能である．

（解答終）

定義から全微分可能性を判定するのは一般に大変である．そこで，全微分可能であるための十分条件を紹介する．

定理 2.9. （C^1 級関数の全微分可能性）
関数 $f(x,y)$ が領域 D 上で C^1 級ならば，$f(x,y)$ は D 上で全微分可能である．

証明． $f(x,y)$ は C^1 級だから偏微分可能なので，任意の $(x,y) \in D$ に対して

$$\varepsilon(h,k) = f(x+h, y+k) - \{f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k\}$$

とおくとき，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ が成り立つことを示せばよい．

そこで，$\varepsilon(h,k)$ に平均値の定理を 2 回適用すると，ある $0 < \theta_1 < 1$ と $0 < \theta_2 < 1$ が存在して

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h,k) &= \{f(x+h,y+k) - f(x,y+k)\} + \{f(x,y+k) - f(x,y)\} - f_x(x,y)h - f_y(x,y)k \\
&= f_x(x+\theta_1 h, y+k)h + f_y(x, y+\theta_2 k)k - f_x(x,y)h - f_y(x,y)k \\
&= \{f_x(x+\theta_1 h, y+k) - f_x(x,y)\}h + \{f_y(x, y+\theta_2 k) - f_y(x,y)\}k
\end{aligned}$$

と変形できる．ここで

$$\varepsilon_1(h,k) = f_x(x+\theta_1 h, y+k) - f_x(x,y), \qquad \varepsilon_2(h,k) = f_y(x, y+\theta_2 k) - f_y(x,y)$$

とおけば，$0 < \theta_j < 1$ および偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ の連続性より

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) = 0, \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2(h,k) = 0$$

が成り立つ．よって，$(h,k) \fallingdotseq (0,0)$ のとき，$|h| \leqq \sqrt{h^2+k^2}$, $|k| \leqq \sqrt{h^2+k^2}$ より

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| &= \left| \frac{\varepsilon_1(h,k)h + \varepsilon_2(h,k)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \\
&\leqq |\varepsilon_1(h,k)| \cdot \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} + |\varepsilon_2(h,k)| \cdot \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&\leqq |\varepsilon_1(h,k)| + |\varepsilon_2(h,k)| \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad \big((h,k) \to (0,0)\big)
\end{aligned}$$

となる．ゆえに，はさみうち法より $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ が成り立つから，$f(x,y)$ は全微分可能である． □

定理 2.9 のおかげで，$f(x,y)$ が初等関数で構成されているなど見た目ですぐに C^1 級とわかる場合には，**全微分可能性の定義を確認することなく全微分可能であると結論づけることができる**．その意味では非常に便利な定理である．

ただし，この定理の逆，すなわち『全微分可能ならば C^1 級である』は**成り立たない**ので注意すること．実際，あとで解説する例題 2.11 の関数は全微分可能だが C^1 級ではない．同様に『関数が C^1 級でなければ全微分可能ではない』も**成り立たない**ので，関数が場合分けされて定義されている場合には全微分可能性の定義に戻らなければならないことも多い．

また，定理 2.9 から次の重要な結果が得られる．

系 2.10. （C^1 級関数の連続性）
関数 $f(x,y)$ が領域 D 上で C^1 級ならば，$f(x,y)$ は D 上で連続である．

証明． $f(x,y)$ は C^1 級だから，定理 2.9 より全微分可能であるので，定理 2.2 から連続となる． □

2.2　全微分と接平面の計算例

例題 2.11.　関数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\fallingdotseq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

は原点 $(0,0)$ で全微分可能であることを示せ.

（解答）　まず，偏微分係数 $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を計算する.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

より，$(0,0)$ で x について偏微分可能で，$f_x(0,0)=0$ である．$f(x,y)$ は x と y に関して対称なので，同様にして $f_y(0,0)=0$ であることもわかる.

$f(x,y)$ が $(0,0)$ で全微分可能であることを示すには，$(h,k)\fallingdotseq(0,0)$ のときに

$$\varepsilon(h,k)=f(0+h,0+k)-\{f(0,0)+f_x(0,0)h+f_y(0,0)k\}=f(h,k)=hk\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおくとき，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ であることを示せばよい．そこで，$r=\sqrt{h^2+k^2}$ とおけば，$|h|\leqq r,\ |k|\leqq r$ なので，$(h,k)\fallingdotseq(0,0)$ のとき

$$\left|\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=\left|\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=\frac{|h|\,|k|}{r}\left|\sin\frac{1}{r}\right|\leqq\frac{r^2}{r}\cdot 1=r\quad\longrightarrow\quad 0\qquad(r\to+0)$$

より，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ が成り立つ．よって，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能である.

（解答終）

例題 2.12.　関数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ は原点 $(0,0)$ で偏微分可能であるが，全微分可能ではないことを示せ.

（解答）　まず偏微分可能であることを示す.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

より，$(0,0)$ で x に関して偏微分可能で，$f_x(0,0)=0$ である．$f(x,y)$ は x と y に関して対称なので，同様にして y に関しても偏微分可能で，$f_y(0,0)=0$ となる.

$f(x,y)$ が $(0,0)$ で全微分不可能であることを示すには，$(h,k)\fallingdotseq(0,0)$ のときに

$$\varepsilon(h,k)=f(0+h,0+k)-\{f(0,0)+f_x(0,0)h+f_y(0,0)k\}=f(h,k)=\sqrt{|hk|}$$

とおくとき，極限 $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ が 0 ではないことを示せばよい．そこで，$h(t)=t,\ k(t)=t$ として $t\to 0$ という極限を考えると，$\varepsilon(t,t)=|t|$ だから

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon(t,t)}{\sqrt{t^2+t^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{\sqrt{2}\,|t|}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\fallingdotseq 0)$$

となる．よって，極限 $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ は 0 にはならないから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能ではない.

（解答終）

例題 2.12 において，極限 $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}}$ は存在しないことがわかる．これを全微分不可能の理由にしてもよい.

例題 2.13.　次の関数 $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で連続であるか，および全微分可能であるかどうか調べよ．

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\,\mathrm{Sin}^{-1}\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\fallingdotseq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

（解答）　まず $f(x,y)$ は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$
$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=\lim_{k\to 0}0=0$$

より，$(0,0)$ で偏微分可能で，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ となる．

$f(x,y)$ が $(0,0)$ で全微分可能であるかどうか調べるには，$(h,k)\fallingdotseq(0,0)$ のときに

$$\varepsilon(h,k)=f(0+h,0+k)-\{f(0,0)+f_x(0,0)h+f_y(0,0)k\}=f(h,k)=hk\,\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}$$

とおくとき，極限 $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ が 0 かどうかを調べればよい．ここで，$(h,k)\fallingdotseq(0,0)$ のとき

$$\left|\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=\left|\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\,\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right|=\frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}\left|\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right|\leqq\frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

となる．そこで，$r=\sqrt{h^2+k^2}$ とおけば，$|h|\leqq r,\ |k|\leqq r$ なので

$$\left|\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leqq\frac{\pi|hk|}{2\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{\pi|h|\,|k|}{2r}\leqq\frac{\pi r^2}{2r}=\frac{\pi r}{2}\quad\longrightarrow\quad 0\qquad(r\to+0)$$

より，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ が成り立つ．よって，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能である．

また，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能なので，定理 2.2 より連続である．

（解答終）

例題 2.14.　次の関数 $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で連続であるか，および全微分可能であるかどうか調べよ．

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2-y^3+y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\fallingdotseq(0,0))\\[2ex] 1 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

（解答）　まず $f(x,y)$ は

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(h+1)-1}{h}=\lim_{h\to0}1=1$$

$$\lim_{k\to0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{(-k+1)-1}{k}=\lim_{k\to0}(-1)=-1$$

より，$(0,0)$ で偏微分可能で，$f_x(0,0)=1,\ f_y(0,0)=-1$ である．

$f(x,y)$ が $(0,0)$ で全微分可能であるかどうか調べるには，$(h,k)\fallingdotseq(0,0)$ のときに

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k)&=f(0+h,0+k)-\{f(0,0)+f_x(0,0)h+f_y(0,0)k\}\\&=\frac{h^3+h^2-k^3+k^2}{h^2+k^2}-(1+h-k)\\&=\frac{hk(h-k)}{h^2+k^2}\end{aligned}$$

とおくとき，極限 $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ が 0 かどうかを調べればよい．

そこで，$h(t)=t,\ k(t)=-t$ として $t\to+0$ という極限を考えると，$\varepsilon(t,-t)=-t$ だから

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varepsilon(t,-t)}{\sqrt{t^2+t^2}}=\lim_{t\to+0}\frac{-t}{\sqrt{2}\,|t|}=\lim_{t\to+0}\frac{-t}{\sqrt{2}\,t}=\lim_{t\to+0}\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\fallingdotseq 0)$$

となる．よって，極限 $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ は 0 にはならないから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能ではない．

$(x,y)\fallingdotseq(0,0)$ のとき

$$|\,f(x,y)-f(0,0)\,|=\left|\,\frac{x^3+x^2-y^3+y^2}{x^2+y^2}-1\right|=\left|\,\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\,\right|$$

となる．そこで，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくと，$|x|\leqq r,\ |y|\leqq r$ であり

$$|\,f(x,y)-f(0,0)\,|=\left|\,\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\,\right|=\frac{|\,x^3-y^3\,|}{r^2}\leqq\frac{|x|^3+|y|^3}{r^2}\leqq\frac{r^3+r^3}{r^2}=2r\quad\longrightarrow\quad0\qquad(r\to+0)$$

となる，ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$$

が成り立つので，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続である．

（解答終）

極限 $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ は存在しないことがわかるので，これを全微分不可能の理由にしてもよい．

関数 $f(x,y)$ が全微分可能ならば連続であるが，全微分不可能でも不連続とは限らないので注意すること．1 変数関数でも $f(x)=|x|$ のように連続だが微分不可能な関数がたくさんあったことを思い出すとよい．

例題 2.15. 次の関数 $f(x,y)$ の全微分を求めよ．

(1) $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\,\dfrac{y}{x}$ (2) $f(x,y) = \log(x^2+2y^2-xy)$

(3) $f(x,y) = \cosh(x^2y)$ (4) $f(x,y) = x^y \quad (x>0)$

（解答） いずれの関数 $f(x,y)$ も定義域で C^1 級だから全微分可能である．

(1) 偏導関数は

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

なので，求める全微分は

$$df = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

(2) 偏導関数は

$$f_x(x,y) = \frac{2x-y}{x^2+2y^2-xy}, \qquad f_y(x,y) = \frac{4y-x}{x^2+2y^2-xy}$$

なので，求める全微分は

$$df = \frac{2x-y}{x^2+2y^2-xy}\,dx + \frac{4y-x}{x^2+2y^2-xy}\,dy = \frac{(2x-y)\,dx + (4y-x)\,dy}{x^2+2y^2-xy}$$

(3) 偏導関数は

$$f_x(x,y) = 2xy\sinh(x^2y), \qquad f_y(x,y) = x^2\sinh(x^2y)$$

なので，求める全微分は

$$df = 2xy\sinh(x^2y)\,dx + x^2\sinh(x^2y)\,dy = x\sinh(x^2y)(2y\,dx + x\,dy)$$

(4) 偏導関数は

$$f_x(x,y) = yx^{y-1}, \qquad f_y(x,y) = x^y\log x$$

なので，求める全微分は

$$df = yx^{y-1}\,dx + x^y\log x\,dy$$

（解答終）

全微分を答えるときには

$$df = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy, \qquad df = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

のどちらでもよい．前者は偏導関数が見やすく，後者は式が短くその後の計算で便利なことがある．

例題 2.16. 次の曲面 $z = f(x, y)$ の与えられた点 A における接平面の方程式を求めよ．

(1) $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ $\quad$ $\mathrm{A}(1, 2, f(1, 2))$ $\qquad$ (2) $z = f(x, y) = \log(x^2+y^2-1)$ $\quad$ $\mathrm{A}(2, -1, f(2, -1))$

(3) $z = f(x, y) = e^{x+y}\cos(x-y)$ $\quad$ $\mathrm{A}(0, \pi, f(0, \pi))$ $\qquad$ (4) $z = f(x, y) = \mathrm{Sin}^{-1}\,\dfrac{y}{x}$ $\quad$ $\mathrm{A}(2, 1, f(2, 1))$

（解答） いずれの関数 $f(x, y)$ も点 A の近傍で C^1 級だから全微分可能である．

(1) 偏導関数は

$$f_x(x, y) = 2x, \qquad f_y(x, y) = 2y$$

より，$f_x(1, 2) = 2$，$f_y(1, 2) = 4$ である．また，$f(1, 2) = 5$ なので，求める接平面の方程式は

$$z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2) = 2x + 4y - 5$$

(2) 偏導関数は

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2-1}, \qquad f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

より，$f_x(2, -1) = 1$，$f_y(2, -1) = -\dfrac{1}{2}$ である．また，$f(2, -1) = 2\log 2$ なので，求める接平面の方程式は

$$z = 2\log 2 + 1(x-2) - \frac{1}{2}(y+1) = x - \frac{y}{2} - \frac{5}{2} + 2\log 2$$

(3) 偏導関数は

$$f_x(x, y) = e^{x+y}\{\cos(x-y) - \sin(x-y)\}, \qquad f_y(x, y) = e^{x+y}\{\cos(x-y) + \sin(x-y)\}$$

より，$f_x(0, \pi) = -e^{\pi}$，$f_y(0, \pi) = -e^{\pi}$ である．また，$f(0, \pi) = -e^{\pi}$ なので，求める接平面の方程式は

$$z = -e^{\pi} - e^{\pi}(x-0) - e^{\pi}(y-\pi) = -e^{\pi}x - e^{\pi}y + (\pi-1)e^{\pi}$$

(4) 偏導関数は $x > 0$ の範囲では

$$f_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

より，$f_x(2, 1) = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$，$f_y(2, 1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である．また，$f(2, 1) = \mathrm{Sin}^{-1}\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$ なので，求める接平面の方程式は

$$z = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-2) + \frac{1}{\sqrt{3}}(y-1) = -\frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}$$

（解答終）

接平面の方程式は公式に当てはめるだけであるから，正確に計算できるようにしておくこと．なお，高校数学で直線の方程式を $y = \dfrac{x}{2} - 1$ と答えても $x - 2y = 2$ と答えてもよかったように，接平面の方程式も

$$z = -\frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}, \qquad x - 2y + 2\sqrt{3}\,z = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

のどちらで答えてもよい．前者は定数項をまとめ，後者なら分母を払うなどして係数を簡単にするのが通例である．

例題 2.17.　a を定数とする．平面 $z = 5x + 6y + a$ が曲面 $z = x^2 + xy + 3y$ に接するような a の値，およびそのときの接点の座標を求めよ．

（解答）　接点の座標を $(s, t, s^2 + st + 3t)$ とおく．$f(x, y) = x^2 + xy + 3y$ とおけば，偏導関数は

$$f_x(x, y) = 2x + y, \qquad f_y(x, y) = x + 3$$

より，$f_x(s, t) = 2s + t$, $f_y(s, t) = s + 3$ である．よって，求める接平面の方程式は

$$z = (s^2 + st + 3t) + (2s + t)(x - s) + (s + 3)(y - t) = (2s + t)x + (s + 3)y - s^2 - st$$

となる．これが $z = 5x + 6y + a$ と一致するから

$$2s + t = 5, \qquad s + 3 = 6, \qquad -s^2 - st = a$$

である．ゆえに，$s = 3$, $t = -1$ であるから，求める値は $a = -6$ である．また，$f(3, -1) = 3$ より，接点の座標は $(3, -1, 3)$ となる．

（解答終）

例題 2.18.　$\angle \mathrm{C} = 90^\circ$ の直角三角形 ABC がある．2 辺 AC と BC の長さを手作業で測ったところ，それぞれ 3m と 4m であったので，AB = 5m と判断したが，実際に精密な計測を行ったところそれぞれの辺の長さは 3.02m と 4.01m であった．このとき，AB の実際の長さと 5m との誤差はどの程度か調べよ．

（解答）　求める誤差は

$$\sqrt{(3.02)^2 + (4.01)^2} - 5$$

であるが，この値を厳密に計算するのは面倒なので，それぞれの誤差が 0.02 と 0.01 と小さいから全微分を用いて誤差を見積もることにする．$x = \mathrm{AC}$, $y = \mathrm{BC}$, $z = \mathrm{AB}$ とおけば，三平方の定理より $z = z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ である．このときの全微分は

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy$$

であるから，$z(3 + 0.02, 4 + 0.01) - z(3, 4)$ は 1 次近似を用いれば

$$\frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot 0.02 + \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot 0.01 = \frac{0.06}{5} + \frac{0.04}{5} = 0.02$$

と計算できるので，測定誤差はおよそ 0.02m である．なお，計算機で計算すると

$$\sqrt{(3.02)^2 + (4.01)^2} - 5 = 0.020009960149481643\cdots$$

であるから，精密とはいえ測定機器の誤差があることを考慮しても上の計算で十分な誤差評価が行えているとみてよいことがわかる．なお，正確な誤差評価を行うならば，後で扱う Taylor の定理を適用し，剰余項について計算すればよい．

（解答終）

全微分可能な関数は 1 次近似が可能であるから，1 変数関数の場合と同様に近似計算ができる．2 変数関数の場合には 2 次近似式からかなり項が増えて複雑になり，Taylor の定理の剰余項の計算も大変である．このために 1 次近似を用いる機会が多いので，上のような計算例にも慣れておくこと．

例題 2.19.　直円柱の高さ h と底面の半径 r を実測し体積 V を計算したいが，測定機器の精度として高さ h は 0.2 %以内，半径 r は 0.1 %以内の相対誤差が出るとする．このとき，体積 V の相対誤差はどの程度か調べよ．

（解答）　$V = \pi r^2 h$ であるから，全微分は

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = 2\pi rh\,dr + \pi r^2\,dh$$

より

$$\frac{dV}{V} = \frac{2\pi rh}{V}\,dr + \frac{\pi r^2}{V}\,dh = 2\,\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}$$

となる．よって，測定誤差 Δr と Δh が十分小さいとみて，相対誤差 $\dfrac{\Delta V}{V}$ を 1 次近似すれば

$$2\,\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}$$

となるから，$\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right|$ の代わりに $\left|2\,\dfrac{\Delta r}{r} + \dfrac{\Delta h}{h}\right|$ の大きさを調べる．

ここで，r と h の相対誤差は $\left|\dfrac{\Delta r}{r}\right| \leqq 0.001$, $\left|\dfrac{\Delta h}{h}\right| \leqq 0.002$ であるから

$$\left|2\,\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}\right| \leqq 2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| \leqq 2\cdot 0.001 + 0.002 = 0.004$$

となるから，V の相対誤差はおよそ 0.4 %以内であると見積もることができる．

（解答終）

例題 2.20.　単振り子の糸の長さを l とし，振り子の周期を T とすれば，振れ角が小さいならば

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

であることが知られている．これを用いて重力加速度 g の近似値を求めたい．l と T の測定値の相対誤差がそれぞれ p %以内，q %以内であるならば，g の相対誤差はどれほどか調べよ．ただし，p と q は十分小さいとする．

（解答）　与えられた公式より $g = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$ となる．g は物理的には定数だが，測定誤差を含む変数だとみなし全微分すれば

$$dg = \frac{\partial g}{\partial l}\,dl + \frac{\partial g}{\partial T}\,dT = \frac{4\pi^2}{T^2}\,dl - \frac{8\pi^2 l}{T^3}\,dT$$

より

$$\frac{dg}{g} = \frac{4\pi^2}{gT^2}\,dl - \frac{8\pi^2 l}{gT^3}\,dT = \frac{dl}{l} - 2\,\frac{dT}{T}$$

となる．よって， 測定誤差 Δl と ΔT が十分小さいとみて，相対誤差 $\dfrac{\Delta g}{g}$ を 1 次近似すれば

$$\frac{\Delta l}{l} - 2\,\frac{\Delta T}{T}$$

となるから，$\left|\dfrac{\Delta g}{g}\right|$ の代わりに $\left|\dfrac{\Delta l}{l} - 2\,\dfrac{\Delta T}{T}\right|$ の大きさを調べる．

ここで，l と T の相対誤差は $\left|\dfrac{\Delta l}{l}\right| \leqq \dfrac{p}{100}$, $\left|\dfrac{\Delta T}{T}\right| \leqq \dfrac{q}{100}$ であるから

$$\left|\frac{\Delta l}{l} - 2\,\frac{\Delta T}{T}\right| \leqq \left|\frac{\Delta l}{l}\right| + 2\left|\frac{\Delta T}{T}\right| \leqq \frac{p+2q}{100}$$

となり，g の相対誤差はおよそ $p+2q$ %以内であると見積もることができる．

（解答終）

3　高階偏導関数

3.1　高階偏導関数の定義

定義 3.1.（**2 階偏導関数**）
　関数 $f(x,y)$ は領域 D 上で偏微分可能で，偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ がともにまた D 上で偏微分可能ならば，$f(x,y)$ は 2 回偏微分可能であるといい，偏導関数の偏導関数

$$(f_x)_x = f_{xx}, \quad (f_x)_y = f_{xy}, \quad (f_y)_x = f_{yx}, \quad (f_y)_y = f_{yy} \tag{3.1}$$

を $f(x,y)$ の **2 階偏導関数**という．$z = f(x,y)$ に対して，2 階偏導関数をそれぞれ

$$z_{xx} = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad z_{xy} = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad z_{yx} = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad z_{yy} = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{3.2}$$

と表すこともある．

注意 3.2.　よく記号の意味を間違えやすいので注意しておくと

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

であり，どちらも『先に x で偏微分してから y で偏微分する』という意味である．(3.1) のように書くときは左から，(3.2) のように書くときは右から偏微分することになる．つまり，記号的には f に近い文字から偏微分するということである．一般に偏微分する変数の順番を変えると結果が異なるので気をつけること．
　また，1 変数関数のときと同様に，3 回偏微分可能なときには 3 階偏導関数 $f_{xxx}, f_{xxy}, \ldots$ が定義できる．偏微分する変数の順番を考慮すると，n 階偏導関数は 2^n 個あることがわかる．

定義 3.3.（C^n **級**）
　関数 $f(x,y)$ が D 上で n 回偏微分可能で，さらに $f(x,y)$ のすべての n 階偏導関数が D 上で連続であるとき，$f(x,y)$ は D 上で C^n **級**であるという．
　また，$f(x,y)$ が任意の自然数 n に対して D 上で C^n 級であるとき，D 上で C^∞ 級であるという．

　$f(x,y)$ が C^n 級関数ならば，f, f_x, $f_y, f_{xx}, \ldots$ と n 階以下の偏導関数はすべて連続となる．C^1 級関数が連続であることから導かれるので，各自で論理を追って確かめてみよ．

　理工学系分野でよく現れる偏微分の記号として次が挙げられる．

定義 3.4.（**ラプラシアンと調和関数**）
　2 回偏微分可能な関数 $f(x,y)$ に対して

$$\Delta f(x,y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$$

とおく．また，微分作用素

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を**ラプラシアン** (Laplacian) という．
　さらに，定義域で $\Delta f(x,y) = 0$ を満たす関数を**調和関数**という．

　ラプラシアン Δ はフーリエの法則やフィックの法則を通して拡散現象などと関連がある．詳細は各分野の参考書，または偏微分方程式の教科書に譲る．

2 階偏導関数に関する重要な性質は次のものである．

定理 3.5. 関数 $f(x,y)$ が領域 D 上で C^2 級ならば，D のすべての点において

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

が成り立つ．

証明. 領域 D の任意の点 (x,y) をとり固定し，関数 $F(h,k)$ を $h \fallingdotseq 0,\ k \fallingdotseq 0$ に対して

$$F(h,k) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)$$

で定める．ここで，$f(x,y)$ は C^2 級なので，$f(x,y)$ および偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ については，各変数について 1 変数関数としての平均値の定理の仮定をみたす．

1 変数関数の平均値の定理を x 成分，y 成分の順に 2 回適用すれば，ある $0 < \theta_1 < 1$ と $0 < \theta_2 < 1$ が存在して

$$\begin{aligned} F(h,k) &= \{f(x+h, y+k) - f(x+h, y)\} - \{f(x, y+k) - f(x,y)\} \\ &= \{f_x(x+\theta_1 h, y+k) - f_x(x+\theta_1 h, y)\}h \\ &= f_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k)hk \end{aligned}$$

となる．

一方，平均値の定理を y 成分，x 成分の順に 2 回適用すれば，ある $0 < \theta_3 < 1$ と $0 < \theta_4 < 1$ が存在して

$$\begin{aligned} F(h,k) &= \{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)\} - \{f(x+h, y) - f(x,y)\} \\ &= \{f_y(x+h, y+\theta_4 k) - f_y(x, y+\theta_4 k)\}k \\ &= f_{yx}(x+\theta_3 h, y+\theta_4 k)hk \end{aligned}$$

となる．

以上の計算より，$hk \fallingdotseq 0$ から

$$f_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k) = f_{yx}(x+\theta_3 h, y+\theta_4 k)$$

が成り立つ．よって，$0 < \theta_j < 1 \ \ (j = 1,2,3,4)$ と 2 階偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ と $f_{yx}(x,y)$ の連続性より，この式の両辺で $(h,k) \to (0,0)$ とすれば，求める等式

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

が成り立つ． □

もし $f(x,y)$ が C^3 級ならば，$f(x,y)$ や $f_x(x,y)$ は C^2 級であるから

$$f_{yxy} = (f_{yx})_y = (f_{xy})_y = f_{xyy}, \qquad f_{xxy} = (f_x)_{xy} = (f_x)_{yx} = f_{xyx}$$

のように，3 階偏導関数は $f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy}$ のどれかと一致する．これを定理にまとめると次のようになる．

定理 3.6. $f(x,y)$ が C^n 級関数ならば，n 階偏導関数は

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

のどれかに一致する．

この定理より，C^n 級関数については偏導関数を計算する際に偏微分する変数の順番は気にせずに，x と y でそれぞれ何回ずつ偏微分するかだけを考えればよい．通常は C^∞ 級関数およびそれらの合成関数を扱うことが多いので，偏微分する順番を気にする必要があるのは，主に関数が場合分けにより定義されている場合である．

3.2　高階偏導関数の計算例

例題 3.7.　次の関数 $z=f(x,y)$ の 2 階偏導関数をすべて求め，調和関数であるかどうか調べよ．

(1) $z=x^3+3x^2y+y^2$　　(2) $z=e^x\cos y$　　(3) $z=\log(x^2+y^2+1)$　　(4) $z=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$

（解答）　いずれの関数 $z=f(x,y)$ も定義域で C^2 級なので，$f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つ．

(1)　$z_x=3x^2+6xy,\ z_y=3x^2+2y$ より

$$z_{xx}=6x+6y, \qquad z_{xy}=z_{yx}=6x, \qquad z_{yy}=2$$

となる．また

$$\Delta f(x,y)=z_{xx}+z_{yy}=6x+6y+2\ (\fallingdotseq 0)$$

より，$f(x,y)$ は調和関数ではない．

(2)　$z_x=e^x\cos y,\ z_y=-e^x\sin y$ より

$$z_{xx}=e^x\cos y, \qquad z_{xy}=z_{yx}=-e^x\sin y, \qquad z_{yy}=-e^x\cos y$$

となる．また

$$\Delta f(x,y)=z_{xx}+z_{yy}=e^x\cos y+(-e^x\cos y)=0$$

より，$f(x,y)$ は調和関数である．

(3)　$z_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2+1},\ z_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2+1}$ より

$$z_{xx}=\frac{2(-x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}, \qquad z_{xy}=z_{yx}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}, \qquad z_{yy}=\frac{2(x^2-y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$$

となる．また

$$\Delta f(x,y)=z_{xx}+z_{yy}=\frac{2(-x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}+\frac{2(x^2-y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{4}{(x^2+y^2+1)^2}\ (\fallingdotseq 0)$$

より，$f(x,y)$ は調和関数ではない．

(4)　$z_x=\dfrac{-y}{x^2+y^2},\ z_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ より

$$z_{xx}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad z_{xy}=z_{yx}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad z_{yy}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

となる．また

$$\Delta f(x,y)=z_{xx}+z_{yy}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=0$$

より，$f(x,y)$ は調和関数である．

（解答終）

関数 $f(x,y)$ が初等関数などで構成されていてすぐに C^2 級とわかるときには，$f_{xy}(x,y)$ と $f_{yx}(x,y)$ が常に等しくなるから，わざわざ両方とも計算する必要はない．ただし，時間に余裕があれば，検算としてそれぞれを計算してみるのも有効な方法である．

例題 3.8. 　次の関数 $z = f(x,y)$ の 2 階偏導関数をすべて求めよ．

(1) $z = \dfrac{2x - y}{x^2 + y^2}$ 　　(2) $z = x^2 \operatorname{Tan}^{-1} \dfrac{y}{x} - y^2 \operatorname{Tan}^{-1} \dfrac{x}{y}$

（解答） 　いずれの関数 $f(x,y)$ も定義域で C^2 級なので，$f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つ．

(1) 　偏導関数は

$$z_x = \frac{2(x^2+y^2) - (2x-y)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2+2xy+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_y = \frac{-(x^2+y^2) - (2x-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2-4xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

なので

$$z_{xx} = \frac{-4x+2y}{(x^2+y^2)^2} + (-2x^2+2xy+2y^2)\cdot\frac{-4x}{(x^2+y^2)^3} = \frac{4x^3-6x^2y-12xy^2+2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$z_{xy} = z_{yx} = \frac{2x+4y}{(x^2+y^2)^2} + (-2x^2+2xy+2y^2)\cdot\frac{-4y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2x^3+12x^2y-6xy^2-4y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$z_{yy} = \frac{-4x+2y}{(x^2+y^2)^2} + (-x^2-4xy+y^2)\cdot\frac{-4y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-4x^3+6x^2y+12xy^2-2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

(2) 　まず $w = \operatorname{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ とおけば

$$w_x = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad w_y = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

であるから，偏導関数は

$$z_x = 2x\operatorname{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + x^2\cdot\frac{-y}{x^2+y^2} - y^2\cdot\frac{y}{x^2+y^2} = 2x\operatorname{Tan}^{-1}\frac{y}{x} - y$$

$$z_y = x^2\cdot\frac{x}{x^2+y^2} - 2y\operatorname{Tan}^{-1}\frac{x}{y} - y^2\cdot\frac{-x}{x^2+y^2} = -2y\operatorname{Tan}^{-1}\frac{x}{y} + x$$

なので

$$z_{xx} = 2\operatorname{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 2x\cdot\frac{-y}{x^2+y^2} = 2\operatorname{Tan}^{-1}\frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$z_{xy} = z_{yx} = 2x\cdot\frac{x}{x^2+y^2} - 1 = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$z_{yy} = -2\operatorname{Tan}^{-1}\frac{x}{y} - 2y\cdot\frac{-x}{x^2+y^2} = -2\operatorname{Tan}^{-1}\frac{x}{y} + \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

（解答終）

例題 3.9.　関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ((x, y) \fallingdotseq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

で定める．このとき，$f_{xy}(0, 0)$ と $f_{yx}(0, 0)$ の値を求めよ．

（解答）　$(x, y) \fallingdotseq (0, 0)$ では例題 1.6(8) より

$$f_x(x, y) = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad f_y(x, y) = \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

であり，また

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0 - 0}{k} = \lim_{k \to 0} 0 = 0$$

となる．よって，$h \fallingdotseq 0,\ k \fallingdotseq 0$ のとき

$$f_x(0, k) = \frac{0 - k^5 + 0}{(0 + k^2)^2} = -k, \qquad f_y(h, 0) = \frac{h^5 - 0 - 0}{(h^2 + 0)^2} = h$$

であるから

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0, 0 + k) - f_x(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k - 0}{k} = \lim_{k \to 0} (-1) = -1$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(0 + h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

（解答終）

この例題のように，C^2 級でない関数 $f(x, y)$ については $f_{xy}(x, y) \fallingdotseq f_{yx}(x, y)$ となる可能性がある．そのため，偏微分する変数の順番に気をつけなければならない．

例題 3.10.　次の関数は偏微分方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ をみたすことを示せ．

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \qquad (x \in \mathbb{R},\ t > 0)$$

（解答）　$u(x, t) > 0$ なので，対数をとれば

$$\log u(x, t) = -\frac{1}{2} \log t - \frac{x^2}{4t}$$

であるから，各変数で偏微分すれば

$$\frac{u_t}{u} = -\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2} \qquad \therefore\ u_t = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}\right) u$$

$$\frac{u_x}{u} = -\frac{x}{2t} \qquad \therefore\ u_x = -\frac{x}{2t}\, u$$

となる．よって

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{2t}\, u\right) = -\frac{1}{2t}\, u - \frac{x}{2t}\, u_x = -\frac{1}{2t}\, u - \frac{x}{2t}\left(-\frac{x}{2t}\, u\right) = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}\right) u = u_t$$

（解答終）

4　合成関数の微分法

ここではさまざまなタイプの合成関数の微分法を紹介する．基本的には 1 変数関数の場合と同じで外側をまず微分してから中身の微分をかけるのであるが，2 変数関数の場合には微分が x に関する偏微分と y に関する偏微分の 2 つがあることから公式は複雑となる．これがマスターできないと理工学系分野へ偏微分をうまく応用できなくなるので，混同せずにしっかり憶えること．

定理 4.1. （$z = f\bigl(g(x,y)\bigr)$ の偏微分法）
関数 $f(t)$ が区間 I 上で微分可能であり，関数 $g(x,y)$ が領域 D 上で偏微分可能かつ

$$g(x,y) \in I \qquad \bigl((x,y) \in D\bigr)$$

であれば，合成関数 $F(x,y) = f\bigl(g(x,y)\bigr)$ は D 上で偏微分可能で

$$F_x(x,y) = f'\bigl(g(x,y)\bigr)\, g_x(x,y), \qquad F_y(x,y) = f'\bigl(g(x,y)\bigr)\, g_y(x,y)$$

が成り立つ．

証明.　変数 y を固定し，$\varphi(x) = g(x,y)$ とおく．このとき，1 変数関数の合成関数の微分法より

$$\frac{d}{dx}\, f\bigl(\varphi(x)\bigr) = f'\bigl(\varphi(x)\bigr)\, \varphi'(x)$$

となる．実際には $\varphi'(x) = g_x(x,y)$ であるから，これを書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial x}\, F(x,y) = f'\bigl(g(x,y)\bigr)\, g_x(x,y)$$

が得られる．y に関する偏導関数も同様にして証明できる． □

例題 4.2.　関数 $f(t)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級とする．このとき，合成関数

$$g(x,y) = f(x^2 - y^2), \qquad h(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

について

$$yg_x(x,y) + xg_y(x,y) = 0, \qquad xh_x(x,y) + yh_y(x,y) = 0$$

が成り立つことを示せ．

（解答）　合成関数の微分法から

$$g_x(x,y) = f'(x^2 - y^2) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\,(x^2 - y^2) = 2xf'(x^2 - y^2)$$
$$g_y(x,y) = f'(x^2 - y^2) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\,(x^2 - y^2) = -2yf'(x^2 - y^2)$$

となる．よって

$$yg_x(x,y) + xg_y(x,y) = y \cdot 2xf'(x^2 - y^2) + x \cdot (-2y)f'(x^2 - y^2) = 0$$

が成り立つ．同様に

$$h_x(x,y) = f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}\, f'\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$h_y(x,y) = f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\, f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

となる．よって

$$xh_x(x,y) + yh_y(x,y) = x \cdot \frac{-y}{x^2}\, f'\left(\frac{y}{x}\right) + y \cdot \frac{1}{x}\, f'\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

（解答終）

定理 4.3. （$z = f\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)$ の微分法）
関数 $f(x, y)$ が領域 D 上で全微分可能であり，関数 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ がともに区間 I 上で微分可能かつ

$$\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr) \in D \qquad (t \in I)$$

であれば，合成関数 $F(t) = f\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)$ は区間 I 上で微分可能で

$$F'(t) = f_x\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)\, \varphi'(t) + f_y\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)\, \psi'(t)$$

が成り立つ．これを $z = f(x, y)$ と $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ との合成と見て次のようにも表す．

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

証明． 任意の $t \in I$ をとり固定する．$f(x, y)$ は全微分可能だから

$$\varepsilon(h, k) = f(\varphi(t) + h, \psi(t) + k) - f(\varphi(t), \psi(t)) - f_x(\varphi(t), \psi(t))h - f_y(\varphi(t), \psi(t))k \tag{4.1}$$

とおけば，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$ が成り立つ．そこで

$$h(s) = \varphi(t + s) - \varphi(t), \qquad k(s) = \psi(t + s) - \psi(t) \tag{4.2}$$

とおいて $s \to 0$ とすれば，$\varphi(t)$ と $\psi(t)$ は I 上で連続なので $(h(s), k(s)) \to (0, 0)$ となり，これは (h, k) の $(0, 0)$ への特別な近づき方を 1 つ決めたことになる．

示すべきことは 1 変数関数 $F(t)$ が微分可能なことなので，極限 $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{F(t + s) - F(t)}{s}$ が存在することを示せばよい．ここで，(4.1)と (4.2)より

$$\begin{aligned}
F(t + s) - F(t) &= f\bigl(\varphi(t + s), \psi(t + s)\bigr) - f\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr) \\
&= f\bigl(\varphi(t) + h(s), \psi(t) + k(s)\bigr) - f\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr) \\
&= f_x\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)h(s) + f_y\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)k(s) + \varepsilon(h(s), k(s))
\end{aligned}$$

であるから，$s \fallingdotseq 0$ ならば

$$\frac{F(t + s) - F(t)}{s} = f_x\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr) \frac{\varphi(t + s) - \varphi(t)}{s} + f_y\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr) \frac{\psi(t + s) - \psi(t)}{s} + \frac{\varepsilon(h(s), k(s))}{s}$$

が成り立つ．この右辺については，まず $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ は I 上で微分可能だから

$$\lim_{s\to 0} \frac{\varphi(t + s) - \varphi(t)}{s} = \varphi'(t), \qquad \lim_{s\to 0} \frac{\psi(t + s) - \psi(t)}{s} = \psi'(t)$$

となる．また

$$\left| \frac{\varepsilon(h(s), k(s))}{s} \right| = \frac{|\,\varepsilon(h(s), k(s))\,|}{\sqrt{h(s)^2 + k(s)^2}} \cdot \frac{\sqrt{h(s)^2 + k(s)^2}}{|\,s\,|} = \frac{|\,\varepsilon(h(s), k(s))\,|}{\sqrt{h(s)^2 + k(s)^2}} \sqrt{\left(\frac{h(s)}{s}\right)^2 + \left(\frac{k(s)}{s}\right)^2}$$

とすれば，$f(x, y)$ の全微分可能性と上の計算より

$$\lim_{s\to 0} \left| \frac{\varepsilon(h(s), k(s))}{s} \right| = 0 \cdot \sqrt{\{\varphi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2} = 0$$

である．ゆえに

$$\lim_{s\to 0} \frac{F(t + s) - F(t)}{s} = f_x\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)\, \varphi'(t) + f_y\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)\, \psi'(t)$$

となる．したがって，$F(t)$ は微分可能で

$$F'(t) = f_x\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)\, \varphi'(t) + f_y\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)\, \psi'(t)$$

が成り立つ． □

合成関数の微分法を 1 変数関数のときのように形式的な約分で憶えようと思うと，右辺は

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{\partial z}{dt}+\frac{\partial z}{dt}=2\frac{\partial z}{dt}$$

となり左辺と等しくならない（そもそも ∂x と dx で異なるから約分できないが）．そのためか公式を間違えやすいので注意すること．形式的な憶え方は全微分を用いて

$$df=f_x\,dx+f_y\,dy\quad\Longrightarrow\quad\frac{df}{dt}=f_x\,\frac{dx}{dt}+f_y\,\frac{dy}{dt}$$

とすればよい．実際，定理の証明はこの発想に基づいている．

例題 4.4. 関数 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で C^2 級とする．このとき，$x=t^2+1,\ y=t^3$ との合成関数

$$g(t)=f(t^2+1,t^3)$$

について，$g''(t)$ を求めよ．

（解答） $x'=2t,\ y'=3t^2$ より，合成関数の微分法から

$$g'(t)=f_x(t^2+1,t^3)\,\frac{dx}{dt}+f_y(t^2+1,t^3)\,\frac{dy}{dt}=2tf_x(t^2+1,t^3)+3t^2f_y(t^2+1,t^3)$$

となる．よって，$f(x,y)$ は C^2 級なので $f_{xy}=f_{yx}$ より

$$\begin{aligned}g''(t)&=2f_x(t^2+1,t^3)+2t\{f_{xx}(t^2+1,t^3)\cdot 2t+f_{xy}(t^2+1,t^3)\cdot 3t^2\}\\&\qquad+6tf_y(t^2+1,t^3)+3t^2\{f_{yx}(t^2+1,t^3)\cdot 2t+f_{yy}(t^2+1,t^3)\cdot 3t^2\}\\&=4t^2f_{xx}(t^2+1,t^3)+12t^3f_{xy}(t^2+1,t^3)+9t^4f_{yy}(t^2+1,t^3)+2f_x(t^2+1,t^3)+6tf_y(t^2+1,t^3)\end{aligned}$$

（解答終）

例題 4.5. $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 $V(x,y)$ をポテンシャルとする xy 平面内の質量 m の質点 P の運動を考える．すなわち，質点 P の時刻 t における位置 $\mathrm{P}\big(x(t),y(t)\big)$ は運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}(t)=-V_x\big(x(t),y(t)\big),\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}(t)=-V_y\big(x(t),y(t)\big)$$

に従うとする．このとき，質点 P の時刻 t における力学的エネルギー

$$E(t)=\frac{1}{2}\,m\left\{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2\right\}+V\big(x(t),y(t)\big)$$

は時刻 t によらず常に一定であることを示せ．

（解答） 合成関数の微分法より

$$\frac{d}{dt}\,\{x'(t)\}^2=2x'(t)x''(t),\qquad\frac{d}{dt}\,V\big(x(t),y(t)\big)=V_x\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+V_y\big(x(t),y(t)\big)y'(t)$$

である．よって，$E(t)$ を微分すれば

$$\begin{aligned}E'(t)&=\frac{1}{2}\,m\big\{2x'(t)x''(t)+2y'(t)y''(t)\big\}+V_x\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+V_y\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\\&=mx''(t)\cdot x'(t)+my''(t)\cdot y'(t)+V_x\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+V_y\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\\&=-V_x\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t)-V_y\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)+V_x\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+V_y\big(x(t),y(t)\big)y'(t)=0\end{aligned}$$

であるから，$E(t)$ は t によらない定数関数である．

（解答終）

定理 4.6. （$z = f\bigl(\varphi(s,t), \psi(s,t)\bigr)$ の偏微分法）
関数 $f(x,y)$ が領域 D 上で全微分可能であり，関数 $\varphi(s,t)$ と $\psi(s,t)$ がともに領域 E 上で偏微分可能かつ

$$\bigl(\varphi(s,t), \psi(s,t)\bigr) \in D \qquad \bigl((s,t) \in E\bigr)$$

であれば，合成関数 $F(s,t) = f\bigl(\varphi(s,t), \psi(s,t)\bigr)$ は E 上で偏微分可能で

$$F_s(s,t) = f_x\bigl(\varphi(s,t), \psi(s,t)\bigr)\, \varphi_s(s,t) + f_y\bigl(\varphi(s,t), \psi(s,t)\bigr)\, \psi_s(s,t)$$

$$F_t(s,t) = f_x\bigl(\varphi(s,t), \psi(s,t)\bigr)\, \varphi_t(s,t) + f_y\bigl(\varphi(s,t), \psi(s,t)\bigr)\, \psi_t(s,t)$$

が成り立つ．これを $z = f(x,y)$ と $x = \varphi(s,t)$, $y = \psi(s,t)$ との合成と見て

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

とも表す．

証明. t を定数とみなし，s についての 1 変数関数だと思うと，定理 4.3 より

$$F'(s,t) = f_x\bigl(\varphi(s,t), \psi(s,t)\bigr)\, \varphi'(s,t) + f_y\bigl(\varphi(s,t), \psi(s,t)\bigr)\, \psi'(s,t)$$

ここで，実際には

$$\varphi'(s,t) = \varphi_s(s,t), \qquad \psi'(s,t) = \psi_s(s,t)$$

のことであるから，s と t の 2 変数関数として上の式を表すと

$$F_s(s,t) = f_x\bigl(\varphi(s,t), \psi(s,t)\bigr)\, \varphi_s(s,t) + f_y\bigl(\varphi(s,t), \psi(s,t)\bigr)\, \psi_s(s,t)$$

となる．t についての偏導関数の証明も同様である． □

例題 4.7. 関数 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で C^1 級とする．このとき，$x = u^2 + v^2$, $y = uv$ との合成関数

$$g(u,v) = f(u^2 + v^2, uv)$$

について

$$vg_u(u,v) + ug_v(u,v) = 4uvf_x(u^2 + v^2, uv) + (u^2 + v^2)f_y(u^2 + v^2, uv)$$

が成り立つことを示せ．

（解答） 順番に偏導関数を計算すると

$$\begin{aligned} g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u} f(u^2+v^2, uv) &= f_x(u^2+v^2, uv)\frac{\partial x}{\partial u} + f_y(u^2+v^2, uv)\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= 2uf_x(u^2+v^2, uv) + vf_y(u^2+v^2, uv) \\ g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v} f(u^2+v^2, uv) &= f_x(u^2+v^2, uv)\frac{\partial x}{\partial v} + f_y(u^2+v^2, uv)\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= 2vf_x(u^2+v^2, uv) + uf_y(u^2+v^2, uv) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} vg_u(u,v) + ug_v(u,v) &= v\{2uf_x(u^2+v^2, uv) + vf_y(u^2+v^2, uv)\} + u\{2vf_x(u^2+v^2, uv) + uf_y(u^2+v^2, uv)\} \\ &= 4uvf_x(u^2+v^2, uv) + (u^2+v^2)f_y(u^2+v^2, uv) \end{aligned}$$

が成り立つ.（なお，これは $x = u^2 + v^2$, $y = uv$ のもとで

$$vg_u(u,v) + ug_v(u,v) = 4yf_x(x,y) + xf_y(x,y)$$

とも表せる.）

（解答終）

例題 4.8.　関数 $u(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で C^1 級とする．このとき，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ との合成関数を

$$v(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

とするとき，$r\neq 0$ ならば，次の等式が成り立つことを示せ．

$$u_x(r\cos\theta,r\sin\theta)^2+u_y(r\cos\theta,r\sin\theta)^2=v_r(r,\theta)^2+\frac{1}{r^2}\,v_\theta(r,\theta)^2$$

（解答）　偏導関数は

$$\begin{aligned}
v_r(r,\theta)&=\frac{\partial}{\partial r}\,u(r\cos\theta,r\sin\theta)=u_x(r\cos\theta,r\sin\theta)\cos\theta+u_y(r\cos\theta,r\sin\theta)\sin\theta\\
v_\theta(r,\theta)&=\frac{\partial}{\partial \theta}\,u(r\cos\theta,r\sin\theta)=u_x(r\cos\theta,r\sin\theta)(-r\sin\theta)+u_y(r\cos\theta,r\sin\theta)r\cos\theta
\end{aligned}$$

となる．よって，簡単のために変数部分を省略して計算すれば

$$\begin{aligned}
v_r^2+\frac{1}{r^2}\,v_\theta^2&=(u_x\cdot\cos\theta+u_y\cdot\sin\theta)^2+\frac{1}{r^2}(-u_x\cdot r\sin\theta+u_y\cdot r\cos\theta)^2\\
&=u_x^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+u_y^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\
&=u_x^2+u_y^2
\end{aligned}$$

より，求める等式が成り立つ．

（解答終）

例題 4.9.　関数 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で C^2 級とする．このとき，$x=e^s\cos t,\ y=e^s\sin t$ との合成関数を

$$g(s,t)=f(e^s\cos t,e^s\sin t)$$

とするとき，$f(x,y)$ が調和関数ならば $g(s,t)$ も調和関数であることを示せ．

（解答）　偏導関数は

$$\begin{aligned}
g_s(s,t)&=f_x(e^s\cos t,e^s\sin t)\cdot e^s\cos t+f_y(e^s\cos t,e^s\sin t)\cdot e^s\sin t\\
g_t(s,t)&=f_x(e^s\cos t,e^s\sin t)\cdot(-e^s\sin t)+f_y(e^s\cos t,e^s\sin t)\cdot e^s\cos t
\end{aligned}$$

となる．よって，簡単のために変数部分を省略して計算すれば，$f(x,y)$ は C^2 級なので

$$\begin{aligned}
g_{ss}&=\{f_{xx}\cdot e^s\cos t+f_{xy}\cdot e^s\sin t\}\cdot e^s\cos t+f_x\cdot e^s\cos t\\
&\qquad\qquad+\{f_{yx}\cdot e^s\cos t+f_{yy}\cdot e^s\sin t\}\cdot e^s\sin t+f_y\cdot e^s\sin t\\
&=e^{2s}(f_{xx}\cos^2 t+f_{xy}\sin 2t+f_{yy}\sin^2 t)+e^s(f_x\cos t+f_y\sin t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{tt}&=\{f_{xx}\cdot(-e^s\sin t)+f_{xy}\cdot e^s\cos t)\cdot(-e^s\sin t)+f_x\cdot(-e^s\cos t)\\
&\qquad\qquad+\{f_{yx}\cdot(-e^s\sin t)+f_{yy}\cdot e^s\cos t\}\cdot e^s\cos t+f_y\cdot(-e^s\sin t)\\
&=e^{2s}(f_{xx}\sin^2 t-f_{xy}\sin 2t+f_{yy}\cos^2 t)-e^s(f_x\cos t+f_y\sin t)
\end{aligned}$$

となる．ゆえに，$f(x,y)$ は調和関数なので

$$\Delta g(s,t)=g_{ss}(s,t)+g_{tt}(s,t)=e^{2s}\{f_{xx}(e^s\cos t,e^s\sin t)+f_{yy}(e^s\cos t,e^s\sin t)\}=0$$

が成り立つから，$g(s,t)$ も調和関数である．

（解答終）

例題 4.10. $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数 $u(x,y)$ と $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ との合成関数を

$$v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

とするとき，$(x,y) \risingdotseq (0,0)$ ならば

$$u_{xx}(r\cos\theta, r\sin\theta) + u_{yy}(r\cos\theta, r\sin\theta) = v_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}\,v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\,v_{\theta\theta}(r,\theta)$$

が成り立つことを示せ.

（解答） 偏導関数は

$$\begin{aligned} v_r(r,\theta) &= \frac{\partial}{\partial r}\,u(r\cos\theta, r\sin\theta) = u_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + u_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ v_\theta(r,\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta}\,u(r\cos\theta, r\sin\theta) = u_x(r\cos\theta, r\sin\theta)(-r\sin\theta) + u_y(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta \end{aligned}$$

となる.

よって，簡単のために変数部分を省略して計算すれば，$u(x,y)$ は C^2 級なので

$$\begin{aligned} v_{rr} &= (u_{xx}\cdot\cos\theta + u_{xy}\cdot\sin\theta)\cos\theta + (u_{yx}\cdot\cos\theta + u_{yy}\cdot\sin\theta)\sin\theta \\ &= u_{xx}\cos^2\theta + u_{yy}\sin^2\theta + u_{xy}\sin 2\theta \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} v_{\theta\theta} &= \{u_{xx}\cdot(-r\sin\theta) + u_{xy}\cdot r\cos\theta\}\cdot(-r\sin\theta) + u_x\cdot(-r\cos\theta) \\ &\qquad + \{u_{yx}\cdot(-r\sin\theta) + u_{yy}\cdot r\cos\theta\}\cdot r\cos\theta + u_y\cdot(-r\sin\theta) \\ &= r^2(u_{xx}\sin^2\theta + u_{yy}\cos^2\theta - u_{xy}\sin 2\theta) - r(u_x\cos\theta + u_y\sin\theta) \end{aligned}$$

となる.

ゆえに

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r}\,v_r + \frac{1}{r^2}\,v_{\theta\theta} &= (u_{xx}\cos^2\theta + u_{yy}\sin^2\theta + u_{xy}\sin 2\theta) \\ &\qquad + \frac{1}{r}\,(u_x\cos\theta + u_y\sin\theta) \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{r^2}\,\{r^2(u_{xx}\sin^2\theta + u_{yy}\cos^2\theta - u_{xy}\sin 2\theta) - r(u_x\cos\theta + u_y\sin\theta)\} \\ &= u_{xx}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + u_{yy}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= u_{xx} + u_{yy} \end{aligned}$$

より，求める等式が成り立つ.

（解答終）

これはラプラシアン $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を極座標で表示したときの公式であり，球対称性をもつ偏微分方程式を解く際などによく用いられる．今回は公式を知っている前提で右辺から左辺に変形することで解答したが，$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ を極座標表示することで左辺から右辺を導けるようにしておけば，公式を忘れても復元できるので各自で練習してみるとよい.

5　Taylor の定理

2 変数関数の 1 次近似式として，これまでに全微分や接平面を説明した．しかし，これらだけでは正確な誤差評価ができない．誤差を正確に見積もるためには，1 変数関数のときと同様に次のテイラーの定理が重要な役割を果たす．ただし，一般のテイラーの定理を述べると公式の形が非常に複雑になってしまうこと，1 次近似式の誤差評価を可能にすることを目的とすること，次節の極値判定への応用に必要な次数であること，などにより 2 次の項までの展開式に相当する形で説明する．

定理 5.1.（Taylor の定理）
関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) の近傍上で C^2 級とする．このとき，その近傍内の任意の点 (x,y) に対して，2 点 (a,b) と (x,y) を結ぶ線分上の点 (ξ,η) が存在して

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + R(x,y)$$

$$R(x,y) = \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(\xi,\eta)(x-a)^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)(x-a)(y-b) + f_{yy}(\xi,\eta)(y-b)^2\right\}$$

と表すことができる．この $R(x,y)$ は剰余項と呼ばれる．

証明．　点 (a,b) の近傍の点 (x,y) を任意にとり固定して

$$h = x-a, \quad k = y-b, \qquad g(t) = f(a+ht, b+kt)$$

とおく．$g(t)$ は $[0,1]$ を含む開区間上で C^2 級だから，1 変数関数についての Taylor の定理より

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}\, g''(\theta t)t^2$$

と表せる．ただし，$0 < \theta < 1$ である．特に $t = 1$ として

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}\, g''(\theta) \tag{5.1}$$

となる．

そこで，(5.1)の各項を順番に計算すると，まず

$$g(0) = f(a,b), \qquad g(1) = f(a+h, b+k) = f(x,y) \tag{5.2}$$

である．また，定理 4.3（合成関数の微分法）より導関数は

$$g'(t) = f_x(a+ht, b+kt)h + f_y(a+ht, b+kt)k$$

$$g''(t) = f_{xx}(a+ht, b+kt)h^2 + 2f_{xy}(a+ht, b+kt)hk + f_{yy}(a+ht, b+kt)k^2$$

となるので

$$g'(0) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \tag{5.3}$$

であり，さらに $\xi = a + h\theta,\ \eta = b + k\theta$ とおけば

$$g''(\theta) = f_{xx}(\xi,\eta)(x-a)^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)(x-a)(y-b) + f_{yy}(\xi,\eta)(y-b)^2 \tag{5.4}$$

と表せる．このとき，ベクトルで表せば

$$(\xi,\eta) = (1-\theta)(a,b) + \theta(x,y) \qquad (0 < \theta < 1)$$

であるから，(ξ,η) は 2 点 (a,b) と (x,y) を結ぶ線分上の点である．

ゆえに，$R(x,y) = \dfrac{1}{2}\, g''(\theta)$ とおき，(5.2)，(5.3)，(5.4)を (5.1)に代入すれば

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + R(x,y)$$

$$R(x,y) = \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(\xi,\eta)(x-a)^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)(x-a)(y-b) + f_{yy}(\xi,\eta)(y-b)^2\right\}$$

が成り立つ．　□

注意 5.2.　前に述べたように

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

は曲面 $z = f(x,y)$ の点 $\bigl(a, b, f(a,b)\bigr)$ における接平面の方程式であるから，Taylor の定理における $R(x,y)$ は関数 $z = f(x,y)$ のグラフと接平面とのずれを表している．

また，C^2 級よりも緩い仮定でもテイラーの定理は成り立つが，応用上は C^2 級関数への適用が多いことと，記述が煩雑になるためにこのような主張とした．

多変数関数については，テイラーの定理を適用して 1 次までの項と剰余項の和に表すだけでも見た目は複雑である．このように多変数関数のテイラーの定理は複雑であり，n 次の項まで展開したときの剰余項の複雑さは手計算では困難なものである．そのために，次の漸近展開の形で表すことも多い．

定理 5.3.（漸近展開）

関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) の近傍上で C^n 級とする．このとき，その近傍内の任意の点 (x,y) に対して

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{{}_mC_j}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(a,b)\,(x-a)^j (y-b)^{m-j} + o(r^n) \qquad \left(r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \to +0\right)$$

と表すことができる．

特に $n = 2$ のときは，原点 $(0,0)$ の近くで考えると

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(0,0) &+ f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\ &+ \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right\} + o(r^2) \qquad \left(r = \sqrt{x^2+y^2} \to +0\right) \end{aligned}$$

と表せる．

また，多変数関数を剰余項やランダウの記号を無視して n 次多項式で近似したものを n **次近似多項式**という．例えば，関数 $f(x,y)$ の $(0,0)$ における 2 次近似多項式は

$$P_2(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right\}$$

である．なお，同様に 1 次近似多項式を書いてみると

$$P_1(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y$$

となる．よって，確かに $z = P_1(x,y)$ の定める平面が，曲面 $z = f(x,y)$ の $(0,0)$ における接平面となっている．

例題 5.4. 次の関数 $f(x,y)$ の $(0,0)$ における 2 次近似多項式 $P_2(x,y)$ を求めよ．

(1) $f(x,y) = \log(1+x+2y)$ (2) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+2y^2}$

（解答）

(1) まず $f(0,0)=0$ である．次に偏導関数を計算すれば

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+x+2y}, \qquad f_y(x,y) = \frac{2}{1+x+2y}$$

より，$f_x(0,0)=1$，$f_y(0,0)=2$ である．さらに

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(1+x+2y)^2}, \qquad f_{xy}(x,y) = -\frac{2}{(1+x+2y)^2}, \qquad f_{yy}(x,y) = -\frac{4}{(1+x+2y)^2}$$

より，$f_{xx}(0,0)=-1$，$f_{xy}(0,0)=-2$，$f_{yy}(0,0)=-4$ である．ゆえに，2 次近似多項式は

$$P_2(x,y) = 0 + x + 2y + \frac{1}{2}\left\{-x^2 + 2\cdot(-2)xy - 4y^2\right\} = x + 2y - \frac{x^2}{2} - 2xy - 2y^2$$

(2) まず $f(0,0)=1$ である．次に偏導関数を計算すれば

$$f_x(x,y) = -\frac{2x}{(1+x^2+2y^2)^2}, \qquad f_y(x,y) = -\frac{4y}{(1+x^2+2y^2)^2}$$

より，$f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$ である．さらに

$$f_{xx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\dfrac{2h}{(1+h^2)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2}{(1+h^2)^2} = -2$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0$$

$$f_{yy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f_y(0,k)-f_y(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{-\dfrac{4k}{(1+2k^2)^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{-4}{(1+2k^2)^2} = -4$$

となる．よって

$$P_2(x,y) = 1 + 0x + 0y + \frac{1}{2}\left(-2x^2 + 0xy - 4y^2\right) = 1 - x^2 - 2y^2$$

（解答終）

近似多項式を求めるだけなら，偏導関数を計算せずに定義に基づいて偏微分係数を求めた方が楽なこともある．もちろん偏導関数を計算してもよい．また，公式で xy の係数を間違えやすいので注意すること．2 倍される理由は $f(x,y)$ が C^2 級なので

$$f_{xy}(a,b)xy + f_{yx}(a,b)yx = 2f_{xy}(a,b)xy$$

とまとまるからである．

また，1 変数関数の漸近展開を利用できることもある．例えば上の例題で $\log(1+t)$ の漸近展開を利用して

$$\log(1+x+2y) = (x+2y) - \frac{(x+2y)^2}{2} + o((x+2y)^2)$$

なので，ランダウの記号の部分は 3 次以上の項からなるから，2 次の項までで打ち切れば 2 次近似多項式は

$$P_2(x,y) = (x+2y) - \frac{(x+2y)^2}{2} = x + 2y - \frac{x^2}{2} - 2xy - 2y^2$$

と求めることもできる．

6　2変数関数の極値

6.1　2変数関数の極値の定義

定義 6.1. （極値）
　関数 $f(x,y)$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$f(x,y) > f(a,b) \qquad \big((x,y) \in U_\delta\big((a,b)\big),\ (x,y) \fallingdotseq (a,b)\big) \tag{6.1}$$

となるとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で**極小**であるといい，$f(a,b)$ を**極小値**という．
　また，ある $\delta > 0$ が存在して

$$f(x,y) < f(a,b) \qquad \big((x,y) \in U_\delta\big((a,b)\big),\ (x,y) \fallingdotseq (a,b)\big) \tag{6.2}$$

となるとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で**極大**であるといい，$f(a,b)$ を**極大値**という．
　さらに，極大値と極小値をまとめて**極値**という．

注意 6.2.　(6.1)の不等式に等号をつけた条件

$$f(x,y) \geqq f(a,b) \qquad \big((x,y) \in U_\delta\big((a,b)\big),\ (x,y) \fallingdotseq (a,b)\big)$$

が成り立つとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で**広義の極小**であるといい，$f(a,b)$ を**広義の極小値**という．本によっては広義の極小を含めて単に極小ということもあるので，自分で勉強するときは注意すること．
　同様に (6.2)の不等式に等号をつけた条件

$$f(x,y) \leqq f(a,b) \qquad \big((x,y) \in U_\delta\big((a,b)\big),\ (x,y) \fallingdotseq (a,b)\big)$$

が成り立つとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で**広義の極大**であるといい，$f(a,b)$ を**広義の極大値**という．

　もし広義の意味で極大や極小を考えると，定数関数はすべての点で極大かつ極小となる．また，例えば

$$f(x,y) = \begin{cases} x & (x \leqq 0) \\ 0 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ x-1 & (1 \leqq x) \end{cases}$$

のように単調増加関数の一部が定数となっている場合でも $0 < a < 1$ と実数 b に対して点 (a,b) で極小（かつ極大）となる．ただ，これら広義の極大・極小は直感的なイメージと合わないこと，および変分法や制御理論などの分野における安定性などの議論でも広義の意味で極大・極小を考えると理論が煩雑になるので，広義の極大・極小は極値とは考えないことにする．

例 6.3.　$f(x,y) = x^2 + y^2$ は点 $(0,0)$ で極小値 $f(0,0) = 0$ をとる．また，$g(x,y) = -x^2 - y^2$ は点 $(0,0)$ で極大値 $g(0,0) = 0$ をとる．この例ではそれぞれ極小かつ最小，極大かつ最大となっているが，もちろんいつも極小値が最小値になるわけではない．

1 変数関数 $y = g(x)$ のときを思い出すと，$g(x)$ が微分可能ならば

$$x = a \text{ で } g(x) \text{ が極値をとる} \quad \Longrightarrow \quad g'(a) = 0$$

が成り立っていた．これと同じことが 2 変数関数の場合も成り立つ．

定理 6.4. 関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとり，かつ偏微分可能であるとする．このとき

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

が成り立つ．

証明. $y = b$ で固定し $\varphi(x) = f(x,b)$ とおくと，$\varphi(x)$ は $x = a$ で極値をとるから $\varphi'(a) = 0$ となる．よって，$f_x(a,b) = \varphi'(a) = 0$ である．$f_y(a,b) = 0$ についても同様に示せる． □

定義 6.5. （停留点）

関数 $f(x,y)$ は偏微分可能であるとする．このとき

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

となる点 (a,b) を $f(x,y)$ の**停留点**（**臨界点**）という．

注意 6.6. 定理 6.4 の逆は成り立たない．つまり，点 (a,b) が関数 $f(x,y)$ の停留点であっても，その点で極値をとるとは限らない．これは 1 変数関数のときに微分が 0 でも変曲点かもしれなかったことと同じである．例えば，$f(x,y) = x^2 - y^2$ は原点が停留点だが，x 軸上と y 軸上で関数の変化を調べれば極大でも極小でもないことがわかる．このような点を**鞍点**という．

6.2　2 次形式

定理 6.4 と注意 6.6 から，点 (a,b) が停留点であることは極値をとるための必要条件ではあるが十分条件ではない．そこで，停留点で極値をとるかどうかを判定する方法を考えることにする．

1 変数関数 $y=g(x)$ の場合には

$$g'(a)=0,\ g''(a)>0 \quad \Longrightarrow \quad g(x) \text{ は } x=a \text{ で極小}$$

$$g'(a)=0,\ g''(a)<0 \quad \Longrightarrow \quad g(x) \text{ は } x=a \text{ で極大}$$

のように 2 階導関数を用いて判定する方法を高校数学 III で学習した．2 変数関数でもその類似の定理が成り立つことが知られている．ただし，$z=f(x,y)$ の 2 階偏導関数は $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ の 4 個あり，1 変数の場合の『2 階導関数の正負で判定する』というものをどのように 2 変数関数版に翻訳すればよいかは自明なことではない．なお，上では誤解のないように述べたが，応用で扱う関数 $f(x,y)$ は C^2 級であることが多く，その際には $f_{xy}=f_{yx}$ であるから実際には 2 階偏導関数は 3 個考えればよい．

この極大極小を判定する定理を紹介するために，2 次形式という概念を導入する．これは簡単に述べれば，2 変数の 2 次関数で 1 次の項と定数項がないものである．

定義 6.7. **（2 次形式と正定値・負定値）**

$p,q,r\in\mathbb{R}$ とするとき，X と Y の同次 2 次式

$$F(X,Y)=pX^2+2qXY+rY^2$$

を **2 次形式**という．

さらに

$$F(X,Y)>0 \qquad \big((X,Y)\neq(0,0)\big)$$

が成り立つとき，$F(X,Y)$ は**正定値**であるという．また

$$F(X,Y)<0 \qquad \big((X,Y)\neq(0,0)\big)$$

が成り立つとき，$F(X,Y)$ は**負定値**であるという．

与えられた 2 次形式 $F(X,Y)$ が正定値かどうかを調べるには，平方完成をして考えればよい．

定理 6.8.　$F(X,Y)=pX^2+2qXY+rY^2$ を 2 次形式とする．

(1) $p>0,\ pr-q^2>0$ ならば，$F(X,Y)$ は正定値である．

(2) $p<0,\ pr-q^2>0$ ならば，$F(X,Y)$ は負定値である．

(3) $pr-q^2<0$ ならば，$F(X,Y)$ は正の値と負の値をとる．

証明. (1)　$F(X,Y)$ を平方完成すると，仮定より $p>0$ かつ $\dfrac{pr-q^2}{p}>0$ であるから

$$F(X,Y)=p\left(X+\frac{q}{p}Y\right)^2+\frac{pr-q^2}{p}Y^2\geqq 0$$

であり，等号は $X+\dfrac{q}{p}Y=0$ かつ $Y=0$，つまり $X=Y=0$ のときに成り立つ．よって

$$F(X,Y)>0 \qquad \big((X,Y)\neq(0,0)\big)$$

となるので，$F(X,Y)$ は正定値である．

(2)　$F(X,Y)$ を平方完成すると，仮定より $p<0$ かつ $\dfrac{pr-q^2}{p}<0$ であるから

$$F(X,Y)=p\left(X+\frac{q}{p}Y\right)^2+\frac{pr-q^2}{p}Y^2\leqq 0$$

であり，等号は $X+\dfrac{q}{p}Y=0$ かつ $Y=0$，つまり $X=Y=0$ のときに成り立つ．よって

$$F(X,Y)<0 \qquad \bigl((X,Y)\fallingdotseq(0,0)\bigr)$$

となるので，$F(X,Y)$ は負定値である．

(3)　$p\fallingdotseq 0$ ならば

$$F(1,0)=p, \qquad F(q,-p)=p(pr-q^2)$$

なので，$pr-q^2<0$ より $F(1,0)$ と $F(q,-p)$ は異符号になる．よって，$F(X,Y)$ は正の値と負の値をとる．

$p=0$ ならば，$pr-q^2=-q^2<0$ より $q\fallingdotseq 0$．よって

$$F(X,1)=2qX+r$$

は X を変化させればすべての実数値をとる．

□

注意 6.9.　2 次形式 $F(X,Y)=pX^2+2qXY+rY^2$ の係数を並べて対称行列 $A=\begin{pmatrix}p & q\\ q & r\end{pmatrix}$ をつくると，この行列 A の固有方程式は

$$\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda-p & -q\\ -q & \lambda-r\end{pmatrix}=(\lambda-p)(\lambda-r)-q^2=\lambda^2-(p+r)\lambda+pr-q^2$$

となる．よって，A の 2 個の固有値を λ_1,λ_2 とおけば，2 次方程式

$$\lambda^2-(p+r)\lambda+pr-q^2=0$$

の解が λ_1 と λ_2 である．この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(p+r)^2-4(pr-q^2)=p^2-2pr+r^2+4q^2=(p-r)^2+4q^2\geqq 0$$

となるので，この 2 次方程式は常に実数解をもつ．また，解と係数の関係より

$$\lambda_1+\lambda_2=p+r, \qquad \lambda_1\lambda_2=pr-q^2$$

が成り立つ．

ここで，$p>0$ かつ $pr-q^2>0$ とすると，まず $r>\dfrac{q^2}{p}\geqq 0$ より $r>0$ となるから

$$\lambda_1+\lambda_2=p+r>0, \qquad \lambda_1\lambda_2=pr-q^2>0$$

が成り立つので，λ_1 と λ_2 はともに正である．逆に λ_1 と λ_2 が両方とも正ならば，$p>0$ かつ $pr-q^2>0$ が成り立つ．よって，**2 次形式 $F(X,Y)$ が正定値であるとは，それから作った実対称行列 A の固有値がすべて正であることと同値である．このとき，実対称行列 A は正定値であるという．**負定値についても同様のことが成り立つ．

これら 2 次形式に関する詳しい性質は線形代数の方で学習することになる（と思う）．実対称行列 A が正定値であることを $A>0$ で表すこともある．**この実対称行列の正定値・負定値という概念が，対応する 2 次形式の性質に大きく関わるものである．**

6.3　ヘッセ行列を用いた極大・極小の判定法

この節ではヘッセ行列を用いて，停留点で極値をとるかどうかを判定する方法を与える．実は常に適用できるとは限らないものであるが，それでもかなり有用な定理である．

定義 6.10.（ヘッセ行列）
関数 $f(x,y)$ が領域 D 上で C^2 級であるとき，行列

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

を $f(x,y)$ の**ヘッセ行列 (Hesse 行列)** という．考えている関数が明確なときは単に $H(x,y)$ で表すこともある．なお，$f(x,y)$ が C^2 級ならば，定理 3.5 より $f_{xy}=f_{yx}$ であるから，ヘッセ行列は対称行列となる．

また，ヘッセ行列の行列式

$$\det H_f(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$$

を**ヘッシアン**という．

例 6.11.　$f(x,y)=x^3+3x^2y+y^2$ のヘッセ行列とヘッシアンはそれぞれ

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 6x+6y & 6x \\ 6x & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det H_f(x,y)=12x+12y-36x^2$$

となる．つまり，ヘッセ行列の各成分やヘッシアンは関数になる．

定理 6.12.（極値を取るための十分条件）
関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) の近傍上で C^2 級で，さらに点 (a,b) は $f(x,y)$ の停留点とする．このとき

(1) $\det H_f(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0$ ならば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極小となる．

(2) $\det H_f(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0$ ならば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極大となる．

(3) $\det H_f(a,b)<0$ ならば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極大でも極小でもない．

(4) $\det H_f(a,b)=0$ ならば，$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるかとらないかはこの方法ではわからない．

証明.　2 次形式の議論を用いて証明する．この定理の証明はやや難しいので焦らずに読むこと．

(1)　$f(x,y)$ は点 (a,b) の近傍上で C^2 級だから，その近傍上で $\det H_f(x,y)$ と $f_{xx}(x,y)$ はともに連続である．定理の仮定より $\det H_f(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0$ なので，$\delta>0$ を十分小さくとると

$$\det H_f(x,y)>0, \quad f_{xx}(x,y)>0 \qquad \big((x,y)\in U_\delta\big((a,b)\big)\big) \tag{6.3}$$

となる．

$(x,y)\in U_\delta\big((a,b)\big)$, $(x,y)\fallingdotseq(a,b)$ となる任意の点 (x,y) をとる．関数 $f(x,y)$ は C^2 級だから，定理 5.1（Taylor の定理）より 2 点 (a,b) と (x,y) を結ぶ線分上の点 (ξ,η) が存在して

$$f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+R(x,y) \tag{6.4}$$

$$R(x,y)=\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(\xi,\eta)(x-a)^2+2f_{xy}(\xi,\eta)(x-a)(y-b)+f_{yy}(\xi,\eta)(y-b)^2\right\} \tag{6.5}$$

と表すことができる．ここで，点 (a,b) は停留点だから，(6.4) より

$$f(x,y)=f(a,b)+R(x,y) \tag{6.6}$$

となる．

そこで，次のような 2 次形式を考える．

$$F(X,Y) = f_{xx}(\xi,\eta)X^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)XY + f_{yy}(\xi,\eta)Y^2$$

このとき，$(\xi,\eta) \in U_\delta\big((a,b)\big)$ であることと (6.3) より

$$f_{xx}(\xi,\eta) > 0, \qquad \det H_f(\xi,\eta) = f_{xx}(\xi,\eta)f_{yy}(\xi,\eta) - f_{xy}(\xi,\eta)^2 > 0$$

が成り立つ．ゆえに，定理 6.8(1) より $F(X,Y)$ は正定値となるから

$$F(X,Y) > 0 \qquad \big((X,Y) \risingdotseq (0,0)\big) \tag{6.7}$$

である．したがって，$(x-a, y-b) \risingdotseq (0,0)$ であることと (6.5)および (6.7)より

$$R(x,y) = \frac{1}{2}\,F(x-a, y-b) > 0 \tag{6.8}$$

となる．

よって，(6.6)と (6.8)より

$$f(x,y) = f(a,b) + R(x,y) > f(a,b) \qquad \big((x,y) \in U_\delta\big((a,b)\big),\ (x,y) \risingdotseq (a,b)\big)$$

が成り立つ．ゆえに，定義 6.1 より $f(x,y)$ は点 (a,b) で極小となる．

(2)　(1) の証明とほとんど同様であるから演習問題とする．

(3)　$\det H_f(a,b) < 0$ であるから，2 次形式

$$G(X,Y) = f_{xx}(a,b)X^2 + 2f_{xy}(a,b)XY + f_{yy}(a,b)Y^2$$

は定理 6.8(3) より正の値と負の値をとる．任意の実数 h と k をとり固定し，$t=0$ の近傍で

$$g(t) = f(a+th, b+tk)$$

とおくと，$g(t)$ は 0 を含む開区間上で C^2 級であり，定理 4.3（合成関数の微分法）より

$$g'(t) = f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k$$
$$g''(t) = f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + 2f_{xy}(a+th, b+tk)hk + f_{yy}(a+th, b+tk)k^2$$

となる．

点 (a,b) は $f(x,y)$ の停留点だから

$$g'(0) = f_x(a,b)h + f_y(a,b)k = 0h + 0k = 0$$
$$g''(0) = f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2 = G(h,k)$$

である．ゆえに，h と k を変化させると，$g''(0)$ の値は正にも負にもなる．特に $g''(0) < 0$ となる h と k に対しては，$g(t)$ は $t=0$ で極大となる．一方，$g''(0) > 0$ となる h と k に対しては，$g(t)$ は $t=0$ で極小となる．したがって，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極大でも極小でもない（点 (a,b) で極大になる方向ベクトル (h,k) や極小になる方向ベクトルがあるので，点 (a,b) は鞍点である）．

□

注意 6.13.　この証明法は 2 変数関数の場合でしか難しいので，あまり証明を憶える必要はない．線形代数の知識を使えば，もっとスマートなうえに 3 変数以上の関数に対しても通用する証明をすることができる．

なお，$\det H_f(a,b) = 0$ となる場合には簡単な極大・極小の判定法はないので，個別に工夫しなければならない．

練習問題 6.1.　定理 6.12(2) を証明せよ．

6.4　極値の計算例

C^2 級関数 $f(x,y)$ の極値を求めるための手順をまとめると

(Step1) $f(x,y)$ の停留点（$f_x = f_y = 0$）となる点をすべて求める．

(Step2) $f(x,y)$ のヘッセ行列 $H(x,y)$ を計算する．

(Step3) 各停留点でのヘッセ行列の行列式の符号を調べて，定理 6.12 を適用する．

となる．

例 6.14.　関数 $f(x,y) = -x^2 + xy - y^2 + x$ の極値

（解答）　まず，停留点を求める．

$$f_x(x,y) = -2x + y + 1 = 0, \qquad f_y(x,y) = x - 2y = 0$$

より，次の連立方程式

$$\begin{cases} -2x + y + 1 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

を解いて，$f(x,y)$ の停留点は $(x,y) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ の 1 個．

また，2 階偏導関数を計算すれば

$$f_{xx}(x,y) = -2, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 1, \qquad f_{yy}(x,y) = -2$$

より，ヘッセ行列は

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

である．

よって，$(x,y) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ のとき

$$\det H\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

より，点 $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ で極値をとる．

さらに，$f_{xx}\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = -2 < 0$ だから極大となる．ゆえに，極大値 $f\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$ をとる．

（解答終）

上ではヘッセ行列を使う練習として解答したが，2 次形式に 1 次式を加えた 2 次関数ならば，高校で習ったように

$$f(x,y) = -\left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$$

と平方完成すれば

$$x - \frac{y+1}{2} = y - \frac{1}{3} = 0$$

のとき，つまり $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ で最大値 $\dfrac{1}{3}$ をとるから，これが極大値でもあることがわかる．私は偏微分の方が楽なので上記のようにするが，平方完成とどちらが楽かは個人によるような気もする．

具体的な関数の極値を計算する手順はもう決まっているので，以下の例題に取り組みながらその手法をマスターすること．ただし，手順を完璧に理解しても計算ミスをしやすいポイントは多い（停留点の計算のための連立方程式・2 階偏導関数・行列式など）のでしっかり計算練習をしておくことが大事である．

例題 6.15. 関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2$ の極値を求めよ．

（解答） $f(x,y)$ の停留点を求めるには

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 6y, \qquad f_y(x,y) = -6x + 6y$$

より，次の連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 - 6y = 0 \\ f_y(x,y) = -6x + 6y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2y = 0 & \cdots ① \\ -x + y = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

を解けばよい．ここで，② より $y = x$ である．これを ① に代入して

$$x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \qquad \therefore\ x = 0, 2$$

よって，$f(x,y)$ の停留点は $(x,y) = (0,0), (2,2)$ の 2 個である．

また，2 階偏導関数を計算すれば

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -6, \qquad f_{yy}(x,y) = 6$$

より，$f(x,y)$ のヘッセ行列は

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

である．

点 $(0,0)$ では

$$\det H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

より，極値をとらない．

点 $(2,2)$ では

$$\det H(2,2) = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0, \qquad f_{xx}(2,2) = 12 > 0$$

より，極小となる．よって，極小値 $f(2,2) = -4$ をとる．

以上より，$(x,y) = (2,2)$ のとき，極小値 -4 をとる．

（解答終）

この例題のように，関数 $f(x,y)$ の停留点を求めた後は，それらのすべての点についてヘッセ行列の行列式の符号を調べなければならない．そのため，それぞれの計算は単純でも，全体の計算量はかなり多くなる．特に同じことの繰り返しだからと暗算をし始めると，符号や行列式のミスが発生しやすいので，途中で集中力を切らさないように注意すること．

例題 6.16.　関数 $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - 1$ の極値を求めよ．

（解答）　$f(x,y)$ の停留点を求めるには

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x, \qquad f_y(x,y) = 6xy - 6y$$

より，次の連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ f_y(x,y) = 6xy - 6y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 & \cdots \text{①} \\ (x-1)y = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

を解けばよい．ここで，② より $x = 1$ または $y = 0$ である．

(i) $x = 1$ のとき

① に代入すれば，$y^2 - 1 = 0$ より $y = \pm 1$ となる．

(ii) $y = 0$ のとき

① に代入すれば，$x^2 - 2x = x(x-2) = 0$ より $x = 0, 2$ となる．

以上より，$f(x,y)$ の停留点は $(x,y) = (0,0), (2,0), (1,1), (1,-1)$ の 4 個である．

また，2 階偏導関数を計算すれば

$$f_{xx}(x,y) = 6x - 6, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 6y, \qquad f_{yy}(x,y) = 6x - 6$$

より，$f(x,y)$ のヘッセ行列は

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 6y \\ 6y & 6x-6 \end{pmatrix}$$

である．

点 $(0,0)$ では

$$\det H(0,0) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 36 > 0, \qquad f_{xx}(0,0) = -6 < 0$$

より，極大となる．よって，極大値 $f(0,0) = -1$ をとる．

点 $(2,0)$ では

$$\det H(2,0) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0, \qquad f_{xx}(2,0) = 6 > 0$$

より，極小となる．よって，極小値 $f(2,0) = -5$ をとる．

点 $(1,1)$ と $(1,-1)$ では

$$\det H(1,1) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0, \qquad \det H(1,-1) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

より，極値をとらない．

以上より，$(x,y) = (0,0)$ で極大値 -1，$(x,y) = (2,0)$ で極小値 -5 をとる．

（解答終）

例題 6.17. 関数 $f(x,y) = xy + \dfrac{x-y}{xy}$ の極値を求めよ．

（解答） 関数 $f(x,y)$ の定義域は $D = \{\,(x,y) \mid xy \fallingdotseq 0\,\}$ である．$f(x,y)$ の停留点を求めるには

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$$

より

$$f_x(x,y) = y + \frac{1}{x^2}, \qquad f_y(x,y) = x - \frac{1}{y^2}$$

なので，次の連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y + \dfrac{1}{x^2} = 0 \\[2ex] f_y(x,y) = x - \dfrac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2y + 1 = 0 & \cdots ① \\ xy^2 - 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

を解けばよい．ここで，① と ② を加えれば

$$x^2y + xy^2 = xy(x+y) = 0$$

であり，$xy \fallingdotseq 0$ より $y = -x$ である．これを ② に代入すれば $x^3 - 1 = 0$ より，x は実数だから $x = 1$ である．このとき $y = -x = -1$ なので，$f(x,y)$ の停留点は $(x,y) = (1,-1)$ の 1 個である．

また，2 階偏導関数を計算すれば

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{2}{x^3}, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 1, \qquad f_{yy}(x,y) = \frac{2}{y^3}$$

より，$f(x,y)$ のヘッセ行列は

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{x^3} & 1 \\[2ex] 1 & \dfrac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

である．

点 $(1,-1)$ では

$$\det H(1,-1) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \qquad f_{xx}(1,-1) = -2 < 0$$

より，極大となる．よって，極大値 $f(1,-1) = -3$ をとる．

（解答終）

練習問題 6.2. 次の関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(1) $f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$

(2) $f(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy$

(3) $f(x,y) = 4x^3 - y^3 + 3x^2y + 9y$

(4) $f(x,y) = x^4 - 2xy - x^2 + y^2$

(5) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$

(6) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

(7) $f(x,y) = (x^2+2y^2)e^{-x^2-y^2}$

(8) $f(x,y) = x^2 - x\sin y - \cos^2 y$

(9) $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$

(10) $f(x,y) = xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y}$

ヘッシアンが停留点で $\det H(a,b)=0$ となり判定できない場合には，個別に工夫して判定することになる．

例題 6.18. 関数 $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$ の極値を求めよ．

（解答） $f(x,y)$ の停留点を求めるには

$$f_x(x,y)=4x^3-4x+4y, \qquad f_y(x,y)=4y^3+4x-4y$$

より，次の連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y)=4x^3-4x+4y=0 \\ f_y(x,y)=4y^3+4x-4y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3-x+y=0 & \cdots ① \\ y^3+x-y=0 & \cdots ② \end{cases}$$

を解けばよい．ここで，① と ② を加えれば

$$x^3+y^3=0 \qquad \therefore\ y^3=-x^3$$

より，x と y は実数だから $y=-x$ である．これを ① に代入すれば

$$x^3-2x=x(x^2-2)=0 \qquad \therefore\ x=0,\pm\sqrt{2}$$

よって，$y=-x$ に注意して，$f(x,y)$ の停留点は $(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ の 3 個である．

また，2 階偏導関数を計算すれば

$$f_{xx}(x,y)=12x^2-4, \qquad f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=4, \qquad f_{yy}(x,y)=12y^2-4$$

より，$f(x,y)$ のヘッセ行列は

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$$

である．

点 $(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$（複号同順）では

$$\det H(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=\begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}=384>0, \qquad f_{xx}(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=20>0$$

より，極小となる．よって，極小値 $f(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=-8$ をとる．

点 $(0,0)$ では

$$\det H(0,0)=\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=0$$

より，$f(0,0)=0$ が極値かどうかはこれでは判定できない．

そこで，$y=x$ 上と x 軸上での $f(x,y)$ の値をそれぞれ考えると

$$\begin{aligned} f(x,x)&=2x^4>0 && (x\neq 0) \\ f(x,0)&=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)<0 && (0<|x|<\sqrt{2}) \end{aligned}$$

であるから，原点 $(0,0)$ の近傍で $f(0,0)=0$ から増加する方向と減少する方向がある．よって，$(0,0)$ では極大でも極小でもない．

以上より，$(x,y)=(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$（複号同順）のとき，極小値 -8 をとる．

（解答終）

今回は $y=x$ 上と x 軸上の関数 $f(x,y)$ の様子を調べることによって解決したが，いつもこれで答えが求まるとは限らない．今回で言えば $f(x,y)=f(y,x)$ のような対称性など，関数の特徴から見当をつけること．

練習問題 6.3. 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x,y)=2x^2-6x^2y+2y^3$

(2) $f(x,y)=x^4+y^4-4(x-y)^2$

(3) $f(x,y)=2x^3+3x^2y-6xy^2+3y^3-3x^2$

(4) $f(x,y)=x^4+6x^2y^2+y^4-6y^2$

7　陰関数

7.1　陰関数定理

高校数学 II で座標平面上の図形を方程式で表すということを学習した．例えば，放物線や円はそれぞれ

$$y = x^2, \qquad x^2 + y^2 = 1$$

をみたす点 (x, y) 全体として表せる．つまり，1 変数関数を用いて $y = f(x)$ と表す方法と，2 変数関数を用いて $\varphi(x, y) = 0$ と表す方法がある．例えば，上の例では

$$f(x) = x^2, \qquad \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

とおけば，$y = f(x)$ は放物線を，$\varphi(x, y) = 0$ は円を表している．ここで，円については

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

のように，$y = \cdots$ の形に直すことができた．ただし，一般には $\varphi(x, y) = 0$ の形の式を具体的に $y = \cdots$ の形に変形することは難しいことが多い．例えば

$$x^3 + 3xy + y^3 = 0, \qquad e^x \cos y + xy^2 = 0$$

などは $y = \cdots$ の形に変形するのは困難である．次に述べる陰関数定理は，適切な仮定の下で $\varphi(x, y) = 0$ は $y = \cdots$ の形に（具体的な表示を得ることが難しくても抽象的には）直せるはずという主張を述べている．

定義 7.1. （陰関数）

x と y に関する関係式 $\varphi(x, y) = 0$ に対して，関数 $y = \eta(x)$ が

$$\varphi(x, \eta(x)) = 0$$

をみたすとき，$y = \eta(x)$ を $\varphi(x, y) = 0$ によって定まる**陰関数**という．

関数 $\varphi(x, y)$ は C^1 級とし，$\varphi(x, y) = 0$ の定める陰関数 $y = \eta(x)$ が微分可能であるとすると，$\varphi(x, \eta(x)) = 0$ を微分すれば

$$\varphi_x(x, \eta(x)) + \varphi_y(x, \eta(x))\eta'(x) = 0$$

である．よって，もし $\varphi_y(x, \eta(x)) \fallingdotseq 0$ ならば

$$\eta'(x) = -\frac{\varphi_x(x, \eta(x))}{\varphi_y(x, \eta(x))}$$

が成り立つ．このように，陰関数 $\eta(x)$ の具体的な形がわからなくても，この等式を用いて陰関数の導関数が求められる．

陰関数の具体的な形を求めることは一般には困難なので，陰関数が存在するための条件を考えることにすると，次の陰関数定理が得られる．

定理 7.2. （陰関数定理）
関数 $\varphi(x,y)$ は点 (a,b) の近傍上で C^1 級で

$$\varphi(a,b)=0, \qquad \varphi_y(a,b) \fallingdotseq\!\!\!\!/\; 0$$

とすれば，$x=a$ を含む開区間 I 上の C^1 級関数 $\eta(x)$ で

$$\eta(a)=b, \qquad \varphi(x,\eta(x))=0, \qquad \eta'(x)=-\frac{\varphi_x(x,\eta(x))}{\varphi_y(x,\eta(x))} \qquad (x\in I)$$

をみたすものがただ一つ存在する．

注意 7.3. 上の陰関数定理は $\varphi(x,y)=0$ を $y=\cdots$ の形に直すことを考えているが，もし

$$\varphi(a,b)=0, \qquad \varphi_x(a,b) \neq 0$$

であれば，$y=b$ を含む開区間 J 上の C^1 級関数 $\xi(y)$ で次をみたすものがただ一つ存在する．

$$\xi(b)=a, \qquad \varphi(\xi(y),y)=0, \qquad \xi'(y)=-\frac{\varphi_y(\xi(y),y)}{\varphi_x(\xi(y),y)} \qquad (y\in J)$$

つまり，同様の仮定を満たせば $x=\cdots$ の形に直すこともできる．これは円の方程式 $x^2+y^2=1$ を $x=\pm\sqrt{1-y^2}$ と変形することに相当する．

証明． $\varphi_y(a,b)>0$ の場合を示すが，$\varphi_y(a,b)<0$ の場合も同様である．

まず陰関数 $y=\eta(x)$ が存在することを示す．$\varphi(x,y)$ は C^1 級であるから，$\varphi_y(x,y)$ は連続なので，点 b の近傍の $y\in J$ については $\varphi_y(a,y)>0$ が成り立つ．そこで，$b_1,b_2\in J,\ b_1<b<b_2$ をとれば，$\varphi(a,y)$ の $y\in J$ についての単調増加性より

$$\varphi(a,b_1)<\varphi(a,b)=0<\varphi(a,b_2)$$

が成り立つ．さらに，$\varphi(x,b_1)$ と $\varphi(x,b_2)$ は x について連続なので，点 a の近傍の $x\in I$ について

$$\varphi(x,b_1)<0<\varphi(x,b_2) \qquad (x\in I)$$

となる．ここで，$x\in I$ を固定すると，y の関数 $\varphi(x,y)$ に中間値の定理を適用して，ある $b_1<y_0<b_2$ について $\varphi(x,y_0)=0$ が成り立つ．また，$\varphi_y(x,y)>0$ であるから，x に対してこのような y_0 はただ 1 つ定まる．よって，関数 $\eta(x)$ を上記のような y_0 に対して $\eta(x)=y_0$ と定義すれば，これは

$$\eta(a)=b, \qquad \varphi(x,\eta(x))=0 \qquad (x\in I)$$

をみたすから，$\eta(x)$ は $\varphi(x,y)=0$ の点 (a,b) のまわりでの陰関数である．

次に陰関数 $y=\eta(x)$ が連続であることを示す．任意の $\alpha\in I$ をとり，$\beta=\varphi(\alpha)$ とおく．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\varepsilon_0=\min\{\varepsilon,\,\beta-b_1,\,b_2-\beta\}$ とおけば

$$b_1\leqq\beta-\varepsilon_0<\beta<\beta+\varepsilon_0\leqq b_2$$

となる．$b_1\leqq y\leqq b_2$ のとき，$\varphi_y(\alpha,y)>0$ であるから

$$\varphi(\alpha,\beta-\varepsilon_0)<\varphi(\alpha,\beta)<\varphi(\alpha,\beta+\varepsilon_0) \qquad \therefore\ \varphi(\alpha,\beta-\varepsilon_0)<0<\varphi(\alpha,\beta+\varepsilon_0)$$

が成り立つ．ここで，x の関数 $\varphi(x,\beta\pm\varepsilon_0)$ は $x=\alpha$ で連続であるから，ある $\delta>0$ が存在して

$$|\,x-\alpha\,|<\delta \quad\Longrightarrow\quad \varphi(x,\beta-\varepsilon_0)<0<\varphi(x,\beta+\varepsilon_0)$$

であり，この x について $\varphi_y(x,y)>0$ なので

$$\varphi(x,\beta-\varepsilon_0)<\varphi(x,\eta(x))=0<\varphi(x,\beta+\varepsilon_0)$$

とあわせて

$$|x-\alpha|<\delta \quad \Longrightarrow \quad \beta-\varepsilon_0<\eta(x)<\beta+\varepsilon_0 \qquad \therefore\ |\eta(x)-\beta|<\varepsilon_0 \leqq \varepsilon$$

が成り立つから，$\eta(x)$ は $x=\alpha$ で連続である．

最後に陰関数 $y=\eta(x)$ が $x=\alpha\in I$ で微分可能であることを示す．$\beta=\eta(\alpha)$ とおき，点 (α,β) の近傍上の点 (x,y) に対して，点 (α,β) と (x,y) を結ぶ線分上の点 $(\xi_1(x,y),\,\xi_2(x,y))$ で

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&=\varphi(\alpha,\beta)+\varphi_x(\xi_1,\xi_2)\cdot(x-\alpha)+\varphi_y(\xi_1,\xi_2)\cdot(y-\beta)\\&=\varphi_x(\xi_1,\xi_2)\cdot(x-\alpha)+\varphi_y(\xi_1,\xi_2)\cdot(y-\eta(\alpha))\end{aligned}$$

となるものが存在する．ここで，$\xi_1(x,y)$ と $\xi_2(x,y)$ は点 (α,β) で連続である．$y=\eta(x)$ を代入すると

$$0=\varphi(x,\eta(x))=\varphi_x\big(\xi_1(x,\eta(x)),\xi_2(x,\eta(x))\big)\cdot(x-\alpha)+\varphi_y\big(\xi_1(x,\eta(x)),\xi_2(x,\eta(x))\big)\cdot(\eta(x)-\eta(\alpha))$$

であり，(a,b) の近傍で $\varphi_y(x,y)>0$ であるから，α の近傍上の $x\fallingdotseq\alpha$ に対して

$$\frac{\eta(x)-\eta(\alpha)}{x-\alpha}=-\frac{\varphi_x\big(\xi_1(x,\eta(x)),\xi_2(x,\eta(x))\big)}{\varphi_y\big(\xi_1(x,\eta(x)),\xi_2(x,\eta(x))\big)}$$

となる．この右辺は $x=\alpha$ で連続であるから

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\eta(x)-\eta(\alpha)}{x-\alpha}=-\frac{\varphi_x\big(\xi_1(\alpha,\beta),\xi_2(\alpha,\beta)\big)}{\varphi_y\big(\xi_1(\alpha,\beta),\xi_2(\alpha,\beta)\big)}=-\frac{\varphi_x(\alpha,\beta)}{\varphi_y(\alpha,\beta)}$$

が成り立つ．ゆえに，$\eta(x)$ は $x=\alpha$ で微分可能で，$\eta'(\alpha)=-\dfrac{\varphi_x(\alpha,\beta)}{\varphi_y(\alpha,\beta)}$ である．$\alpha\in I$ は任意だったから

$$\eta'(x)=-\frac{\varphi_x(x,\eta(x))}{\varphi_y(x,\eta(x))} \qquad (x\in I)$$

であり，この右辺は連続なので，$\eta(x)$ は I 上で C^1 級である． □

陰関数定理の証明は難しいので，まずはその主張のイメージを把握して使えれば問題ない．また，導関数の公式の部分は前に述べたように

$$\varphi(x,\eta(x))=0$$

の両辺を微分すれば得られるので，丸暗記するよりも自分で導けるようにしておくこと．

この公式により，$\varphi(x,y)=0$ の陰関数 $y=\eta(x)$ の具体的な形がわからなくても，その曲線 $\varphi(x,y)=0$ の接線の方程式や関数 $y=\eta(x)$ の増減・凹凸を調べることができる．

まず最初に 2 変数の関係式 $\varphi(x,y)=0$ の陰関数について考えたが，3 変数についても同様のことが可能である．直感的には

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \Longrightarrow \quad z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$$

のように，曲面の一部を局所的にグラフで表しているということである．

定義 7.4. （陰関数）
x,y,z に関する関係式 $\varphi(x,y,z)=0$ に対して，関数 $z=\eta(x,y)$ が

$$\varphi(x,y,\eta(x,y))=0$$

をみたすとき，$z=\eta(x,y)$ を $\varphi(x,y,z)=0$ によって定まる**陰関数**という．

ここでは証明は述べないが，$\varphi(x,y,z)=0$ のような 3 変数以上の関数についても陰関数定理が成り立つ．

定理 7.5. （陰関数定理）
関数 $\varphi(x,y,z)$ は点 (a,b,c) の近傍上で C^1 級であり，

$$\varphi(a,b,c)=0, \qquad \varphi_z(a,b,c)\neq 0$$

であれば，$(x,y)=(a,b)$ を含む領域 D 上の C^1 級関数 $\eta(x,y)$ で

$$\eta(a,b)=c, \qquad \varphi(x,y,\eta(x,y))=0 \qquad ((x,y)\in D)$$

をみたすものがただ一つ存在する．陰関数 $\eta(x,y)$ の偏導関数は

$$\eta_x(x,y)=-\frac{\varphi_x(x,y,\eta(x,y))}{\varphi_z(x,y,\eta(x,y))}, \qquad \eta_y(x,y)=-\frac{\varphi_y(x,y,\eta(x,y))}{\varphi_z(x,y,\eta(x,y))}$$

で与えられる．

陰関数定理の偏導関数の部分は

$$\varphi(x,y,\eta(x,y))=0$$

の両辺を x で偏微分すれば

$$\varphi_x(x,y,\eta(x,y))+\varphi_z(x,y,\eta(x,y))\frac{\partial\eta(x,y)}{\partial x}=0 \qquad \therefore\ \eta_x(x,y)=-\frac{\varphi_x(x,y,\eta(x,y))}{\varphi_z(x,y,\eta(x,y))}$$

となるので，わざわざ憶える必要はない．

次から具体例を通して陰関数に関する計算方法を紹介する．

7.2　陰関数に関する種々の計算例

例題 7.6.　次の方程式の定める陰関数 $y=y(x)$ の導関数 y' と 2 階導関数 y'' を求めよ．

(1) $x^2+y^2=xy+1$　　(2) $y=e^{x+y}$　　(3) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}=\log\sqrt{x^2+y^2}$

（解答）

(1)　方程式の両辺を x で微分すると，y は x についての関数と見て

$$2x+2yy'=y+xy' \qquad \therefore\ (x-2y)y'=2x-y$$

となる．よって，$x-2y\fallingdotseq 0$ ならば，$y'=\dfrac{2x-y}{x-2y}$ である．

$(x-2y)y'=2x-y$ の両辺をさらに x で微分して

$$(1-2y')y'+(x-2y)y''=2-y' \qquad \therefore\ (x-2y)y''=2-2y'+2(y')^2$$

なので，これに $y'=\dfrac{2x-y}{x-2y}$ を代入すれば

$$y''=\frac{2-2y'+2(y')^2}{x-2y}=\frac{6(x^2-xy+y^2)}{(x-2y)^3}=\frac{6}{(x-2y)^3}$$

である．

(2)　方程式の両辺を x で微分すると，y は x についての関数と見て

$$y'=e^{x+y}(1+y') \qquad \therefore\ (1-e^{x+y})y'=e^{x+y}$$

となる．よって，$1-e^{x+y}\fallingdotseq 0$ ならば，$y'=\dfrac{e^{x+y}}{1-e^{x+y}}$ である．

$y'=\dfrac{1}{1-e^{x+y}}-1$ をさらに x で微分して

$$y''=-\frac{-e^{x+y}(1+y')}{(1-e^{x+y})^2}=\frac{e^{x+y}}{(1-e^{x+y})^3}$$

である．

(3)　方程式の両辺を x で微分すると，y は x についての関数と見て

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2},\quad \frac{d}{dx}\log\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$

より

$$\frac{xy'-y}{x^2+y^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2} \qquad \therefore\ (x-y)y'=x+y$$

となる．よって，$x-y\fallingdotseq 0$ ならば，$y'=\dfrac{x+y}{x-y}$ である．

$(x-y)y'=x+y$ の両辺をさらに x で微分して

$$(1-y')y'+(x-y)y''=1+y' \qquad \therefore\ (x-y)y''=1+(y')^2$$

なので，これに $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$ を代入すれば

$$y''=\frac{1+(y')^2}{x-y}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$

である．

（解答終）

例題 7.7.　曲線 $2x^3 + 6x^2y - 4xy + 3y^2 - 10 = 0$ の点 $(1, -2)$ における接線の方程式を求めよ．

（解答）　方程式の両辺を x で微分すると，y は x についての関数と見て

$$6x^2 + 12xy + 6x^2y' - 4y - 4xy' + 6yy' = 0 \qquad \therefore\ (3x^2 - 2x + 3y)y' = -3x^2 - 6xy + 2y$$

となる．よって，$3x^2 - 2x + 3y \fallingdotseq 0$ ならば

$$y' = \frac{-3x^2 - 6xy + 2y}{3x^2 - 2x + 3y}$$

であるから，$(x, y) = (1, -2)$ を代入して

$$y' = \frac{-3 + 12 - 4}{3 - 2 - 6} = \frac{5}{-5} = -1$$

が接線の傾きである．ゆえに，求める接線の方程式は

$$y - (-2) = -1(x - 1) \qquad \therefore\ y = -x - 1$$

である．

（解答終）

例題 7.8.　方程式 $x^2 + xy + y^2 = 1$ の定める陰関数 $y = y(x)$ の極値を求めよ．

（解答）　方程式の両辺を x で微分すると，y は x についての関数と見て

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \qquad \therefore\ (x + 2y)y' = -2x - y$$

となる．よって，$x + 2y \fallingdotseq 0$ ならば

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

であるから，極値をとる点の候補を求めるには $y' = 0$ と方程式より，次の連立方程式

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

を解けばよい．$y = -2x$ を $x^2 + xy + y^2 = 1$ に代入すれば $3x^2 = 1$ より，$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる．よって，極値となる可能性があるのは $(x, y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ のときであり，これらは $x + 2y \fallingdotseq 0$ をみたすから問題に適する．

そこで，これらの点での y'' の符号を調べる．そのために $(x + 2y)y' = -2x - y$ をもう一度微分すると

$$(1 + 2y')y' + (x + 2y)y'' = -2 - y'$$

であり，上記の点で考えるから $y' = 0$ とすれば

$$(x + 2y)y'' = -2 \qquad \therefore\ y'' = -\frac{2}{x + 2y}$$

となる．ゆえに

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \implies y'' = \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$$

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \implies y'' = -\frac{2}{\sqrt{3}} < 0$$

が成り立つから，陰関数 $y = y(x)$ は $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で極大値 $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で極小値 $y = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ をとる．

（解答終）

例題 7.9.　方程式 $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ の定める陰関数 $y=y(x)$ の極値を求めよ．

（解答）　方程式の両辺を x で微分すると，y は x についての関数と見て

$$2(x^2+y^2)(2x+2yy') = 2(2x-2yy') \qquad \therefore\ y(1+x^2+y^2)y' = x(1-x^2-y^2)$$

となる．よって，$y(1+x^2+y^2) \fallingdotseq 0$ ならば

$$y' = \frac{x(1-x^2-y^2)}{y(1+x^2+y^2)}$$

であるから，極値をとる点の候補を求めるには $y'=0$ と方程式より，次の連立方程式

$$\begin{cases} x(1-x^2-y^2)=0 & \cdots ① \\ (x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2) & \cdots ② \end{cases}$$

を解けばよい．$x=0$ のときは ② より $y=0$ となり，条件 $y(1+x^2+y^2) \fallingdotseq 0$ をみたさない．よって，① と $x \fallingdotseq 0$ より $x^2+y^2=1$ であるから，② より $4x^2=3$ なので $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる．よって，極値となる可能性があるのは $(x,y)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\,\pm\dfrac{1}{2}\right)$（複号任意）の 4 個のときであり，これらは $y(1+x^2+y^2) \fallingdotseq 0$ をみたすから問題に適する．

そこで，これらの点での y'' の符号を調べる．そのために

$$y(1+x^2+y^2)y' = x(1-x^2-y^2)$$

の両辺をもう一度微分すると

$$(y'+2xy+x^2y'+3y^2y')y' + y(1+x^2+y^2)y'' = 1-3x^2-y^2-2xyy'$$

であり，上記の点で考えるから $y'=0$ および $x^2+y^2=1$ とすれば

$$2yy'' = -2x^2 \qquad \therefore\ y'' = -\frac{x^2}{y}$$

となる．ゆえに

$$(x,y) = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\,\frac{1}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad y'' = -\frac{3}{2} < 0$$

$$(x,y) = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\,-\frac{1}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad y'' = \frac{3}{2} > 0$$

が成り立つから，陰関数 $y=y(x)$ は $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で極大値 $y=\dfrac{1}{2}$，$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で極小値 $y=-\dfrac{1}{2}$ をとる．

（解答終）

陰関数は曲線をいくつかのグラフに分けて考えているので，上のように同じ x の値で極大値と極小値をとることもあるから注意すること．今回の曲線で言えば $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$ は x 軸に関して対称なので，概形を描いてみれば当然なことではある．面積の単元でも扱ったが，この曲線は $r^2 = 2\cos 2\theta$ と極座標で表されるので，対称性と上の結果とも合わせればかなり正確な概形を描くことができるはずである．

例題 7.10.　次の方程式の定める陰関数 $z = z(x, y)$ の偏導関数をすべて求めよ．

(1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xy = 1$　　(2) $z + x = \sin(z + y)$

（解答）

(1)　z を x と y についての関数と見て，方程式の両辺を x で偏微分すると

$$3x^2 + 0 + 3z^2 z_x - 3y = 0 \qquad \therefore\ z^2 z_x = -x^2 + y$$

となる．同様に y で偏微分して

$$0 + 3y^2 + 3z^2 z_y - 3x = 0 \qquad \therefore\ z^2 z_y = x - y^2$$

となる．よって，$z \fallingdotseq 0$ ならば

$$z_x = \frac{-x^2 + y}{z^2}, \qquad z_y = \frac{x - y^2}{z^2}$$

である．

(2)　z を x と y についての関数と見て，方程式の両辺を x で偏微分すると

$$z_x + 1 = \cos(z + y) \cdot z_x \qquad \therefore\ \{\cos(z + y) - 1\} z_x = 1$$

となる．同様に y で偏微分して

$$z_y = \cos(z + y) \cdot (z_y + 1) \qquad \therefore\ \{1 - \cos(z + y)\} z_y = \cos(z + y)$$

となる．よって，$\cos(z + y) \fallingdotseq 1$ ならば

$$z_x = \frac{1}{\cos(z + y) - 1}, \qquad z_y = \frac{\cos(z + y)}{1 - \cos(z + y)}$$

である．

（解答終）

例題 7.11.　曲面 $xy^2 + yz^2 + zx^2 = 4$ の点 $(0, 1, 2)$ における接平面の方程式を求めよ．

（解答）　z を x と y についての関数と見て，方程式の両辺を x で偏微分すると

$$y^2 + 2yzz_x + x^2 z_x + 2xz = 0 \qquad \therefore\ (x^2 + 2yz) z_x = -y^2 - 2xz$$

となる．同様に y で偏微分して

$$2xy + z^2 + 2yzz_y + x^2 z_y = 0 \qquad \therefore\ (x^2 + 2yz) z_y = -z^2 - 2xy$$

となる．よって，$x^2 + 2yz \fallingdotseq 0$ ならば

$$z_x = -\frac{y^2 + 2xz}{x^2 + 2yz}, \qquad z_y = -\frac{z^2 + 2xy}{x^2 + 2yz}$$

であるから，$(x, y, z) = (0, 1, 2)$ では

$$z_x = -\frac{1 + 0}{0 + 4} = -\frac{1}{4}, \qquad z_y = -\frac{4 + 0}{0 + 4} = -1$$

となる．ゆえに，求める接平面の方程式は

$$z = 2 - \frac{1}{4}(x - 0) - (y - 1) = -\frac{1}{4}x - y + 3 \qquad \therefore\ x + 4y + 4z - 12 = 0$$

である．

（解答終）

例題 7.12. 方程式 $2x^2+y^2+3z^2-2xy+2yz-xz=7$ の定める陰関数 $z=z(x,y)$ の極値を求めよ．

（解答） z を x と y についての関数と見て，方程式の両辺を x と y でそれぞれ偏微分すれば

$$4x+6zz_x-2y+2yz_x-z-xz_x=0 \qquad \therefore\ (-x+2y+6z)z_x=z+2y-4x$$

$$2y+6zz_y-2x+2z+2yz_y-xz_y=0 \qquad \therefore\ (-x+2y+6z)z_y=2x-2y-2z$$

より，$-x+2y+6z \fallingdotseq 0$ ならば，$z_x=\dfrac{z+2y-4x}{-x+2y+6z}$，$z_y=\dfrac{2x-2y-2z}{-x+2y+6z}$ となる．

よって，$z=z(x,y)$ の停留点を求めるには $z_x=z_y=0$ と方程式より，次の連立方程式

$$\begin{cases} z+2y-4x=0 & \cdots ① \\ x-y-z=0 & \cdots ② \\ 2x^2+y^2+3z^2-2xy+2yz-xz=7 & \cdots ③ \end{cases}$$

を解けばよい．① と ② より $y=3x,\ z=-2x$ なので，③ に代入して $7x^2=7$ となり，$x=\pm 1$ である．よって，z の停留点は $(\pm 1,\pm 3,\mp 2)$（複号同順）の 2 個である．これらは $-x+2y+6z \fallingdotseq 0$ をみたす．

2 階偏導関数を求めるために

$$(-x+2y+6z)z_x=z+2y-4x$$

の両辺をさらに x で偏微分すれば

$$(-1+6z_x)z_x+(-x+2y+6z)z_{xx}=z_x-4$$

より，$z_x=0$ となる点では $z_{xx}=\dfrac{-4}{-x+2y+6z}$ となる．y で偏微分すれば

$$(2+6z_y)z_x+(-x+2y+6z)z_{xy}=z_y+2$$

より，$z_x=z_y=0$ となる点では $z_{xy}=\dfrac{2}{-x+2y+6z}$ となる．

同様に

$$(-x+2y+6z)z_y=2x-2y-2z$$

の両辺をさらに y で偏微分すれば

$$(2+6z_y)z_y+(-x+2y+6z)z_{yy}=-2-2z_y$$

より，$z_y=0$ となる点では $z_{yy}=\dfrac{-2}{-x+2y+6z}$ となる．ゆえに，停留点における z のヘッセ行列は

$$H=\begin{pmatrix} \dfrac{-4}{-x+2y+6z} & \dfrac{2}{-x+2y+6z} \\ \dfrac{2}{-x+2y+6z} & \dfrac{-2}{-x+2y+6z} \end{pmatrix}$$

である．

点 $(1,3,-2)$ では

$$\det H=\begin{vmatrix} \dfrac{4}{7} & -\dfrac{2}{7} \\ -\dfrac{2}{7} & \dfrac{2}{7} \end{vmatrix}=\frac{4}{49}>0, \qquad z_{xx}=\frac{4}{7}>0$$

より，極小となる．よって，$(x,y)=(1,3)$ のとき極小値 $z=-2$ をとる．

点 $(-1,-3,2)$ では

$$\det H=\begin{vmatrix} -\dfrac{4}{7} & \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{2}{7} & -\dfrac{2}{7} \end{vmatrix}=\frac{4}{49}>0, \qquad z_{xx}=-\frac{4}{7}<0$$

より，極大となる．よって，$(x,y)=(-1,-3)$ のとき極大値 $z=2$ をとる．

（解答終）

8　条件つき極値問題

8.1　Lagrange の未定乗数法の意味と証明

次のような問題を考える．

$$x+y=1 \text{ のとき，} x^2+y^2 \text{ の最小値を求めよ．} \tag{8.1}$$

これは条件式を $y=1-x$ と変形して y を消去すれば

$$x^2+y^2=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

となり，$x=y=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとることがわかる．

(8.1)は条件式を変形することにより，片方の変数を消去できるので簡単に解くことができる．しかし，条件式を変えて

$$2x^2+xy+3y^2=1 \text{ のとき，} f(x,y)=x^2+y^2 \text{ の最小値を求めよ．} \tag{8.2}$$

とすると，これは難しい問題となる．その理由は条件式 $2x^2+xy+3y^2=1$ を $y=\cdots$ と変形して変数を消去すると複雑な式となり，1 変数関数の極値を求める問題に帰着させても計算が容易でないからである．また，一般には条件式を $y=\cdots$ と変形できるとは限らない．

ここで，前節の陰関数定理を用いれば，条件式 $2x^2+xy+3y^2=1$ を局所的に $y=\eta(x)$ と陰関数で表し，$\eta(x)$ の具体的な形を表に出さなくても導関数などを計算できた．そこで，抽象的に y を消去することで考察することはできそうである．このように何か条件が課された場合の極大・極小を調べるために，Lagrange の未定乗数法と呼ばれる方法がある．

変数の間に関係式がある場合の関数の極値は次のように定義される．

定義 8.1. **（条件つき極大・極小）**
x と y に関する関係式 $\varphi(x,y)=0$ に対して

$$E=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \varphi(x,y)=0\,\}$$

とおき，$(a,b)\in E$ とする．関数 $f(x,y)$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して

$$f(x,y)<f(a,b) \qquad \big((x,y)\in U_\delta\big((a,b)\big)\cap E,\ (x,y)\fallingdotseq(a,b)\big)$$

が成り立つとき，条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ は点 (a,b) において**極大**であるという．また

$$f(x,y)>f(a,b) \qquad \big((x,y)\in U_\delta\big((a,b)\big)\cap E,\ (x,y)\fallingdotseq(a,b)\big)$$

が成り立つとき，条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ は点 (a,b) において**極小**であるという．

これは簡単に述べれば，(x,y) が関係式 $\varphi(x,y)=0$ をみたしながら動くときの $f(x,y)$ の極大・極小とは，定義域を E に制限したときの極大・極小ということである．

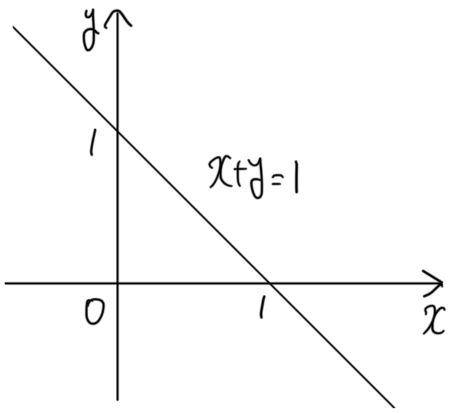
変数が独立に自由に動くのではなく関係式がある場合には，状況はもちろん単純ではない．例えば，例題 (8.1) では

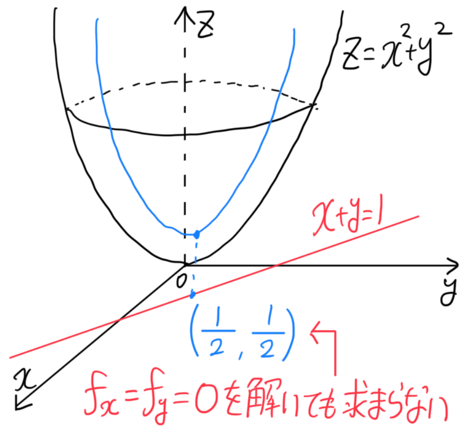
$$\varphi(x,y) = x + y - 1 = 0, \qquad f(x,y) = x^2 + y^2$$

である．$f(x,y)$ の条件つき極値を求めるのだからと，深く考えずに f の停留点を求めても

$$f_x(x,y) = 2x = 0, \qquad f_y(x,y) = 2y = 0$$

より $(x,y) = (0,0)$ となるが，これは既に求めた最小点 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ と異なる．そもそも $(0,0)$ は関係式 $x + y = 1$ をみたさないから，今回考えている問題とは何の関係もない．図形的に考えると，曲面 $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ において (x,y) が xy 平面の直線 E 上を動くと，曲面上に下図の青い曲線が現れる．曲面全体ではなくその曲線を観察して値を調べるので，上で見たように条件つき極値を実現する点では関数の停留点とは限らない．そのために $f_x = f_y = 0$ を解いても，残念ながら条件つき極値をとる点の候補にはなっていない．





前に述べたように陰関数定理を適用したいので，1 つ用語を定義しておく．

定義 8.2. （特異点）

$\varphi(x,y)$ を C^1 級関数とする．x と y に関する関係式 $\varphi(x,y) = 0$ に対して

$$\varphi(a,b) = \varphi_x(a,b) = \varphi_y(a,b) = 0$$

を満たす点 (a,b) を関係式 $\varphi(x,y) = 0$ の**特異点**という．

なぜ $\varphi_x(a,b) = \varphi_y(a,b) = 0$ となる点 (a,b) を $\varphi(x,y) = 0$ の特異点かというと，この条件下では x についても y についても陰関数定理を適用できないために，点 (a,b) の近傍で $\varphi(x,y) = 0$ の陰関数が存在するかどうかがわからないからである．点 (a,b) が特異点でなければ $\varphi_x(a,b) \neq 0$ か $\varphi_y(a,b) \neq 0$ の少なくともどちらか一方は成り立つので，陰関数を利用すれば 2 変数関数のどちらかの変数を消去できる．

なお，別の見方をすれば，点 (a,b) が $\varphi(x,y) = 0$ の特異点であるとは

$$\big(\varphi_x(a,b),\, \varphi_y(a,b)\big) = (0,0)$$

と表せる．つまり，偏導関数を並べてできる 2 次元ベクトル $\nabla\varphi(x,y) = \big(\varphi_x(x,y),\, \varphi_y(x,y)\big)$ が零ベクトルになる点を特異点といい，特異点以外では $\nabla\varphi(x,y)$ は零ベクトルではない．拘束条件が複数個である場合にはこのような視点が重要となる．

もし関係式 $\varphi(x,y) = 0$ が特異点をもつ場合には，陰関数定理が適用できないために個別に工夫する必要がある．それについては後で例題を紹介する．

定理 8.3. （Lagrange の未定乗数法）

関数 $\varphi(x,y)$ は点 (a,b) の近傍上で C^1 級で，$\varphi(a,b)=0$ であるとする．また，点 (a,b) は関係式 $\varphi(x,y)=0$ の特異点でないとする．このとき，条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) において極値をとり，かつ全微分可能であれば，ある定数 λ が存在して

$$f_x(a,b)-\lambda\varphi_x(a,b)=0, \qquad f_y(a,b)-\lambda\varphi_y(a,b)=0$$

が成り立つ．

証明. 点 (a,b) は関係式 $\varphi(x,y)=0$ の特異点でないから，$\varphi_x(a,b)\neq 0$ または $\varphi_y(a,b)\neq 0$ である．

そこで，$\varphi_y(a,b)\neq 0$ のときを示す（$\varphi_x(a,b)\neq 0$ のときも同様）．このとき，陰関数定理より $\varphi(x,y)=0$ は点 a の近傍上で C^1 級で，$b=\eta(a)$ をみたす陰関数 $y=\eta(x)$ をもつ．

この陰関数 $y=\eta(x)$ を用いて，点 a の近傍を定義域とする関数 $g(x)$ を

$$g(x)=f\bigl(x,\eta(x)\bigr)$$

で定める．仮定より $g(x)$ は $x=a$ で極値をとるから，$g'(a)=0$ が成り立つ．また，陰関数定理より

$$g'(x)=f_x\bigl(x,\eta(x)\bigr)+f_y\bigl(x,\eta(x)\bigr)\eta'(x)=f_x\bigl(x,\eta(x)\bigr)-f_y\bigl(x,\eta(x)\bigr)\,\frac{\varphi_x\bigl(x,\eta(x)\bigr)}{\varphi_y\bigl(x,\eta(x)\bigr)}$$

なので，$b=\eta(a)$ より

$$g'(a)=f_x(a,b)-\frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}\,\varphi_x(a,b)=0$$

である．そこで，定数 λ を

$$\lambda=\frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}$$

とおけば

$$f_x(a,b)-\lambda\varphi_x(a,b)=0, \qquad f_y(a,b)-\lambda\varphi_y(a,b)=0$$

が成り立つ． □

定理 8.3 の λ をラグランジュの未定乗数といい，この定理を用いて条件つき極値をとる点の候補を探す方法をラグランジュの未定乗数法という．これを実行するためには

$$f_x(a,b)-\lambda\varphi_x(a,b)=0, \qquad f_y(a,b)-\lambda\varphi_y(a,b)=0, \qquad \varphi(a,b)=0 \tag{8.3}$$

という連立方程式の解 (a,b,λ) を求める必要があるが，ここで λ も変数と考えて，新しい関数 $F(x,y,\lambda)$ を

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$$

と定義すれば，$F(x,y,\lambda)$ の偏導関数が

$$F_x(x,y,\lambda)=f_x(x,y)-\lambda\varphi_x(x,y), \qquad F_y(x,y,\lambda)=f_y(x,y)-\lambda\varphi_y(x,y), \qquad F_\lambda(x,y,\lambda)=-\varphi(x,y)$$

となることより，上の連立方程式 (8.3)は

$$F_x(a,b,\lambda)=F_y(a,b,\lambda)=F_\lambda(a,b,\lambda)=0$$

と簡単な形にまとめることができる．このように，新しく変数 λ を用意し，$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$ とおくことで，条件つき極値問題を<u>F に関する停留点を求める問題に帰着させる</u>ことがこの手法のポイントである．なお，未定乗数 λ は便宜上用いているだけのようにも見えるが，理工学系科目や統計学などの問題においては，λ の値に何らかの意味があることも少なくない．

重大な注意点はラグランジュの未定乗数法は極値をとる点の候補を求めるだけなので，**求めた点で極値や最大値・最小値をとるかどうかについては別に調べなければならない**ことである．この調べ方については一般的な手法はないので，いろいろな問題にあたって演習するしかない．ただし，条件式 $\varphi(x,y)=0$ の表す座標平面内の曲線が有界閉集合である場合にはいくらか工夫することができるので，後の例題を通して議論の流れを確認すること．

定理 8.3 の証明は計算だけでも行うことができたが，もう少し式の意味を考えてみることにする．そこで，高校数学の次の問題『$4x^2+y^2=1$ のとき，$x+y$ の最大値と最小値およびそれを与える点を求めよ』を解いてみる．

（高校流の解答）　$x+y=k$ とおくと，直線 $l\colon y=-x+k$ と楕円 $C\colon 4x^2+y^2=1$ が接する k の値を求めればよい．そこで，$4x^2+y^2=1$ の両辺を x で微分すれば $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{y}$ であるから，接点を (a,b) とおけば

$$\begin{cases} 4a^2+b^2=1 & \cdots ① \\ a+b=k & \cdots ② \\ -\dfrac{4a}{b}=-1 & \cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ．③ より $b=4a$ なので，① に代入して $20a^2=1$ より，$a=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ となる．よって

$$(a,b,k)=\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{5}},\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\quad（複号同順）$$

となる．ゆえに，$x+y$ は $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{5}},-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき最小値 $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ をとる．

（解答終）

次に，同じ問題にラグランジュの未定乗数法を適用して極値を取る点の候補を探してみる．そのために条件式を $\varphi(x,y)=4x^2+y^2-1=0$ と表し，$f(x,y)=x+y$ とおいて

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)=x+y-\lambda(4x^2+y^2-1)$$

とおき，$F(x,y,\lambda)$ の停留点を求める．偏導関数は

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=1-8\lambda x=0 & \cdots ④ \\ F_y(x,y,\lambda)=1-2\lambda y=0 & \cdots ⑤ \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=-(4x^2+y^2-1)=0 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

である．④ より $\lambda\fallingdotseq 0$ であり，④ と ⑤ より $x=\dfrac{1}{8\lambda}$，$y=\dfrac{1}{2\lambda}$ となる．これを ⑥ に代入して

$$\frac{4}{64\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}-1=\frac{5}{16\lambda^2}-1=0$$

より，$\lambda^2=\dfrac{5}{16}$ なので，$\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ である．これより

$$(x,y,\lambda)=\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{5}},\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\pm\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\quad（複号同順）$$

であり，確かに同じ点 $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{2\sqrt{5}},\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ が得られた．このことより，どうやらラグランジュの未定乗数法は $l\colon x+y=k$ と $C\colon 4x^2+y^2=1$ が接する点の座標を，k の値を表に出さずに求めていることがわかる．

なぜ接する点を求められているかについては次に解説するが，そのヒントは連立方程式 ④ と ⑤ をまとめると

$$0=\nabla F=(F_x,F_y)=(f_x-\lambda\varphi_x,f_y-\lambda\varphi_y)=(f_x,f_y)-\lambda(\varphi_x,\varphi_y)=\nabla f-\lambda\nabla\varphi$$

となるので

$$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla\varphi(x,y)$$

が成り立つような点 (x,y,λ) を求めていることにある．この関係式が表している意味を考えてみる．

条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ が極値をとる点の候補をラグランジュの未定乗数法で求められる理由を概説する．前に述べたように，ラグランジュの未定乗数法は

$$\nabla f(a,b)=\lambda\nabla\varphi(a,b), \qquad \varphi(a,b)=0$$

となる (a,b,λ) を求めていた．

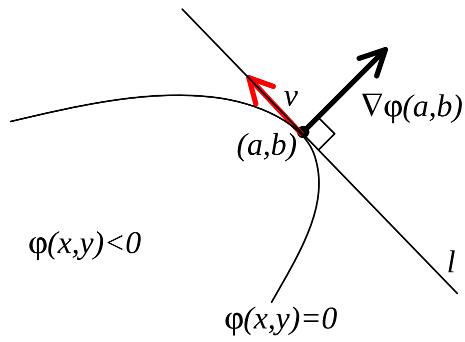
まず，関係式 $\varphi(x,y)=0$ が表す xy 平面上の曲線のパラメータ表示を $x=x(t)$, $y=y(t)$ とおく．ただし，$(x(0),y(0))=(a,b)$ とする．このとき，$\varphi\big(x(t),y(t)\big)=0$ であるから，この両辺を t について微分すれば

$$\varphi_x\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+\varphi_y\big(x(t),y(t)\big)y'(t)=0$$

より，$t=0$ として

$$\varphi_x(a,b)x'(0)+\varphi_y(a,b)y'(0)=0$$

$$\therefore\ \nabla\varphi(a,b)\cdot\big(x'(0),y'(0)\big)=0$$



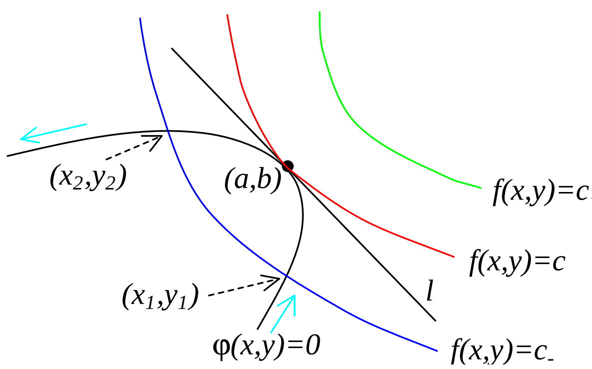
が得られる．ベクトル $\boldsymbol{v}=(x'(0),y'(0))$ は曲線 $x=x(t)$, $y=y(t)$ の点 $(x(0),y(0))=(a,b)$ における接線 l の方向ベクトルであるから，点 (a,b) における曲線 $\varphi(x,y)=0$ の接線 l とベクトル $\nabla\varphi(a,b)$ が垂直であることがわかる（関係式 $\varphi(x,y)=0$ が特異点をもたないから，$\nabla\varphi(a,b)$ は零ベクトルではないことに注意せよ）．また，ここでは理由は省略するが，ベクトル $\nabla\varphi(a,b)$ は領域 $\varphi(x,y)<0$ から領域 $\varphi(x,y)>0$ へ進む向き（つまり関数 $\varphi(x,y)$ の値が増える向き）となる．

次に，$c=f(a,b)$ とおく．このとき，xy 平面上の曲線 $f(x,y)=c$ は座標平面内の点 (a,b) を通り，さらに xyz 空間内の曲面 $z=f(x,y)$ の $z=c$ での等高線を表している（厳密に言えば，例えば $f(x,y)$ が定数関数の場合には $f(x,y)=c$ が幅をもつので曲線とは限らないが，本質の理解のためには気にしなくてよい）．上と同様にして，点 (a,b) における等高線 $f(x,y)=c$ の接線とベクトル $\nabla f(a,b)$ が垂直であることがわかる（$\nabla f(a,b)$ は零ベクトルかもしれないが，とりあえず零ベクトルでない場合を考えていると思ってよい）．

以上のことから $\nabla f(a,b)=\lambda\nabla\varphi(a,b)$ ならば，$\nabla f(a,b)$ と $\nabla\varphi(a,b)$ は平行なので，点 (a,b) における等高線 $f(x,y)=c$ の接線の方向ベクトルと曲線 $\varphi(x,y)=0$ の接線の方向ベクトルも平行となる．よって，点 (a,b) でこの 2 曲線は共通接線をもち，接することがわかる．

例えば，$c_-<c<c_+$ とし，曲面 $z=f(x,y)$ のある等高線が右図のようになったとする．このとき

- 等高線 $f(x,y)=c_+$ と曲線 $\varphi(x,y)=0$ が共有点をもたないので，$\varphi(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ が c_+ という値をとらないから，c_+ は極値ではない．
- 等高線 $f(x,y)=c_-$ と曲線 $\varphi(x,y)=0$ は接さず交わっている．そこで，曲線 $\varphi(x,y)=0$ 上を青い矢印の方向に動いてみると，点 (x_1,y_1) は $f(x,y)$ の値が増加している途中の通過点であり，点 (x_2,y_2) は $f(x,y)$ の値が減少している途中の通過点である．このように等高線をまたいでいれば，曲面 $z=f(x,y)$ において坂の途中の点となり，c_- は極値でない．



ゆえに，等高線 $f(x,y)=c$ と曲線 $\varphi(x,y)=0$ が接する点 (a,b) が条件つき極値をとる点の候補である．実際，右上の図では曲線 $\varphi(x,y)=0$ 上を青い矢印の方向に動いてみると，$f(x,y)$ の値が増加していながら $f(a,b)=c$ に到達し，それ以降は $f(x,y)$ の値は減少していく（曲線 $\varphi(x,y)=0$ が領域 $f(x,y)\leqq c$ に含まれている）．したがって，$\varphi(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ は点 (a,b) で極大値 $f(a,b)=c$ をとることがわかる．

ただし，等高線 $f(x,y)=c$ と曲線 $\varphi(x,y)=0$ が接するからといってそこで極値をとるとは限らない．例えば $y=x^3$ と $y=0$ は原点で接するが互いに交差しており右上図のような関係にならない．このように，ラグランジュの未定乗数法は曲面の等高線と条件式の定める曲線が接する点を探し出しているにすぎないので，あくまで**極値をとる点の候補**を簡単に探すための方法でしかないことは意識しておくこと．

なお，ラグランジュの未定乗数法は 3 変数以上の関数の場合でも同様なものが成り立つ．以下では関数は n 変数とし，点を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と，関数を $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とも表すことにする．

定義 8.4. （特異点）

$\varphi(\boldsymbol{x})$ を C^1 級関数とする．関係式 $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ に対して

$$\varphi(\boldsymbol{a}) = \varphi_{x_1}(\boldsymbol{a}) = \varphi_{x_2}(\boldsymbol{a}) = \cdots = \varphi_{x_n}(\boldsymbol{a}) = 0$$

を満たす点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を関係式 $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ の**特異点**という．

定理 8.5. （Lagrange の未定乗数法）

関数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a}$ の近傍上で C^1 級で，$\varphi(\boldsymbol{a}) = 0$ であるとする．また，点 $\boldsymbol{a}$ は関係式 $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ の特異点でないとする．このとき，条件 $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ のもとで関数 $f(\boldsymbol{x})$ が点 $\boldsymbol{a}$ において極値をとり，かつ全微分可能であれば，ある定数 λ が存在して

$$f_{x_j}(\boldsymbol{a}) - \lambda\varphi_{x_j}(\boldsymbol{a}) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つ．

証明． 点 $\boldsymbol{a}$ は関係式 $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ の特異点でないから，$\varphi_{x_j}(\boldsymbol{a}) \neq 0$ となる j が存在する．

そこで，$\varphi_{x_n}(\boldsymbol{a}) \neq 0$ のときを示す．このとき，陰関数定理より $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ は点 $\boldsymbol{a}' = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ の近傍上で C^1 級で $a_n = \eta(\boldsymbol{a}')$ をみたす陰関数 $x_n = \eta(\boldsymbol{x}') = \eta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ をもつ．

この陰関数 $x_n = \eta(\boldsymbol{x}')$ を用いて，$n-1$ 変数関数 $g(\boldsymbol{x}') = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ を

$$g(\boldsymbol{x}') = f\bigl(\boldsymbol{x}', \eta(\boldsymbol{x}')\bigr) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \eta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}))$$

で定める．仮定より $g(\boldsymbol{x}')$ は $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a}'$ で極値をとるから，$g_{x_j}(\boldsymbol{a}') = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ が成り立つ．また

$$g_{x_j}(\boldsymbol{x}') = f_{x_j}\bigl(\boldsymbol{x}', \eta(\boldsymbol{x}')\bigr) + f_{x_n}\bigl(\boldsymbol{x}', \eta(\boldsymbol{x}')\bigr)\eta_{x_j}(\boldsymbol{x}') = f_{x_j}\bigl(\boldsymbol{x}', \eta(\boldsymbol{x}')\bigr) - f_{x_n}\bigl(\boldsymbol{x}', \eta(\boldsymbol{x}')\bigr)\,\frac{\varphi_{x_j}\bigl(\boldsymbol{x}', \eta(\boldsymbol{x}')\bigr)}{\varphi_{x_n}\bigl(\boldsymbol{x}', \eta(\boldsymbol{x}')\bigr)}$$

なので，$a_n = \eta(\boldsymbol{a}')$ と $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}', a_n)$ より

$$g_{x_j}(\boldsymbol{a}') = f_{x_j}(\boldsymbol{a}) - \frac{f_{x_n}(\boldsymbol{a})}{\varphi_{x_n}(\boldsymbol{a})}\,\varphi_{x_j}(\boldsymbol{a}) = 0$$

である．そこで，定数 λ を

$$\lambda = \frac{f_{x_n}(\boldsymbol{a})}{\varphi_{x_n}(\boldsymbol{a})}$$

とおけば

$$f_{x_j}(\boldsymbol{a}) - \lambda\varphi_{x_j}(\boldsymbol{a}) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つ． □

つまり，n 変数関数 $f(\boldsymbol{x})$ の $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ のもとでの極値をとる点の候補は，$\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ が特異点をもたなければ，$n+1$ 変数関数

$$F(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) - \lambda\varphi(\boldsymbol{x})$$

の停留点を $F_{x_1} = F_{x_2} = \cdots = F_{x_n} = F_\lambda = 0$ を解いて求めればよい．また，もし関係式 $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ が特異点をもつ場合には，その点においてはラグランジュの未定乗数法は適用できないので，個別に調べなければならない．

応用上よく用いるので，特に 3 変数関数の場合を述べておく．関数 $f(x, y, z)$ の $\varphi(x, y, z) = 0$ のもとでの極値をとる点の候補は，関係式 $\varphi(x, y, z) = 0$ が特異点をもたなければ

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda\varphi(x, y, z)$$

とおき，4 変数関数 $F(x, y, z, \lambda)$ の停留点を

$$F_x(x, y, z, \lambda) = F_y(x, y, z, \lambda) = F_z(x, y, z, \lambda) = F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0$$

を解いて求めればよい．計算練習も兼ねて 3 変数関数の場合に上の証明を具体的に書いてみることを勧める．

もし拘束条件式が複数ある場合，例えば 3 変数関数 $f(x,y,z)$ の $\varphi(x,y,z)=\psi(x,y,z)=0$ のもとでの極値をとる点の候補を求めるためには，$\varphi(x,y,z)=\psi(x,y,z)=0$ が特異点をもたなければ，ラグランジュの未定乗数を 2 個設定して

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)-\lambda\varphi(x,y,z)-\mu\psi(x,y,z)$$

の停留点を求めればよい．ただし，特異点の定義が複雑になるので，ここでは結果のみを紹介することにする．前と同様に関数は n 変数とし，点を $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ と，関数を $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ とも表すことにする．

定義 8.6. （関数の勾配）

C^1 級関数 $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ に対して

$$\nabla f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\big(f_{x_1}(x_1,x_2,\dots,x_n),\ f_{x_2}(x_1,x_2,\dots,x_n),\ \dots,\ f_{x_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)\big)$$

を関数 $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ の**勾配**という．$\nabla f(\boldsymbol{x})$ は $\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{x})$ とも表される．

定義 8.7. （複数個の関数に関する特異点）

m 個の関数 $\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_m(\boldsymbol{x})$ を C^1 級とする．このとき，点 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ について

$$\varphi_1(\boldsymbol{a})=\varphi_2(\boldsymbol{a})=\cdots=\varphi_m(\boldsymbol{a})=0$$

かつ，m 本の n 次元ベクトル

$$\nabla\varphi_1(\boldsymbol{a}),\ \nabla\varphi_2(\boldsymbol{a}),\ \dots,\ \nabla\varphi_m(\boldsymbol{a})$$

が 1 次従属であるようなとき，点 $\boldsymbol{a}$ を関係式 $\varphi_1(\boldsymbol{x})=\varphi_2(\boldsymbol{x})=\cdots=\varphi_m(\boldsymbol{x})=0$ の**特異点**という．

n 次元ベクトルの 1 次独立・1 次従属について，ここではその定義や具体的な判定法については述べない．線形代数の講義や参考書を参照すること．一般的には，勾配ベクトルを並べたヤコビ行列の階数を調べて判定する．

定理 8.8. （Lagrange の未定乗数法）

関数 $\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_m(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ の近傍で C^1 級で，$\varphi_1(\boldsymbol{a})=\varphi_2(\boldsymbol{a})=\cdots=\varphi_m(\boldsymbol{a})=0$ であるとする．また，点 $\boldsymbol{a}$ は関係式 $\varphi_1(\boldsymbol{x})=\varphi_2(\boldsymbol{x})=\cdots=\varphi_m(\boldsymbol{x})=0$ の特異点でないとする．このとき，条件 $\varphi_1(\boldsymbol{x})=\varphi_2(\boldsymbol{x})=\cdots=\varphi_m(\boldsymbol{x})=0$ のもとで，関数 $f(\boldsymbol{x})$ が点 $\boldsymbol{a}$ において極値をとり，かつ全微分可能であれば，ある定数 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ が存在して

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})=0 \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

が成り立つ．

実際に計算するときには，前と同様に

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

とおき，この $n+m$ 変数関数 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$ の停留点を求めればよい．つまり，関係式の本数と同じ個数の未定乗数を用意すれば，関係式が 1 本の場合と同様な計算になる．ただし，関係式 $\varphi_1(\boldsymbol{x})=\varphi_2(\boldsymbol{x})=\cdots=\varphi_m(\boldsymbol{x})=0$ が特異点をもつ場合には，その点は別に考えなければならないことに注意すること．

8.2　条件式が定める図形が有界閉集合である場合の最大値・最小値の計算例

例題 8.9.　条件 $x^2+y^2=2$ のもとで，関数 $f(x,y)=xy$ の最大値と最小値を求めよ．

（解答）　曲線 $C\colon \varphi(x,y)=x^2+y^2-2=0$ は円なので有界閉集合で，$f(x,y)=xy$ は連続なので，C 上で $f(x,y)$ の最大値と最小値が存在する．

また，$\varphi_x(x,y)=2x$, $\varphi_y(x,y)=2y$ より，$\varphi_x=\varphi_y=0$ となるのは $(x,y)=(0,0)$ のときのみであるが，これは $\varphi(0,0)=-2\fallingdotseq 0$ より条件式をみたさない．よって，関係式 $\varphi(x,y)=0$ は特異点をもたない．

ゆえに，最大値・最小値は極値でもあるから，ラグランジュの未定乗数法より

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)=xy-\lambda(x^2+y^2-2)$$

とおき

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=y-2\lambda x=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=x-2\lambda y=0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=-(x^2+y^2-2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} -2\lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots ① \\ x^2+y^2=2 & \cdots ② \end{cases}$$

を解いて $f(x,y)$ が最大・最小となる点を求めればよい．ここで，$(x,y)=(0,0)$ が ② をみたさないので，これらをすべてみたす (x,y) が存在するためには ① が非自明な解をもたなければならない．もし ① の係数行列が正則ならば，$(x,y)=(0,0)$ のみが解となり適さないから，係数行列の行列式について

$$\begin{vmatrix} -2\lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{vmatrix}=4\lambda^2-1=0$$

より，$\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$ となる必要がある．

(i) $\lambda=\dfrac{1}{2}$ のとき，① は

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$y=x$ となる．これを ② に代入して解けば，$(x,y)=(1,1),(-1,-1)$ である．

(ii) $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ のとき，① は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$y=-x$ となる．これを ② に代入して解けば，$(x,y)=(1,-1),(-1,1)$ である．

ゆえに，この 4 個の点が極値をとる可能性がある点であり，これらの点での $f(x,y)$ の値は

$$f(1,1)=f(-1,-1)=1, \qquad f(1,-1)=f(-1,1)=-1$$

である．したがって，この中の最大値と最小値を選べば，条件 $x^2+y^2=2$ のもとで $f(x,y)$ は

- $(x,y)=(1,1),(-1,-1)$ のとき最大値 1
- $(x,y)=(1,-1),(-1,1)$ のとき最小値 -1

をとる．

（解答終）

前にも述べたが，ラグランジュの未定乗数法は極値をとる点の候補しか与えないので，それが極値であること（この例題では最大値・最小値であること）の根拠をきちんと述べなければならない．今回は条件式の定める曲線が有界閉集合なので，「有界閉集合上の連続関数は必ず最大値と最小値をとる」という事実を利用した．

なお，$x^2+y^2=2$ を $x=\sqrt{2}\cos t$, $y=\sqrt{2}\sin t$ と媒介変数表示して 1 変数関数の極値問題に帰着させてもよい．ただし，ラグランジュの未定乗数法の練習もしておくこと．

例題 8.10.　条件 $x^2+y^2=4$ のもとで，関数 $f(x,y)=(x^3+8)y$ の最大値と最小値を求めよ．

（解答）　曲線 $C\colon \varphi(x,y)=x^2+y^2-4=0$ は円なので有界閉集合で，$f(x,y)=(x^3+8)y$ は連続なので，C 上で $f(x,y)$ の最大値と最小値が存在する．

また，$\varphi_x(x,y)=2x,\ \varphi_y(x,y)=2y$ より，$\varphi_x=\varphi_y=0$ となるのは $(x,y)=(0,0)$ のときのみであるが，これは $\varphi(0,0)=-4\fallingdotseq 0$ より条件式をみたさない．よって，関係式 $\varphi(x,y)=0$ は特異点をもたない．

ゆえに，最大値・最小値は極値でもあるから，ラグランジュの未定乗数法より

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)=(x^3+8)y-\lambda(x^2+y^2-4)$$

とおき

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=3x^2y-2\lambda x=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=x^3+8-2\lambda y=0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=-(x^2+y^2-4)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(3xy-2\lambda)=0 & \cdots ① \\ x^3+8-2\lambda y=0 & \cdots ② \\ x^2+y^2=4 & \cdots ③ \end{cases}$$

を解いて $f(x,y)$ が極値をとる候補の点を求めればよい．① より $x=0$ または $3xy-2\lambda=0$ である．

(i) $x=0$ のとき

③ に代入すれば，$y^2=4$ より $y=\pm 2$ であり，② より $(x,y,\lambda)=(0,\pm 2,\pm 2)$（複号同順）である．

(ii) $3xy-2\lambda=0$ のとき

$\lambda=\dfrac{3xy}{2}$ を ② に代入すれば，$x^3-3xy^2+8=0$ となる．ここで ③ より $y^2=4-x^2$ なので

$$x^3-3x(4-x^2)+8=4x^3-12x+8=4(x-1)^2(x+2)=0$$

となるから，$x=1,-2$ である．

- $x=1$ のときは，$y^2=3$ より $y=\pm\sqrt{3}$ で，$(x,y,\lambda)=\left(1,\pm\sqrt{3},\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$（複号同順）となる．
- $x=2$ のときは，$y^2=0$ より $y=0$ で，$(x,y,\lambda)=(-2,0,0)$ となる．

よって，5 個の点

$$(x,y)=(0,2),\ (0,-2),\ (1,\sqrt{3}),\ (1,-\sqrt{3}),\ (-2,0)$$

が極値をとる可能性がある点であり，これらの点での $f(x,y)$ の値は

$$f(0,2)=16,\qquad f(0,-2)=-16,\qquad f(1,\sqrt{3})=9\sqrt{3},\qquad f(1,-\sqrt{3})=-9\sqrt{3},\qquad f(-2,0)=0$$

である．したがって，この中の最大値と最小値を選べば，条件 $x^2+y^2=4$ のもとで $f(x,y)$ は

- $(x,y)=(0,2)$ のとき最大値 16
- $(x,y)=(0,-2)$ のとき最小値 -16

をとる．

（解答終）

よくラグランジュの未定乗数法の例題として行列や行列式を利用しているものが挙げられているが，それはたまたまその解法が有効だからである．一般的には x と y の連立 1 次方程式が現れるとは限らないので，その場合には普通に連立方程式を解くことになる．

通常ではラグランジュの未定乗数法を適用する際には，**偏微分の計算よりもどのように連立方程式を解くかが難しいことが多い**．安易に方程式を 2 乗したり変数をかけたりしてしまうと，連立方程式の変形として同値性が崩れてしまい不要な解が出てくることもある．また，文字式で割る際に 0 かどうかを気にしないと，必要な解が得られないことも少なくない．とにかく連立方程式の解を正しく得られるように計算練習すること．

例題 8.11.　条件 $2x^2-3xy+2y^2=1$ のもとで，関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ の最大値と最小値を求めよ．

(解答)　曲線 $C\colon \varphi(x,y)=2x^2-3xy+2y^2-1=0$ の方程式は $2\left(x-\dfrac{3y}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}y^2=1$ と変形できる．よって，$y^2\leqq\dfrac{8}{7}$ かつ $\left(x-\dfrac{3y}{4}\right)^2\leqq\dfrac{1}{2}$ より C は有界であり，$\varphi(x,y)$ は連続関数だから第 8 章定理 3.14 より C は閉集合である．さらに，$f(x,y)=x^2+y^2$ は連続なので，有界閉集合 C 上で $f(x,y)$ の最大値と最小値が存在する．

また，$\varphi_x(x,y)=4x-3y$, $\varphi_y(x,y)=-3x+4y$ より，$\varphi_x=\varphi_y=0$ となるのは $(x,y)=(0,0)$ のときのみであるが，これは $\varphi(0,0)=-1\neq 0$ より条件式をみたさない．よって，関係式 $\varphi(x,y)=0$ は特異点をもたない．

ゆえに，最大値・最小値は極値でもあるから，ラグランジュの未定乗数法より

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)=x^2+y^2-\lambda(2x^2-3xy+2y^2-1)$$

とおき

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=2x-\lambda(4x-3y)=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=2y-\lambda(-3x+4y)=0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=-(2x^2-3xy+2y^2-1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} 2-4\lambda & 3\lambda \\ 3\lambda & 2-4\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots ① \\ 2x^2-3xy+2y^2=1 & \cdots ② \end{cases}$$

を解いて $f(x,y)$ が最大・最小となる点を求めればよい．ここで，$(x,y)=(0,0)$ が ② をみたさないので，これらをすべてみたす (x,y) が存在するためには ① が非自明な解をもたなければならない．もし ① の係数行列が正則ならば $(x,y)=(0,0)$ のみが解となり適さないから，係数行列の行列式について

$$\begin{vmatrix} 2-4\lambda & 3\lambda \\ 3\lambda & 2-4\lambda \end{vmatrix}=7\lambda^2-16\lambda+4=(7\lambda-2)(\lambda-2)=0$$

より，$\lambda=2,\dfrac{2}{7}$ となる必要がある．

(i) $\lambda=2$ のとき，① は

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$y=x$ となる．これを ② に代入して解けば，$(x,y)=(1,1),(-1,-1)$ である．

(ii) $\lambda=\dfrac{2}{7}$ のとき，① は

$$\begin{pmatrix} 6/7 & 6/7 \\ 6/7 & 6/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$y=-x$ となる．これを ② に代入して解けば，$(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}},-\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt{7}},\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)$ である．

ゆえに，この 4 個の点が極値をとる可能性がある点であり，これらの点での $f(x,y)$ の値は

$$f(1,1)=f(-1,-1)=2,\qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{7}},-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=\frac{2}{7}$$

である．したがって，この中の最大値と最小値を選べば，条件 $2x^2-3xy+2y^2=1$ のもとで $f(x,y)$ は

- $(x,y)=(1,1),(-1,-1)$ のとき最大値 2
- $(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}},-\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt{7}},\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)$ のとき最小値 $\dfrac{2}{7}$

をとる．

(解答終)

曲線 $C\colon 2x^2-3xy+2y^2=1$ が表す図形は楕円であることが，線形代数の知識よりわかる．例えば，2 次曲線に対応する実対称行列の固有値が 2 個とも正なので，この曲線は楕円を回転させたものだから有界閉集合であると結論づけてもよい．むしろ本来はその方が自然である．

例題 8.12.　条件 $x^2+y^2+z^2=1$ のもとで，関数 $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ の最大値と最小値を求めよ．

（解答）　曲面 $S\colon \varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ は球面だから有界閉集合で，$f(x,y,z)=xy+yz+zx$ は連続なので，S 上で $f(x,y,z)$ の最大値と最小値が存在する．

また，$\varphi_x(x,y,z)=2x$, $\varphi_y(x,y,z)=2y$, $\varphi_z(x,y,z)=2z$ より，$\varphi_x=\varphi_y=\varphi_z=0$ となるのは $(x,y,z)=(0,0,0)$ のときのみであるが，これは $\varphi(0,0,0)=-1\fallingdotseq 0$ より条件式をみたさない．よって，関係式 $\varphi(x,y,z)=0$ は特異点をもたない．

ゆえに，最大値・最小値は極値でもあるから，ラグランジュの未定乗数法より

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda\varphi(x,y,z)=xy+yz+zx-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

とおき

$$\begin{cases} F_x(x,y,z,\lambda)=y+z-2\lambda x=0 \\ F_y(x,y,z,\lambda)=x+z-2\lambda y=0 \\ F_z(x,y,z,\lambda)=x+y-2\lambda z=0 \\ F_\lambda(x,y,z,\lambda)=-(x^2+y^2+z^2-1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots ① \\ x^2+y^2+z^2=1 & \cdots ② \end{cases}$$

を解いて $f(x,y,z)$ が最大・最小となる点を求めればよい．ここで，$(x,y,z)=(0,0,0)$ が ② をみたさないので，これらをすべてみたす (x,y,z) が存在するためには ① が非自明な解をもたなければならない．もし ① の係数行列が正則ならば $(x,y,z)=(0,0,0)$ のみが解となり適さないから，係数行列の行列式について

$$\begin{vmatrix} -2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{vmatrix}=-8\lambda^3+6\lambda+2=-2(\lambda-1)(4\lambda^2+4\lambda+1)=-2(\lambda-1)(2\lambda+1)^2=0$$

より，$\lambda=1,-\dfrac{1}{2}$ となる必要がある．

(i) $\lambda=1$ のとき，係数行列を行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$x=y=z$ となる．これを ② に代入して解けば，$(x,y,z)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$（複号同順）である．このときの値は

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=1$$

(ii) $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ のとき，① より $x+y+z=0$ である．このとき

$$1=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=0^2-2f(x,y,z)=-2f(x,y,z)$$

より，$f(x,y,z)=-\dfrac{1}{2}$ となる．

ゆえに，上記の点が極値をとる可能性がある点であり，これらの点での $f(x,y,z)$ の値も上の通りである．したがって，この中の最大値と最小値を選べば，条件 $x^2+y^2+z^2=1$ のもとで $f(x,y,z)$ は

- $(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき最大値 1
- (x,y,z) が $x+y+z=0$ かつ $x^2+y^2+z^2=1$ をみたすとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$

をとる．

（解答終）

例題 8.13. 半径 r の球に内接する直方体の体積のとりうる値の最大値を求めよ．

（解答） 半径 r の球面は $x^2+y^2+z^2=r^2$ と表せる．このとき，直方体の面の 1 つが xy 平面と平行になるように座標を設定しても一般性を失わない．そこで，頂点の 1 つの座標を (a,b,c) $(a,b,c>0)$ とおけば，$a^2+b^2+c^2=r^2$ であり，直方体の体積 V は $V=(2a)(2b)(2c)=8abc$ となる．もし a,b,c のいずれかが 0 のときは $V=0$ とみなせば明らかに最大値とはならないから，次の条件つきの最大値問題

『条件 $x^2+y^2+z^2=r^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$ のもとで,$V=8xyz$ の最大値を求めよ』

を解けばよいことになる．

まず，条件 $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r^2=0,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$ の表す図形は半径 r の球面の 1 部分で，その境界を全て含むから有界閉集合である．また，$V=8xyz$ は連続関数であるから，与えられた条件の下で V は最大値と最小値をとり，最小値は明らかに x,y,z のいずれかが 0 であるときの $V=0$ である．

また，$\varphi_x(x,y,z)=2x,\ \varphi_y(x,y,z)=2y,\ \varphi_z(x,y,z)=2z$ より，$\varphi_x=\varphi_y=\varphi_z=0$ となるのは $(0,0,0)$ のときのみであるが，これは $\varphi(0,0,0)=-r^2\neq 0$ より条件式をみたさない．よって，関係式 $\varphi(x,y,z)=0$ は特異点をもたない．

ゆえに，最大値は極値でもあるから，ラグランジュの未定乗数法より

$$F(x,y,z,\lambda)=V-\lambda\varphi(x,y,z)=8xyz-\lambda(x^2+y^2+z^2-r^2)$$

とおき

$$\begin{cases} F_x(x,y,z,\lambda)=8yz-2\lambda x=0 & \cdots ① \\ F_y(x,y,z,\lambda)=8xz-2\lambda y=0 & \cdots ② \\ F_z(x,y,z,\lambda)=8xy-2\lambda z=0 & \cdots ③ \\ F_\lambda(x,y,z,\lambda)=-(x^2+y^2+z^2-r^2)=0 & \cdots ④ \end{cases}$$

を解いて V が最大となる点を求めればよい．

ここで，x,y,z のうちどれかが 0 だと $V=0$ であったから，$x>0,\ y>0,\ z>0$ のもとで連立方程式を解けばよい．このとき，① と ② から λ を消去すれば

$$\lambda=\frac{4yz}{x}=\frac{4xz}{y} \qquad \Longrightarrow \qquad x^2=y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x=y$$

であり，同様に ② と ③ から $y=z$ が得られる．よって，$x=y=z$ であるから，④ より $x=y=z=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$ となる．このとき $\lambda=\dfrac{4r}{\sqrt{3}}$ であるから，確かに連立方程式は解をもつ．

したがって，$x=y=z=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$ のとき，つまり内接する直方体が立方体のときに体積 V は最大となり，そのときの値は $V=\dfrac{8r^3}{3\sqrt{3}}$ である．

（解答終）

上の例題では図形的には対称性から立方体の場合に最大となることは予想できるが，それを図だけで説明するのは案外難しい．このような幾何学的な問題に関しても問題を解析的に上手く設定すれば，この問題の解『最大値をとる直方体が存在すること』が証明でき，さらにラグランジュの未定乗数法を利用することで簡単に計算できる．もしこの例題で球面を楕円面に変えるだけでも図形的なアプローチは困難になるので，微分計算の威力を実感できる問題である．

なお，最大値を求めるだけなら相加相乗平均を利用すれば

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\leqq\frac{x^2+y^2+z^2}{3}=\frac{r^2}{3} \qquad \therefore\ xyz\leqq\frac{r^3}{3\sqrt{3}}$$

であり，等号は $x^2=y^2=z^2$ のときであるから，上の解答と同じになる．

例題 8.14. $D = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1 \}$ における関数

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + 2x + y$$

の最大値と最小値を求めよ．

（解答） D は有界閉集合で $f(x,y)$ は D 上で連続であるから，D における $f(x,y)$ の最大値・最小値が存在する．最大・最小となる点は，もし D の内部に存在するならば $f(x,y)$ の停留点であり，D の境界に存在するならば条件つき極値問題の極値を実現する点である．

(i) $f(x,y)$ の D の内部 $\mathrm{Int}\, D = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 < 1 \}$ における停留点を求める．

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 2 = 0, \qquad f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 1 = 0$$

より

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{x}{2} = y$$

となるから，$x = 2y$ を代入して $\sqrt{1-5y^2} = y$ より $y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ となる．

よって，D の内部の停留点は $(x,y) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}} \right)$ の 1 個である．

(ii) D の境界 $C\colon \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとで $f(x,y) = 2x + y$ が最大値・最小値をとりうる点の候補を求める．ここで $\varphi_x(x,y) = 2x$, $\varphi_y(x,y) = 2y$ より，$\varphi_x = \varphi_y = 0$ となるのは $(x,y) = (0,0)$ のときのみであるが，これは $\varphi(0,0) = -1 \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$ より条件式をみたさないから，関係式 $\varphi(x,y) = 0$ は特異点をもたない．

よって，最大値・最小値は極値でもあるから，ラグランジュの未定乗数法より

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y) = 2x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

とおき，連立方程式

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = 2 - 2\lambda x = 0 & \cdots ① \\ F_y(x,y,\lambda) = 1 - 2\lambda y = 0 & \cdots ② \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = -(x^2 + y^2 - 1) = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

を解けばよい．① と ② より $\lambda \neq 0$ で，$x = \dfrac{1}{\lambda}$, $y = \dfrac{1}{2\lambda}$ である．これを ③ に代入すれば

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = \frac{5}{4\lambda^2} - 1 = 0$$

より，$\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ なので，$(x,y,\lambda) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{\sqrt{5}}{2} \right), \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{\sqrt{5}}{2} \right)$ が得られる．

ゆえに，上で求めた 3 個の点が最大値・最小値をとる可能性がある点であり，これらの点での $f(x,y)$ の値は

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = \sqrt{6}, \qquad f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \sqrt{5}, \qquad f\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = -\sqrt{5}$$

である．したがって，この中の最大値と最小値を選べば，D 上で $f(x,y)$ は

- $(x,y) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}} \right)$ のとき最大値 $\sqrt{6}$
- $(x,y) = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \right)$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$

をとる．

8.3 条件つき極値問題および非有界閉集合上の最大値・最小値の計算例

関係式の定める曲線が有界閉集合でない場合には，極値かどうかを調べるために陰関数定理を利用して 2 次導関数の符号を直接調べなければならない．そのために計算は複雑となることが多い．

例題 8.15. 条件 $x^3-3xy+y^3=0$ のもとで，関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ の極値を求めよ．

（解答） まず $\varphi(x,y)=x^3-3xy+y^3=0$ の特異点を調べる．

$$\varphi_x(x,y)=3x^2-3y=3(x^2-y), \qquad \varphi_y(x,y)=-3x+3y^2=3(y^2-x)$$

より，$\varphi_x=\varphi_y=0$ となるのは

$$y=x^2,\ x=y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^4=x \qquad \Longrightarrow \qquad x=0,1$$

より，$(x,y)=(0,0),\,(1,1)$ のときである．ここで，$\varphi(0,0)=0,\ \varphi(1,1)=-1\neq 0$ より，関係式 $\varphi(x,y)=0$ は特異点 $(0,0)$ をもつ．

点 $(0,0)$ においては，$f(0,0)=0$ は極小値かつ最小値である．実際，$(x,y)\neq(0,0)$ ならば

$$f(x,y)=x^2+y^2>0=f(0,0)$$

である．

$(x,y)\neq(0,0)$ では $\varphi(x,y)=0$ は特異点をもたないから，ラグランジュの未定乗数法が適用できる．よって

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)=x^2+y^2-\lambda(x^3-3xy+y^3)$$

とおき

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=2x-3\lambda(x^2-y)=0 & \cdots ① \\ F_y(x,y,\lambda)=2y-3\lambda(y^2-x)=0 & \cdots ② \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=-(x^3-3xy+y^3)=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

を解いて，極値をとりうる点の候補を求めればよい．

もし $x^2-y=0$ とすると，① より $x=0$ であり，$y=x^2=0$ となるから，これは $(x,y)\neq(0,0)$ に矛盾する．同様に $y^2-x=0$ とすると，② より $y=x=0$ となり矛盾する．よって，$x^2-y\neq 0,\ y^2-x\neq 0$ であるから，① と ② から λ を消去して

$$\lambda=\frac{2x}{3(x^2-y)}=\frac{2y}{3(y^2-x)} \qquad \therefore\ x(y^2-x)=y(x^2-y)$$

となる．これより

$$0=(y+1)x^2-y^2x-y^2=(x-y)(x+xy+y) \qquad \cdots ④$$

である．もし $x+xy+y=0$ とすると，$t=xy$ とおけば $x+y=-t$ であり，③ を変形すれば

$$0=(x+y)^3-3xy(x+y+1)=-t^3-3t(1-t)=-t(t^2-3t+3)=-t\left\{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}$$

から $t=0$ が得られる．しかし，このとき $x+y=xy=0$ より $x=y=0$ となるから，これは矛盾である．ゆえに，$x+xy+y\neq 0$ であるから，④ より $y=x$ が成り立つ．これを ③ に代入すれば

$$0=x^3-3x^2+x^3=x^2(2x-3) \qquad \therefore\ x=0,\ \frac{3}{2}$$

となる．しかし，$x=0$ のときは $y=0$ で矛盾であるから，結局ラグランジュの未定乗数法から得られる点は $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ の 1 個である．このとき，$\lambda=\frac{4}{3}$ である．

そこで，点 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ で $f(x, y)$ が極値をとるかどうか調べる．まず

$$\varphi_y\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \neq 0$$

であるから，陰関数定理より $\varphi(x, y) = 0$ が定める陰関数 $y = \eta(x)$ で

$$\eta\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}, \qquad \varphi\bigl(x, \eta(x)\bigr) = 0$$

となるものが存在し

$$\eta'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{\varphi_x\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)}{\varphi_y\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)} = -\frac{\dfrac{9}{4}}{\dfrac{9}{4}} = -1$$

である．また，関係式 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ を x について 2 回微分すれば

$$6x - 6y' + 6y(y')^2 + 3(y^2 - x)y'' = 0 \qquad \therefore\ y'' = -\frac{2x - 2y' + 2y(y')^2}{y^2 - x}$$

であり，これに $x = \dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{3}{2}$, $y' = -1$ を代入すれば

$$\eta''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3 + 2 + 3}{\dfrac{9}{4} - \dfrac{3}{2}} = -\frac{32}{3}$$

となる．ここで

$$g(x) = f\bigl(x, \eta(x)\bigr) = x^2 + \eta(x)^2$$

とおくと

$$g'(x) = 2x + 2\eta(x)\eta'(x), \qquad g''(x) = 2 + 2\{\eta'(x)\}^2 + 2\eta(x)\eta''(x)$$

であるから

$$g'\left(\frac{3}{2}\right) = 0, \qquad g''\left(\frac{3}{2}\right) = 2 + 2(-1)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{32}{3}\right) = -28 < 0$$

ゆえに，$g(x)$ は $x = \dfrac{3}{2}$ で極大値をとる．したがって，$x^3 - 3xy + y^3 = 0$ のもとで $f(x, y)$ は $(x, y) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ で極大となり，極大値は $f\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{2}$ である．

以上の議論より，条件 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ のもとで $f(x, y)$ は

- $(x, y) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ のとき極大値 $\dfrac{9}{2}$
- $(x, y) = (0, 0)$ のとき極小値 0

をとる．

（解答終）

一般に条件つきの極値問題で極大・極小を判別する場合には上記のような解答になる．これは条件式が定める曲線が有界閉集合の時にも同様である．ポイントは具体的な陰関数の形 $y = \eta(x)$ がわからなくても，その微分係数がわかればすべて極値かどうかの判定ができるというところである．なお，曲線 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ はデカルトの正葉線と呼ばれる．そのグラフを調べてみれば，$f(x, y)$ は原点からの距離であるから，今回求めた極値がどのような状況か視覚的に確認できる．

また，条件式の定める曲線が特異点をもつ場合にはその点は特別に考えなければならない．上の例題ではラグランジュの未定乗数法から得られる連立方程式が $(x, y) = (0, 0)$ を解にもつから，特異点のことを忘れていても答えだけは求まるがそれでは誤りである．

発展問題 8.1.　条件 $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$ のもとで，関数 $f(x, y) = x^3 + y$ の極値を求めよ．

例題 8.16.　条件 $x^2+y^2=1$ のもとで，関数 $f(x,y)=x^3+y^3$ の極値を求めよ．

（解答）　曲線 $C\colon \varphi(x,y)=x^2+y^2-1=0$ は円なので有界閉集合で，$f(x,y)=x^3+y^3$ は連続なので，C 上で最大値と最小値が存在する．

また

$$\varphi_x(x,y)=2x, \qquad \varphi_y(x,y)=2y$$

より，$\varphi_x=\varphi_y=0$ となるのは $(x,y)=(0,0)$ のときのみであるが，これは $\varphi(0,0)=-1\neq 0$ より条件式をみたさない．よって，関係式 $\varphi(x,y)=0$ は特異点をもたない．

ゆえに，ラグランジュの未定乗数法より

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)=x^3+y^3-\lambda(x^2+y^2-1)$$

とおき

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=3x^2-2\lambda x=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=3y^2-2\lambda y=0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=-(x^2+y^2-1)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(3x-2\lambda)=0 & \cdots ① \\ y(3y-2\lambda)=0 & \cdots ② \\ x^2+y^2=1 & \cdots ③ \end{cases}$$

を解いて $f(x,y)$ が極値をとる候補の点を求めればよい．

(i) $x=0$ のとき

③ に代入すれば，$y^2=1$ より $y=\pm 1$ であり，$(x,y,\lambda)=\left(0,\,1,\,\dfrac{3}{2}\right),\,\left(0,\,-1,\,-\dfrac{3}{2}\right)$ である．

(ii) $y=0$ のとき

③ に代入すれば，$x^2=1$ より $x=\pm 1$ であり，$(x,y,\lambda)=\left(1,\,0,\,\dfrac{3}{2}\right),\,\left(-1,\,0,\,-\dfrac{3}{2}\right)$ である．

(iii) $x\neq 0$ かつ $y\neq 0$ のとき

① と ② より

$$3x-2\lambda=3y-2\lambda=0 \qquad \therefore\ x=y$$

なので，③ より $(x,y,\lambda)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\,\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right),\,\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\,-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ である．

以上より，これら 6 個の点が $F(x,y,\lambda)$ の停留点である．ここで

$$f(0,1)=f(1,0)=1, \quad f(0,-1)=f(-1,0)=-1, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

である．$f(x,y)$ は最大値と最小値をもちそれらは極値でもあるから，上の計算より 1 と -1 がそれぞれ $f(x,y)$ の最大値と最小値で，このとき極大値と極小値でもある．よって，$(1,0)$ と $(0,1)$ で極大値 1，$(-1,0)$ と $(0,-1)$ で極小値 -1 をとる．

そこで，点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ と $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で $f(x,y)$ が極値をとるかどうかを調べる．まず

$$\varphi_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\neq 0, \qquad \varphi_y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}\neq 0$$

であるから，陰関数定理より $\varphi(x,y)=0$ が定める陰関数 $y=\eta_1(x),\ y=\eta_2(x)$ で

$$\eta_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi\bigl(x,\eta_1(x)\bigr)=0, \qquad \eta_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi\bigl(x,\eta_2(x)\bigr)=0$$

となるものが存在する．

関係式 $x^2+y^2=1$ を x について微分すれば

$$2x+2yy'=0 \qquad \therefore\ y'=-\frac{x}{y}$$

であり，もう一度微分して

$$2+2(y')^2+2yy''=0 \qquad \therefore\ y''=-\frac{1+(y')^2}{y}$$

となる．よって，$(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のときは

$$\eta_1'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1, \qquad \eta_1''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2\sqrt{2}$$

であり，$(x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のときは

$$\eta_2'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1, \qquad \eta_2''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}$$

となる．ここで，$j=1,2$ に対して

$$g_j(x)=f\bigl(x,\eta_j(x)\bigr)=x^3+\eta_j(x)^3$$

とおくと

$$g_j'(x)=3x^2+3\eta_j(x)^2\eta_j'(x), \qquad g_j''(x)=6x+6\eta_j(x)\{\eta_j'(x)\}^2+3\eta_j(x)^2\eta_j''(x)$$

であるから

$$g_1'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=g_2'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0, \qquad g_1''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}>0, \qquad g_2''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-3\sqrt{2}<0$$

ゆえに，$g_1(x)$ は $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で極小値をとり，$g_2(x)$ は $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ で極大値をとる．

したがって，$x^2+y^2=1$ のもとで $f(x,y)$ は

- $(x,y)=(1,0),\ (0,1)$ で極大値 1
- $(x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極大値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
- $(x,y)=(-1,0),\ (0,-1)$ で極小値 -1
- $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極小値 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

をとる．

（解答終）

条件式の定める曲線が有界閉集合であっても，ラグランジュの未定乗数法から最大値・最小値をとる点以外が得られた場合には，極値かどうかの判定のために 2 次導関数の符号を調べなければならない．

この解答では陰関数定理を利用して極大・極小を判定したが，具体的に

$$\eta_1(x)=\sqrt{1-x^2}, \qquad \eta_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$$

と表して計算してもよい．他にも $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$ と表して，θ についての関数と見て 2 階導関数の符号を調べても正しい答えが得られる．ただし，これらは条件式が簡単な曲線の場合に限るうえに，具体的に陰関数を書き下すと微分計算が複雑になることもあるので注意すること．

練習問題 8.2.　条件 $x^2-y^2=1$ のもとで，関数 $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$ の極値を求めよ．

例題 8.17. 関数 $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-(x+2y)}$ がある．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) $D=\{\,(x,y)\mid x+y\geqq 0,\ y\geqq 0\,\}$ における $f(x,y)$ の最小値を求めよ．

（解答）

(1) まず，停留点を求める．

$$f_x(x,y)=2xe^{-(x+2y)}-(x^2-y^2)e^{-(x+2y)}=(-x^2+y^2+2x)e^{-(x+2y)}=0$$
$$f_y(x,y)=-2ye^{-(x+2y)}-2(x^2-y^2)e^{-(x+2y)}=(-2x^2+2y^2-2y)e^{-(x+2y)}=0$$

より，次の連立方程式

$$\begin{cases}-x^2+y^2+2x=0\\ -x^2+y^2-y=0\end{cases}$$

を解けばよい．辺々引けば $y=-2x$ であるから，これを第 1 式に代入すれば $3x^2+2x=0$ より $x=0,-\dfrac{2}{3}$ である．よって，$f(x,y)$ の停留点は $(x,y)=(0,0),\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$ の 2 個．

また，2 階偏導関数を計算すれば

$$f_x(x,y)=2xe^{-(x+2y)}-f(x,y),\qquad f_y(x,y)=-2ye^{-(x+2y)}-2f(x,y)$$

を偏微分して

$$f_{xx}(x,y)=2(1-x)e^{-(x+2y)}-f_x(x,y)$$
$$f_{xy}(x,y)=-4xe^{-(x+2y)}-f_y(x,y)$$
$$f_{yy}(x,y)=2(2y-1)e^{-(x+2y)}-2f_y(x,y)$$

となる．

点 $(0,0)$ では，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ であるから

$$f_{xx}(0,0)=2,\qquad f_{xy}(0,0)=0,\qquad f_{yy}(0,0)=-2$$

より，ヘッシアンは

$$\det H(0,0)=\begin{vmatrix}2&0\\0&-2\end{vmatrix}=-4<0$$

となるから，極値をとらない．

点 $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$ では，$f_x\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)=f_y\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)=0$ であるから

$$f_{xx}\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{10}{3e^2},\qquad f_{xy}\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3e^2},\qquad f_{yy}\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{10}{3e^2}$$

より，ヘッシアンは

$$\det H\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\begin{vmatrix}\dfrac{10}{3e^2}&\dfrac{8}{3e^2}\\ \dfrac{8}{3e^2}&\dfrac{10}{3e^2}\end{vmatrix}=\frac{4}{9e^4}\begin{vmatrix}5&4\\4&5\end{vmatrix}=\frac{4}{e^4}>0,\qquad f_{xx}\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{10}{3e^2}>0$$

となるから，極小となる．よって，極小値 $f\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{4}{3e^2}$ をとる．

以上より，$\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$ で極小値 $-\dfrac{4}{3e^2}$ をとる．

(2)　D の点のうち $X = \{\,(x,y) \in D \mid x \geqq y \geqq 0\,\}$ 上では

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-(x+2y)} \geqq 0 \qquad (x,y) \in X$$

である．また，(1) で求めた $f(x,y)$ の極小値が負であることより，最小値をとる可能性がある点は

$$E = \{\,(x,y) \in D \mid x + y \geqq 0,\ y \geqq x\,\}$$

に属する．

ここで $(x,y) \in E$ ならば，$x + 2y = (x+y) + y \geqq y \geqq 0$ より

$$f(x,y) = x^2e^{-(x+2y)} - y^2e^{-(x+2y)} \geqq -y^2e^{-(x+2y)} \geqq -y^2e^{-y}$$

であり，さらに第 5 章命題 6.34 より

$$\lim_{y\to\infty}(-y^2e^{-y}) = \lim_{y\to\infty}\frac{-y^2}{e^y} = 0$$

より，十分大きな $R > 0$ をとれば

$$-y^2e^{-y} > -\frac{4}{3e^2} \qquad (y \geqq R)$$

が成り立つ．そこで

$$E_R = \{\,(x,y) \mid x + y \geqq 0,\ y \geqq x,\ 0 \leqq y \leqq R\,\}$$

とおけば，E_R は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は連続なので E_R において最小値をもつ．ここで，E_R の内部で最小値をとるとすればそれは極小値であるから，その候補は (1) で求めた $f\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{4}{3e^2}$ である．一方，E_R の境界では，$y = \pm x$ 上では $f(x,y) = 0$ であり，$y = R$ 上では

$$f(x,y) \geqq -y^2e^{-y} > -\frac{4}{3e^2}$$

である．ゆえに，E_R における $f(x,y)$ の最小値は $-\dfrac{4}{3e^2}$ である．

D の点のうち E_R に属さない点については，$(x,y) \in X$ ならば $f(x,y) \geqq 0$ であり，$y > R$ ならば $f(x,y) > -\dfrac{4}{3e^2}$ であるから，上で求めた $-\dfrac{4}{3e^2}$ が D 全体における $f(x,y)$ の最小値である．

（解答終）

この例題のように最大・最小を考える領域 D が有界でない場合には，そのままでは最大値・最小値の定理が適用できないので工夫が必要である．今回は関数 $f(x,y)$ が（多項式）×（負の指数をもつ指数関数）の形なので，$R = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$ のときに $f(x,y) \to 0$ となることが期待できる．そこで，この部分を丁寧に説明したのが (2) の解答である．$f(x,y)$ が 0 に収束するから十分原点から離れたところでは 0 に近い，特に (1) で求めた極小値より大きい値をとることに着目し，うまく説明をまとめること．

なお，問題になっていないが $f(x,y)$ は D において最大値をもつこともわかる．解答中の領域 X において最大となる可能性があるが，内部には停留点が存在しないことから境界で最大となるしかなく，それは x 軸上であることがわかる．同様の議論になるので，各自で求めてみよ．

発展問題 8.3.　関数 $f(x,y) = (2x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ がある．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の $\mathbb{R}^2$ における最大値を求めよ．

8.4 条件式が特異点をもつ場合の極値問題の計算例

例題 8.18. 条件 $y^2 = x^3$ のもとで，関数 $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ の極値を求めよ．

（解答） まず $\varphi(x,y) = x^3 - y^2 = 0$ の特異点を調べる．

$$\varphi_x(x,y) = 3x^2, \qquad \varphi_y(x,y) = -2y$$

より，$\varphi_x = \varphi_y = 0$ となるのは $(x,y) = (0,0)$ のときである．ここで，$\varphi(0,0) = 0$ より，関係式 $\varphi(x,y) = 0$ は特異点 $(0,0)$ をもつ．

$(x,y) \fallingdotseq (0,0)$ では $\varphi(x,y) = 0$ は特異点をもたないから，ラグランジュの未定乗数法が適用できる．よって

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y) = (x+1)^2 + y^2 - \lambda(x^3 - y^2)$$

とおき

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = 2(x+1) - 3\lambda x^2 = 0 \\ F_y(x,y,\lambda) = 2y + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = -(x^3 - y^2) = 0 \end{cases}$$

を解いて，極値をとりうる点の候補を求めればよい．

ここで，第 2 式より $(1+\lambda)y = 0$ であるから，$y = 0$ または $\lambda = -1$ である．そこで $y = 0$ とすると，第 3 式より $x = 0$ であるが，これは第 1 式において $2 = 0$ となりみたさない．次に $\lambda = -1$ とすると，第 1 式より $3x^2 + 2x + 2 = 0$ が得られるが，この 2 次方程式は $D/4 = 1 - 6 = -5 < 0$ より実数解をもたない．よって，上の連立方程式をみたす (x,y,λ) の組は存在しない．

一方，点 $(0,0)$ においては，$f(0,0) = 1$ は最小値である．実際，$x^3 = y^2 \geqq 0$ より $x \geqq 0$ であるから

$$(x+1)^2 \geqq 1 \qquad (x \geqq 0)$$

が成り立つ．ゆえに

$$f(x,y) = (x+1)^2 + y^2 \geqq 1 + 0 = 1$$

であり，この不等式で等号が成り立つのは $x = 0$ かつ $y = 0$ のときのみである．ゆえに，$y^2 = x^3$ かつ $(x,y) \fallingdotseq (0,0)$ ならば

$$f(x,y) = (x+1)^2 + y^2 > 1 = f(0,0)$$

が成り立つから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値かつ最小値 1 をとる．

（解答終）

この例題のように条件式が特異点をもつ場合には，ラグランジュの未定乗数法だけを適用しても解は求められない．特異点は別に考察しないと，重要な点がすっぽり抜け落ちてしまう可能性がある．曲線 $y^2 = x^3$ の概形を描いてみれば，特異点とはどのような点をイメージしやすいかもしれない．

他にも『条件 $y^2 = x^2(x-1)$ のもとで，関数 $f(x,y) = x$ の最小値を求めよ』という問題を考えると，ラグランジュの未定乗数法を利用すれば $(x,y) = (1,0)$ という点のみが得られるが，点 $(0,0)$ が与えられた条件をみたすから最小値は $f(0,0) = 0$ となる．やはりこの $(0,0)$ という点は条件式の特異点（本当は前に述べた特異点の定義とはやや異なるが）である．

このように条件式 $\varphi(x,y) = 0$ の特異点における状況はラグランジュの未定乗数法ではまったく何も調べられないので気をつけること．

8.5 縁付きヘッセ行列式を用いた条件つき極値の判定法

ラグランジュの未定乗数法は拘束条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとでの関数 $f(x,y)$ の極値を計算する際に，補助的に

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$$

という関数を定義し，通常の極値問題のように $F_x=F_y=F_\lambda=0$ となる停留点を求める方法である．しかし，これは極値をとるための必要条件に過ぎず，実際にそこで極値をとるかどうかは何らかの方法で確認しなければならないのは，ここまでの例題で紹介したとおりである．

そのための手法の 1 つとして知られているものが，上記の関数 $F(x,y,\lambda)$ のヘッセ行列の行列式の符号を調べて極大・極小を判定するものである．経済数学の文献にはほぼ確実に書かれている手法でありそちらでは有名なもののようだが，数学書で記述されているものはあまり見たことがないのでここで紹介する．本質的には $\varphi(x,y)=0$ の陰関数を $y=\eta(x)$ としたときの $g(x)=f\bigl(x,\eta(x)\bigr)$ の 2 階導関数を求めることと同じではあるが，公式化しておくと面倒な計算を繰り返さなくてよいことと，公式が憶えやすいことが特徴である．また，拘束条件が複数個ある場合にも機械的に拡張することができる．

定義 8.19. （縁付きヘッセ行列）
関数 $\varphi(x,y)$ と $f(x,y)$ はともに C^2 級であるとし，条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ の極値問題を考える．このとき，関数 $F(x,y,\lambda)$ を

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$$

定義し，次の行列式

$$\widetilde{H}(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix}0 & \varphi_x(x,y) & \varphi_y(x,y)\\ \varphi_x(x,y) & F_{xx}(x,y,\lambda) & F_{xy}(x,y,\lambda)\\ \varphi_y(x,y) & F_{yx}(x,y,\lambda) & F_{yy}(x,y,\lambda)\end{vmatrix}$$

を縁付きヘッセ行列式という．

縁付きヘッセ行列式と名付けられているのは，2 変数関数と思ったときのヘッセ行列式 $\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{xy}\\ F_{yx} & F_{yy}\end{vmatrix}$ のまわりを拘束条件 φ の偏導関数で縁取りしたように見えるからということらしい．ただし，数学的に言えばこれは 3 変数関数 $F(x,y,\lambda)$ のヘッセ行列式（を基本変形により変形したもの）である．つまり，$F(x,y,\lambda)$ が λ に関して 1 次式であるから

$$\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{xy} & F_{x\lambda}\\ F_{yx} & F_{yy} & F_{y\lambda}\\ F_{\lambda x} & F_{\lambda y} & F_{\lambda\lambda}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{xy} & -\varphi_x\\ F_{yx} & F_{yy} & -\varphi_y\\ -\varphi_x & -\varphi_y & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \varphi_x & \varphi_y\\ \varphi_x & F_{xx} & F_{xy}\\ \varphi_y & F_{yx} & F_{yy}\end{vmatrix}=\widetilde{H}(x,y,\lambda)$$

となる．基本変形の部分では第 3 行と第 3 列を -1 倍し，行の入れ替えを 2 回，列の入れ替えを 2 回行ったので結果的に符号は変わらない．

この縁付きヘッセ行列式の符号を調べることで極大・極小の判定が以下のようにできる．

定理 8.20. （条件つき極値問題の極大・極小の判定法）
関数 $\varphi(x,y)$ と $f(x,y)$ はともに C^2 級であるとし，関数 $F(x,y,\lambda)$ を

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$$

定義する．また，点 (a,b,λ_0) を F の停留点とし，点 (a,b) は関係式 $\varphi(x,y)=0$ の特異点でないとする．このとき

(1) $\widetilde{H}(a,b,\lambda_0)>0$ ならば，条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) で極大となる．

(2) $\widetilde{H}(a,b,\lambda_0)<0$ ならば，条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) で極小となる．

もし $\widetilde{H}(a,b,\lambda_0)=0$ ならば，条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるかどうかはこの方法ではわからない．

証明.　$F(x,y,\lambda)$ は x と y について C^2 級であるから，漸近展開をすれば $r=\sqrt{h^2+k^2}\to +0$ のとき

$$\begin{aligned}F(a+h,b+k,\lambda_0)&=F(a,b,\lambda_0)+F_x(a,b,\lambda_0)h+F_y(a,b,\lambda_0)k\\&\qquad+\frac{1}{2}\left\{F_{xx}(a,b,\lambda_0)h^2+2F_{xy}(a,b,\lambda_0)hk+F_{yy}(a,b,\lambda_0)k^2\right\}+o(r^2)\\&=f(a,b)+\frac{1}{2}\left\{F_{xx}(a,b,\lambda_0)h^2+2F_{xy}(a,b,\lambda_0)hk+F_{yy}(a,b,\lambda_0)k^2\right\}+o(r^2)\end{aligned}\tag{8.4}$$

となる．

ただし，条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで考えるので上の式の (h,k) は自由に動かせるのではなく，$\varphi(a+h,b+k)=0$ となるように動かす必要がある．そこで，$\varphi(x,y)$ も漸近展開すれば，$\varphi(a,b)=0$ より

$$\varphi(a+h,b+k)=\varphi_x(a,b)h+\varphi_y(a,b)k+o(r)\qquad(r\to +0)$$

と表せる．よって，(h,k) が $\varphi(a+h,b+k)=0$ をみたすならば

$$\varphi_x(a,b)h+\varphi_y(a,b)k=o(r)\qquad(r\to +0)$$

が成り立つ．点 (a,b) は関係式 $\varphi(x,y)$ の特異点ではないから，$\varphi_x(a,b)$ と $\varphi_y(a,b)$ の少なくともどちらかは 0 ではない．そこで，$\varphi_y(a,b)\fallingdotseq 0$ とする（$\varphi_x(a,b)\fallingdotseq 0$ の場合も同様である）．このとき

$$k=-\frac{\varphi_x(a,b)}{\varphi_y(a,b)}\,h+o(r)\quad(r\to +0)\tag{8.5}$$

となる．

ここで，$F_{xx}(a,b,\lambda_0)$ や $\varphi_x(a,b)$ などの h や k によらない定数を F_{xx} や φ_x のように略記することにすると

$$F(a+h,b+k,\lambda_0)=f(a+h,b+k)-\lambda_0\varphi(a+h,b+k)=f(a+h,b+k)$$

なので，(8.4)は

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{1}{2}\,(F_{xx}h^2+2F_{xy}hk+F_{yy}k^2)+o(r^2)\quad(r\to +0)$$

と，(8.5)は

$$k=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\,h+o(r)\quad(r\to +0)$$

と表せる．さらに

$$hk=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\,h^2+o(r^2),\qquad k^2=\frac{\varphi_x^2}{\varphi_y^2}\,h^2+o(r^2)$$

なので

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)&=f(a,b)+\frac{1}{2}\left(F_{xx}h^2-2F_{xy}\cdot\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\,h^2+F_{yy}\cdot\frac{\varphi_x^2}{\varphi_y^2}\,h^2\right)+o(r^2)\\&=f(a,b)+\frac{h^2}{2\varphi_y^2}\,(F_{xx}\varphi_y^2-2F_{xy}\varphi_x\varphi_y+F_{yy}\varphi_x^2)+o(r^2)\end{aligned}$$

となる．また，サラスの公式などで行列式を計算すれば

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(x,y,\lambda)&=\begin{vmatrix}0&\varphi_x(x,y)&\varphi_y(x,y)\\\varphi_x(x,y)&F_{xx}(x,y,\lambda)&F_{xy}(x,y,\lambda)\\\varphi_y(x,y)&F_{yx}(x,y,\lambda)&F_{yy}(x,y,\lambda)\end{vmatrix}\\&=-F_{xx}(x,y,\lambda)\varphi_y(x,y)^2+2F_{xy}(x,y,\lambda)\varphi_x(x,y)\varphi_y(x,y)-F_{yy}(x,y,\lambda)\varphi_x(x,y)^2\end{aligned}$$

より

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{h^2}{2\varphi_y(a,b)^2}\left\{-\widetilde{H}(a,b,\lambda_0)+o(1)\right\}\qquad(r\to +0)\tag{8.6}$$

が成り立つ．

ここで $r \to +0$ のとき $(h,k) \to (0,0)$ なので，$\widetilde{H}(a,b,\lambda_0) \fallingdotseq 0$ ならば，$r = \sqrt{h^2+k^2}$ が十分小さい (h,k) に対して，(8.6)の右辺第 2 項の符号は $-\widetilde{H}(a,b,\lambda_0)$ と一致する．よって，$\widetilde{H}(a,b,\lambda_0) > 0$ ならば，$\varphi(a+h,b+k) = 0$ となる $(0,0)$ に近い (h,k) に対して

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \frac{h^2}{2\varphi_y(a,b)^2}\left\{-\widetilde{H}(a,b,\lambda_0) + o(1)\right\} < f(a,b)$$

が成り立つから，条件 $\varphi(x,y) = 0$ のもとで関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) で極大となる．

同様に，$\widetilde{H}(a,b,\lambda_0) < 0$ ならば，$\varphi(a+h,b+k) = 0$ となる $(0,0)$ に近い (h,k) に対して

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \frac{h^2}{2\varphi_y(a,b)^2}\left\{-\widetilde{H}(a,b,\lambda_0) + o(1)\right\} > f(a,b)$$

が成り立つから，条件 $\varphi(x,y) = 0$ のもとで関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) で極小となる． □

前に述べたように $\varphi(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \eta(x)$ を用いて $g(x) = f\bigl(x,\eta(x)\bigr)$ とおけば，長い計算を経て

$$g''(a) = -\frac{1}{\varphi_y(a,b)^2}\,\widetilde{H}(a,b,\lambda_0)$$

であることが導けるので，この方針でも証明することができる．

線形代数の知識を利用してこの定理の意味について考えてみる．まず

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi_x(a,b) & \varphi_y(a,b) \\ \varphi_x(a,b) & F_{xx}(a,b,\lambda_0) & F_{xy}(a,b,\lambda_0) \\ \varphi_y(a,b) & F_{yx}(a,b,\lambda_0) & F_{yy}(a,b,\lambda_0) \end{pmatrix}$$

は実対称行列なので，固有値はすべて実数であるからそれを μ_1,μ_2,μ_3 とする．ここで，ヘッセ行列の $(1,1)$ 成分が 0 であるから，小行列式による判定法より正定値や負定値とはならないことがわかる．

よって，もし $\widetilde{H}(a,b,\lambda_0) < 0$ ならば

$$\mu_1\mu_2\mu_3 = \widetilde{H}(a,b,\lambda_0) < 0$$

であり，負定値ではないから $\mu_1 > 0,\ \mu_2 > 0,\ \mu_3 < 0$ となる．ここで，ある意味では λ 方向の固有値が $\mu_3 < 0$ に対応し，x,y 方向の固有値が $\mu_1,\mu_2 > 0$ に対応するため，$f(x,y)$ は極小になっていると考えられる．同様に，$\widetilde{H}(a,b,\lambda_0) > 0$ ならば

$$\mu_1\mu_2\mu_3 = \widetilde{H}(a,b,\lambda_0) > 0$$

であり，正定値ではないから $\mu_1 < 0,\ \mu_2 < 0,\ \mu_3 > 0$ となる．ここで，ある意味では λ 方向の固有値が $\mu_3 > 0$ に対応し，x,y 方向の固有値が $\mu_1,\mu_2 < 0$ に対応するため，$f(x,y)$ は極大になっていると考えられる．

ラグランジュの未定乗数法は曲面 $z = f(x,y)$ のグラフを $\varphi(x,y)$ の λ 倍を加えて変形して，条件つき極値をとる点が通常の意味での停留点にする方法である．このことから上の考察が得られそうな気がするが，上手く説明できないのでここまでとし，いずれわかれば追記することにする．

拘束条件が複数個ある場合にも同様の判定法があるが，かなり線形代数の知識が必要なのでここでは省略する．適当な経済数学の本を参照すること．

前と同じ問題を縁付きヘッセ行列式を利用して解くと次のようになる．

例題 8.21. 条件 $x^2+y^2=1$ のもとで，関数 $f(x,y)=x^3+y^3$ の極値を求めよ．

（解答） 曲線 $C\colon \varphi(x,y)=x^2+y^2-1=0$ は円なので有界閉集合で，$f(x,y)=x^3+y^3$ は連続なので，C 上で最大値と最小値が存在する．また

$$\varphi_x(x,y)=2x, \qquad \varphi_y(x,y)=2y$$

より，$\varphi_x=\varphi_y=0$ となるのは $(x,y)=(0,0)$ のときのみであるが，これは $\varphi(0,0)=-1\neq 0$ より条件式をみたさない．よって，関係式 $\varphi(x,y)=0$ は特異点をもたない．

ゆえに，ラグランジュの未定乗数法より

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)=x^3+y^3-\lambda(x^2+y^2-1)$$

とおき

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=3x^2-2\lambda x=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=3y^2-2\lambda y=0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=-(x^2+y^2-1)=0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x(3x-2\lambda)=0 & \cdots ① \\ y(3y-2\lambda)=0 & \cdots ② \\ x^2+y^2=1 & \cdots ③ \end{cases}$$

を解いて $f(x,y)$ が極値をとる候補の点を求めればよい．

(i) $x=0$ のとき

③ に代入すれば，$y^2=1$ より $y=\pm1$ であり，$(x,y,\lambda)=\left(0,\,\pm1,\,\pm\dfrac{3}{2}\right)$（複号同順）である．

(ii) $y=0$ のとき

③ に代入すれば，$x^2=1$ より $x=\pm1$ であり，$(x,y,\lambda)=\left(\pm1,\,0,\,\pm\dfrac{3}{2}\right)$（複号同順）である．

(iii) $x\neq0$ かつ $y\neq0$ のとき

① と ② より

$$3x-2\lambda=3y-2\lambda=0 \qquad \therefore\ x=y$$

なので，③ より $(x,y,\lambda)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right)$（複号同順）である．

以上より，これら 6 個の点が $F(x,y,\lambda)$ の停留点である．ここで

$$f(\pm1,0)=\pm1, \qquad f(0,\pm1)=\pm1, \qquad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であり，$f(x,y)$ は最大値と最小値をもちそれらは極値でもあるから，上の計算より 1 と -1 がそれぞれ $f(x,y)$ の最大値と最小値で，このとき極大値と極小値でもある．よって，$(1,0)$, $(0,1)$ で極大値 1，$(-1,0)$, $(0,-1)$ で極小値 -1 をとる．

そこで，点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で $f(x,y)$ が極値をとるかどうかを調べる．縁付きヘッセ行列式は

$$\widetilde{H}(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_x & F_{xx} & F_{xy} \\ \varphi_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 6x-2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 6y-2\lambda \end{vmatrix}=-4y^2(6x-2\lambda)-4x^2(6y-2\lambda)$$

なので

$$\widetilde{H}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)=-6\sqrt{2}<0, \qquad \widetilde{H}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)=6\sqrt{2}>0$$

より，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ では極小，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ では極大となる．

したがって，$x^2+y^2=1$ のもとで $f(x,y)$ は $(1,0)$, $(0,1)$ で極大値 1，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極大値 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をとり，$(-1,0)$, $(0,-1)$ で極小値 -1，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極小値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をとる．

（解答終）

8.6　点と直線・点と平面の距離公式

最後にラグランジュの未定乗数法の応用として，高校数学 II で学習した点と直線の距離公式の別証明を与え，それを拡張して空間における点と平面の距離公式およびその計算例を紹介する．

命題 8.22.（点と直線の距離公式）
$(a,b) \fallingdotseq (0,0)$ とする．xy 平面において点 $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ から直線 $l\colon ax+by+c=0$ に下ろした垂線の足を H とする．このとき，線分 AH の長さ d を点 A と直線 l の距離といい

$$d = \frac{|\,ax_0+by_0+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

が成り立つ．

証明.　直線 l 上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ に対して，線分 AP の長さは $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ で与えられる．よって，点 P が直線 l 上にあるという拘束条件 $\varphi(x,y)=ax+by+c=0$ のもとでの

$$f(x,y) = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2$$

の最小値が d^2 と等しくなる．

点 A から直線 l に下ろした垂線の足 H およびその長さ d は一意的に定まるから，上で述べた条件つき極値問題は必ず最小値が存在する．また，$\varphi_x(x,y)=a,\ \varphi_y(x,y)=b$ より，$\varphi_x=\varphi_y=0$ となることはなく，関係式 $\varphi(x,y)=0$ は特異点をもたない．

ゆえに，ラグランジュの未定乗数法より

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y)-\lambda\varphi(x,y) = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2-\lambda(ax+by+c)$$

とおき

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = 2(x-x_0)-\lambda a = 0 \\ F_y(x,y,\lambda) = 2(y-y_0)-\lambda b = 0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = -(ax+by+c) = 0 \end{cases}$$

を解いて $f(x,y)$ が極値をとる候補の点を求めればよい．

第 1 式と第 2 式より

$$x = x_0+\frac{a}{2}\,\lambda, \qquad y = y_0+\frac{b}{2}\,\lambda$$

であるから，これらを第 3 式に代入して

$$a\left(x_0+\frac{a}{2}\,\lambda\right)+b\left(y_0+\frac{b}{2}\,\lambda\right)+c = ax_0+by_0+c+\frac{a^2+b^2}{2}\,\lambda = 0$$

より，$\lambda = -\dfrac{2(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$ となる．この λ から定まる $(x,y)=\left(x_0+\dfrac{a}{2}\,\lambda,\, y_0+\dfrac{b}{2}\,\lambda\right)$ に対して

$$f\left(x_0+\frac{a}{2}\,\lambda,\, y_0+\frac{b}{2}\,\lambda\right) = \frac{a^2}{4}\,\lambda^2+\frac{b^2}{4}\,\lambda^2 = \frac{a^2+b^2}{4}\cdot\frac{4(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}$$

が条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとでの $f(x,y)$ の最小値である．したがって

$$d = \sqrt{\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}} = \frac{|\,ax_0+by_0+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

が成り立つ．　□

この証明法と同様に計算すれば，点と直線の距離だけでなくその垂線の足の座標も求められる．

例題 8.23.　点 $(3,4)$ から直線 $2x-3y+1=0$ に下ろした垂線の足の座標および点と直線の距離を求めよ．

（解答）　条件 $\varphi(x,y)=2x-3y+1=0$ のもとでの $f(x,y)=(x-3)^2+(y-4)^2$ の最小値のルートをとったものが求める距離である．

点から直線に下ろした垂線の足 H およびその長さ d は一意的に定まるから，この条件つき極値問題は必ず最小値が存在する．また，$\varphi_x(x,y)=2$ より，$\varphi_x=\varphi_y=0$ となることはなく，関係式 $\varphi(x,y)=0$ は特異点をもたない．

ゆえに，ラグランジュの未定乗数法より

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)=(x-3)^2+(y-4)^2-\lambda(2x-3y+1)$$

とおき

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=2(x-3)-2\lambda=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=2(y-4)+3\lambda=0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=-(2x-3y+1)=0 \end{cases}$$

を解いて $f(x,y)$ が極値をとる候補の点を求めればよい．

第 1 式と第 2 式より $x=\lambda+3,\ y=-\dfrac{3}{2}\lambda+4$ なので，これらを第 3 式に代入すれば

$$2(\lambda+3)-3\left(-\frac{3}{2}\lambda+4\right)+1=\frac{13}{2}\lambda-5=0 \qquad \therefore\ \lambda=\frac{10}{13}$$

となる．このとき

$$x=\lambda+3=\frac{10}{13}+3=\frac{49}{13}, \qquad y=-\frac{3}{2}\lambda+4=-\frac{15}{13}+4=\frac{37}{13}$$

であるから，垂線の足の座標は $\left(\dfrac{49}{13},\dfrac{37}{13}\right)$ である．また，点と直線の距離は

$$\sqrt{f\left(\frac{49}{13},\frac{37}{13}\right)}=\sqrt{\lambda^2+\left(-\frac{3}{2}\lambda\right)^2}=\sqrt{\frac{13}{4}\lambda^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}|\lambda|=\frac{5}{\sqrt{13}}$$

（解答終）

まったく同様の証明により次の公式が得られる．

命題 8.24.　**（点と平面の距離公式）**

$(a,b,c)\neq(0,0,0)$ とする．xyz 空間において点 $\mathrm{A}(x_0,y_0,z_0)$ から平面 α: $ax+by+cz+d=0$ に下ろした垂線の足を H とする．このとき，線分 AH の長さを点 A と平面 α の距離といい，それは

$$\frac{|\,ax_0+by_0+cz_0+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

で与えられる．

適切な演習問題なので，各自で証明してみること．

高校数学の知識でも点と直線の距離公式はベクトル（直線のパラメータ表示）を用いて証明することができ，その方法ならラグランジュの未定乗数法の場合と同じく垂線の足の座標も求めることができる．ただし，ベクトルを用いた解法は直線の法線ベクトルがどこでも同じものとして定まることを用いており,「点と曲線の最短距離」のような問題には通用しない（各点での法線を考えれば同様の議論はできるがそれでも大変）．一方，ラグランジュの未定乗数法を用いた解法は条件 $\varphi(x,y)=0$ が表す図形が直線や平面でなくても一般の滑らかな曲線で構わないので，拘束条件が曲線でもまったく解法の流れが同じ点が強みである．

9　3 変数以上の関数の極値

すでに 2 変数関数の極値については学習した．ここでは n を 3 以上の自然数としたときの n 変数関数

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

の極値の求め方について扱う．2 変数関数と同じ部分については簡単に述べることにするが，ヘッセ行列のあたりから大幅に変わるので，線形代数で学習する『直交行列による実対称行列の対角化』の知識が必要である．

極値の定義は 2 変数関数の場合と同様である．

定義 9.1. **（極値）**
関数 $f(\boldsymbol{x})$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a}) \qquad \big(\boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{x} \fallingdotseq \boldsymbol{a}\big) \tag{9.1}$$

となるとき，$f(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ で**極小**であるといい，$f(\boldsymbol{a})$ を**極小値**という．
また，ある $\delta > 0$ が存在して

$$f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a}) \qquad \big(\boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{x} \fallingdotseq \boldsymbol{a}\big) \tag{9.2}$$

となるとき，$f(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a}$ で**極大**であるといい，$f(\boldsymbol{a})$ を**極大値**という．
さらに，極大値と極小値をまとめて**極値**という．

注意 9.2.　(9.1)の不等式に等号をつけた条件

$$f(\boldsymbol{x}) \geqq f(\boldsymbol{a}) \qquad \big(\boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{x} \fallingdotseq \boldsymbol{a}\big)$$

が成り立つとき，$f(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a}$ で**広義の極小**であるといい，$f(\boldsymbol{a})$ を**広義の極小値**という．
同様に (9.2)の不等式に等号をつけた条件

$$f(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{a}) \qquad \big(\boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{x} \fallingdotseq \boldsymbol{a}\big)$$

が成り立つとき，$f(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a}$ で**広義の極大**であるといい，$f(\boldsymbol{a})$ を**広義の極大値**という．

偏微分可能ならば，極値をとるための必要条件を同様に与えることができる．

定理 9.3.　関数 $f(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ で極値をとり，かつ偏微分可能であるとする．このとき

$$f_{x_1}(\boldsymbol{a}) = f_{x_2}(\boldsymbol{a}) = \cdots = f_{x_n}(\boldsymbol{a}) = 0$$

が成り立つ．

定義 9.4. **（停留点）**
関数 $f(\boldsymbol{x})$ は偏微分可能であるとする．このとき

$$f_{x_1}(\boldsymbol{a}) = f_{x_2}(\boldsymbol{a}) = \cdots = f_{x_n}(\boldsymbol{a}) = 0$$

となる点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を $f(\boldsymbol{x})$ の**停留点（臨界点）**という．

関数 $f(\boldsymbol{x})$ の停留点が極値をとる点とは限らないのは n 変数関数の場合にも同様である．そこで，$f(\boldsymbol{x})$ が C^2 級の場合に停留点で極値をとるかどうか判定する方法を説明する．

9.6 節では 2 変数関数の極値の判定法の以下の定理を証明したが，その証明は平方完成を利用したものだった．そのため，3 変数以上の場合には同様に証明するのは難しく，計算だけを見ても複雑である．

そこで，まずは 2 変数関数 $f(x,y)$ に関する証明を線形代数の知識を利用してスマートな形に修正する．

定理 9.5. 関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) の近傍で C^2 級で，さらに (a,b) は $f(x,y)$ の停留点とする．

(1) $\det H_f(a,b) > 0,\ f_{xx}(a,b) > 0$ ならば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極小となる．

(2) $\det H_f(a,b) > 0,\ f_{xx}(a,b) < 0$ ならば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極大となる．

(3) $\det H_f(a,b) < 0$ ならば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極大でも極小でもない．

証明. 関数を平行移動して考えることにより，停留点が原点 $(a,b) = (0,0)$ の場合を示せばよい．

関数 $f(x,y)$ を原点のまわりで漸近展開すると，$r = \sqrt{x^2+y^2} \to +0$ のとき

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right\} + o(r^2)$$

と表せるから，$(0,0)$ が $f(x,y)$ の停留点なので

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right\} + o(r^2)$$

が成り立つ．これは，実対称行列 $A = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(0,0) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(r^2) \\ &= \frac{1}{2}\,{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + o(r^2) \end{aligned}$$

と表せる．

実対称行列は直交行列で対角化可能なので，A の固有値を λ_1, λ_2 とし，それぞれの固有値に対する固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底を $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ とする．$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}$ は直交行列であり

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．そこで，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ と直交行列が長さを保つことから

$$r = \|\boldsymbol{x}\| = \|P\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{X^2+Y^2}$$

であり

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(0,0) &= \frac{1}{2}\,{}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y}) + o(r^2) \\ &= \frac{1}{2}\,{}^t\boldsymbol{y}({}^tPAP)\boldsymbol{y} + o(r^2) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + o(r^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2\right) + o(r^2) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，定理の仮定より，$\det A = \det H_f(0,0) \fallingdotseq 0$ なので，$\lambda_1\lambda_2 \fallingdotseq 0$ である．

ゆえに，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおけば

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2\right) + o(r^2) \qquad (r \ \to \ +0) \tag{9.3}$$

かつ $\lambda_1 \lambda_2 \fallingdotseq 0$ となる．ここで，$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{X^2+Y^2}$ である．

(i) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$ のとき

$\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ とおくと，$\lambda > 0$ である．(9.3)より，$(x,y) \fallingdotseq (0,0)$ のとき

$$f(x,y) - f(0,0) \geqq \frac{1}{2}\left(\lambda X^2 + \lambda Y^2\right) + o(r^2) = \frac{\lambda}{2} r^2 + o(r^2) = \frac{\lambda}{2} r^2 \left(1 + \frac{o(r^2)}{r^2}\right)$$

となる．右辺のかっこの部分は $r \to +0$ で 1 に収束するから，十分小さい $r > 0$ に対しては $\dfrac{1}{2}$ より大きくなる．ゆえに，ある $\delta > 0$ が存在して，$0 < r = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ ならば

$$f(x,y) - f(0,0) \geqq \frac{\lambda}{2} r^2 \left(1 + \frac{o(r^2)}{r^2}\right) > \frac{\lambda}{4} r^2 > 0$$

より $f(x,y) > f(0,0)$ が成り立つから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小となる．

(ii) $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$ のとき

$\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ とおくと，$\lambda < 0$ である．(9.3)より，$(x,y) \fallingdotseq (0,0)$ のとき

$$f(x,y) - f(0,0) \leqq \frac{1}{2}\left(\lambda X^2 + \lambda Y^2\right) + o(r^2) = \frac{\lambda}{2} r^2 + o(r^2) = \frac{\lambda}{2} r^2 \left(1 + \frac{o(r^2)}{r^2}\right)$$

となる．右辺のかっこの部分は $r \to +0$ で 1 に収束するから，十分小さい $r > 0$ に対しては $\dfrac{1}{2}$ より大きくなる．ゆえに，ある $\delta > 0$ が存在して，$0 < r = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ ならば

$$f(x,y) - f(0,0) \leqq \frac{\lambda}{2} r^2 \left(1 + \frac{o(r^2)}{r^2}\right) < \frac{\lambda}{4} r^2 < 0$$

より $f(x,y) < f(0,0)$ が成り立つから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極大となる．

(iii) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$ のとき

X 軸にそって $(0,0)$ に近づくときには，$Y = 0$ として $X \to 0$ とすればよい．このとき，(9.3)より

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\lambda_1}{2} X^2 + o(r^2) = \frac{\lambda_1}{2} X^2 \left(1 + \frac{o(r^2)}{X^2}\right)$$

である．$Y = 0$ なので $r^2 = X^2$ であるから，ある $\delta > 0$ が存在して，$0 < r = |X| < \delta$ ならば

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\lambda_1}{2} X^2 \left(1 + \frac{o(r^2)}{X^2}\right) > \frac{\lambda_1}{4} X^2 > 0$$

となる．一方，Y 軸にそって $(0,0)$ に近づくときには，$X = 0$ として $Y \to 0$ とすればよい．このとき，同様にして (9.3)より，ある $\delta > 0$ が存在して，$0 < r = |Y| < \delta$ ならば

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\lambda_2}{2} Y^2 + o(r^2) = \frac{\lambda_2}{2} Y^2 \left(1 + \frac{o(r^2)}{Y^2}\right) < \frac{\lambda_2}{4} Y^2 < 0$$

となる．したがって，$f(x,y) - f(0,0)$ の符号が $(0,0)$ の近傍で定まらないので，$(0,0)$ は鞍点である．

このようにヘッセ行列の固有値の符号を調べれば極値かどうかの判定ができる．以下では見やすさのために

$$A = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，A の固有方程式は

$$F_A(t) = \begin{vmatrix} t-p & -q \\ -q & t-r \end{vmatrix} = t^2 - (p+r)t + pr - q^2 = 0$$

であり，この解が $t = \lambda_1, \lambda_2$ なので，解と係数の関係より

$$\lambda_1 + \lambda_2 = p + r, \qquad \lambda_1\lambda_2 = pr - q^2 = \det A = \det H_f(0,0)$$

が成り立つ．

もし $\det H_f(0,0) = pr - q^2 > 0$ ならば，$pr > 0$ となるので，p と r は同符号である．ゆえに，$p+r$ と p は同符号である．$\det H_f(0,0) = \lambda_1\lambda_2$, $p = f_{xx}(0,0)$, $p + r = \lambda_1 + \lambda_2$ なので

$$\det H_f(0,0) > 0,\ f_{xx}(0,0) > 0 \iff \lambda_1\lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \iff \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0 \implies \text{極小}$$

$$\det H_f(0,0) > 0,\ f_{xx}(0,0) < 0 \iff \lambda_1\lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \iff \lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0 \implies \text{極大}$$

である．また，$\det H_f(0,0) < 0$ ならば

$$\lambda_1\lambda_2 = \det H_f(0,0) < 0$$

より，λ_1 と λ_2 は異符号である．したがって，この場合には鞍点となる． □

この証明からわかるように，$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるかどうかは，$f(x,y)$ の (a,b) でのヘッセ行列

$$H_f(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

の固有値を調べれば

$$\begin{cases} \text{すべて正} & \implies f(x,y) \text{ は点 } (a,b) \text{ で極小} \\ \text{すべて負} & \implies f(x,y) \text{ は点 } (a,b) \text{ で極大} \\ \text{正のものと負のものがある} & \implies f(x,y) \text{ は点 } (a,b) \text{ で極値をとらない} \end{cases}$$

となることがわかる．これは非常にシンプルな形である．

この証明の前半部分の重要なポイントを列挙すれば

- 関数 $f(x,y)$ を停留点のまわりで 2 次の項まで漸近展開する
- 1 次の項はなくなるから 2 次の項のみが残り，その部分はヘッセ行列（実対称行列）を用いて表せる
- 実対称行列の固有値はすべて実数であり，直交行列で対角化できる
- 直交行列による変換が長さを保つため，ランダウの記号の部分は変数変換しても変わらない
- 直交行列を用いて対角化すると対角成分には固有値が並ぶため，2 乗の項の係数はすべて固有値が現れる
- 固有値の符号が全部正や全部負なら $f(x,y) - f(a,b)$ の符号が確定し，正と負のものがあれば鞍点となる

となる．このいずれの部分も 2 変数に限らず，n 変数の場合にも n 次実対称行列を考えることで成り立つ．つまり，固有値に関する部分の主張および証明は同様であるから，次の定理が成り立つ．

n 変数関数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ のヘッセ行列を

$$H_f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_1x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\boldsymbol{x}) \\ f_{x_2x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_2x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_2x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_nx_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

で定義する．

定理 9.6. （極値を取るための十分条件）

関数 $f(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ の近傍で C^2 級で，さらに $\boldsymbol{a}$ は $f(\boldsymbol{x})$ の停留点とする．このとき，$f(\boldsymbol{x})$ のヘッセ行列 $H_f(\boldsymbol{x})$ について

(1) $H_f(\boldsymbol{a})$ の n 個の固有値がすべて正ならば，$f(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a}$ で極小となる．

(2) $H_f(\boldsymbol{a})$ の n 個の固有値がすべて負ならば，$f(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a}$ で極大となる．

(3) $H_f(\boldsymbol{a})$ が正の固有値と負の固有値をもつならば，$f(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a}$ で極大でも極小でもない．

このように固有値がすべて正の実対称行列は応用上重要なので**正定値**であると呼ばれる．同様に固有値がすべて負の実対称行列を**負定値**であるという．3 変数関数の場合の証明を 2 変数関数の場合を参考に試みてみよ．なお，上の定理で扱われていない「固有値がすべて 0 以上でさらに 0 が固有値である場合」と「固有値がすべて 0 以下でさらに 0 が固有値である場合」はヘッセ行列からは極値をとるかどうかは判定できない．それは固有値 0 に対応する方向の 2 乗の係数が 0 となり，正負を調べる際に 3 次以上の項の部分（ランダウの記号の部分）の寄与が無視できなくなるからである．

2 変数関数 $f(x, y)$ については，停留点 (a, b) でのヘッシアンについて $\det H_f(a, b) > 0$ ならば極値をとったが，ヘッシアンだけで判定できるのは 2 変数の場合だけである．実際，3 変数関数 $f(x, y, z)$ の停留点 (a, b, c) でのヘッセ行列の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，ヘッシアンを $\det H_f(a, b, c)$ とすれば

$$\det H_f(a, b, c) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

なので

$$\begin{cases} \det H_f(a,b,c) > 0 & \Longrightarrow \quad \text{「}\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ がすべて正」または「}\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ のうち 1 個正，2 個負」} \\ \det H_f(a,b,c) < 0 & \Longrightarrow \quad \text{「}\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ がすべて負」または「}\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ のうち 2 個正，1 個負」} \end{cases}$$

となり，ヘッシアンが正でも負でも極値をとる可能性がある．そのため，2 変数関数の場合の定理をただ丸暗記すると 3 変数以上のときに勘違いすることもあるので気をつけること．むしろ，2 変数関数の場合でも「実際には固有値の符号を調べている」と認識しておくほうがよい．

例題 9.7.　関数 $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^3-3xz-4y$ の極値を求めよ．

（解答）　まず，停留点を求める．

$$f_x(x,y,z)=3x^2-3z=0,\qquad f_y(x,y,z)=2y-4=0,\qquad f_z(x,y,z)=3z^2-3x=0$$

より，次の連立方程式

$$\begin{cases} x^2-z=0 \\ y-2=0 \\ z^2-x=0 \end{cases}$$

を解けばよい．まず 2 本目の式より $y=2$ である．次に 1 本目と 3 本目の式より $z=x^2=z^4$ であるから，$z=0,1$ となり，これを 3 本目の式に代入すれば，$f(x,y,z)$ の停留点は $(x,y,z)=(0,2,0),\,(1,2,1)$ の 2 個．

また，$f(x,y,z)$ のヘッセ行列は

$$H(x,y,z)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

である．

点 $(1,2,1)$ では

$$H(1,2,1)=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

なので，この行列を A とおく．A の固有方程式は

$$F_A(t)=\begin{vmatrix} t-6 & 0 & 3 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 3 & 0 & t-6 \end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix} t-6 & 3 \\ 3 & t-6 \end{vmatrix}=(t-2)(t-3)(t-9)=0$$

より，A の固有値は $2,3,9$ ですべて正なのでヘッセ行列は正定値である．よって，$f(x,y,z)$ は $(1,2,1)$ で極小となり，極小値 $f(1,2,1)=-5$ をとる．

点 $(0,2,0)$ では

$$H(0,2,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので，この行列を B とおく．B の固有方程式は

$$F_B(t)=\begin{vmatrix} t & 0 & 3 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 3 & 0 & t \end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix} t & 3 \\ 3 & t \end{vmatrix}=(t-2)(t-3)(t+3)=0$$

より，B の固有値は $2,3,-3$ で正と負の両方がある．よって，$f(x,y,z)$ は $(0,2,0)$ で極値をとらない．

（解答終）

実は上の解答は最良なものではない．**極大・極小の判定には固有値の具体的な値ではなく，その符号だけがわかればよいから**である．高次方程式を具体的に解かなくても，固有値の符号が「すべて正」か「すべて負」か「正と負の両方がある」ことが決定できる方法（小行列式の理論）が知られているので，詳しくは線形代数のやや本格的な本を参照すること．

例題 9.8. $0 < a < b < c$ とする．関数 $f(x,y,z) = (ax^2 + by^2 + cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2}$ の極値を求めよ．

（解答） まず，停留点を求めると

$$f_x(x,y,z) = \{2ax - 2x(ax^2 + by^2 + cz^2)\}e^{-x^2-y^2-z^2} = 0$$
$$f_y(x,y,z) = \{2by - 2y(ax^2 + by^2 + cz^2)\}e^{-x^2-y^2-z^2} = 0$$
$$f_z(x,y,z) = \{2cz - 2z(ax^2 + by^2 + cz^2)\}e^{-x^2-y^2-z^2} = 0$$

より，次の連立方程式

$$\begin{cases} x(ax^2 + by^2 + cz^2 - a) = 0 \\ y(ax^2 + by^2 + cz^2 - b) = 0 \\ z(ax^2 + by^2 + cz^2 - c) = 0 \end{cases}$$

を解けばよい．$(x,y,z) = (0,0,0)$ は明らかに停留点である．また，どれかの成分が 0 でない，例えば $x \fallingdotseq 0$ とすれば，第 1 式より $ax^2 + by^2 + cz^2 = a$ となるので，$a < b < c$ と第 2 式および第 3 式より $y = z = 0$ となる．このとき，$ax^2 = a$ より，$(x,y,z) = (\pm1,0,0)$ が停留点となる．同様にして，$(x,y,z) = (0,\pm1,0), (0,0,\pm1)$ も停留点であることがわかる．

また，$f(x,y,z)$ の 2 階偏導関数を計算すれば

$$f_{xx}(x,y,z) = (2a - 6ax^2 - 2by^2 - 2cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2} - 2xf_x(x,y,z)$$
$$f_{yy}(x,y,z) = (2b - 2ax^2 - 6by^2 - 2cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2} - 2yf_y(x,y,z)$$
$$f_{zz}(x,y,z) = (2c - 2ax^2 - 2by^2 - 6cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2} - 2zf_z(x,y,z)$$
$$f_{xy}(x,y,z) = -4bxye^{-x^2-y^2-z^2} - 2yf_x(x,y,z)$$
$$f_{yz}(x,y,z) = -4cyze^{-x^2-y^2-z^2} - 2zf_y(x,y,z)$$
$$f_{zx}(x,y,z) = -4axze^{-x^2-y^2-z^2} - 2xf_z(x,y,z)$$

となる．よって，ヘッセ行列 $H(x,y,z)$ は停留点で $f_{xy} = f_{yz} = f_{zx} = 0$ より対角行列となる．ゆえに，対角成分が固有値であり，$0 < a < b < c$ に注意して符号を調べればよい．

点 $(0,0,0)$ では $H(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix}$ より，固有値はすべて正なのでヘッセ行列は正定値である．よって，$f(x,y,z)$ は $(0,0,0)$ で極小となり，極小値 $f(0,0,0) = 0$ をとる．

点 $(\pm1,0,0)$ では $H(\pm1,0,0) = \begin{pmatrix} -4ae^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2(b-a)e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2(c-a)e^{-1} \end{pmatrix}$ より，固有値は正と負の両方がある．よって，$(\pm1,0,0)$ で極値はとらない．

点 $(0,\pm1,0)$ では $H(0,\pm1,0) = \begin{pmatrix} 2(a-b)e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -4be^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2(c-b)e^{-1} \end{pmatrix}$ より，固有値は正と負の両方がある．よって，$(0,\pm1,0)$ で極値はとらない．

点 $(0,0,\pm1)$ では $H(0,0,\pm1) = \begin{pmatrix} 2(a-c)e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2(b-c)e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -4ce^{-1} \end{pmatrix}$ より，固有値はすべて負なのでヘッセ行列は負定値である．よって，$f(x,y,z)$ は $(0,0,\pm1)$ で極大となり，極大値 $f(0,0,\pm1) = \dfrac{c}{e}$ をとる．

（解答終）

10　章末問題

練習問題 10.1.　次の関数の全微分を求めよ.

(1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \bigl((x,y) \fallingdotseq (0,0)\bigr)$　　(2) $f(x,y) = \log\left|\dfrac{x+y}{x-y}\right|$

練習問題 10.2.　次の関数 $z = f(x,y)$ のグラフの指定された点 A における接平面を求めよ.

(1) $f(x,y) = \log(x^2-3y^2) \qquad \mathrm{A}(2,1,0)$　　(2) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y} \qquad \mathrm{A}(-2,1,2)$

練習問題 10.3.　次の関数 $f(x,y)$ について，$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ を求めよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$　　(2) $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\,\dfrac{x-y}{x+y}$

練習問題 10.4.　c を 0 でない定数とする．このとき，関数

$$u(t,x,y) = \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4ct}\right) \qquad (t>0)$$

は次の関係式

$$u_t = c(u_{xx}+u_{yy})$$

をみたすことを示せ.

練習問題 10.5.　$\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \fallingdotseq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ は偏微分可能であることを示し，偏導関数をすべて求めよ.

(2) $f(x,y)$ は連続関数であることを示せ.

(3) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能ではないことを示せ.

練習問題 10.6.　次の関数の極値を求めよ.

(1) $f(x,y) = y^2 - yx^2 - y + x^2$　　(2) $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

(3) $f(x,y) = x^3 - x^2 + (2y+1)x + y^2$　　(4) $f(x,y) = (x^2+xy^2-2x+1)e^x$

(5) $f(x,y) = (2x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$　　(6) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

(7) $f(x,y) = -x^4 - y^4 + x^2 + y^2 - 2xy$　　(8) $f(x,y) = 2\log x + 3\log y + \log(6-x-y)$

(9) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x + \sin y \qquad (0<x<2\pi,\ 0<y<2\pi)$

練習問題 10.7.　条件 $10x^2 + 6xy + 2y^2 = 1$ のもとで，関数 $f(x, y) = xy$ の最大値・最小値を求めよ．

発展問題 10.8.　関数 $f(x, y)$ は領域 D 上で偏微分可能で，$f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ が D で有界ならば，$f(x, y)$ は D 上で連続であることを示せ．

発展問題 10.9.　関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) の近傍上で連続で，点 (a, b) で全微分可能ならば

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\, d\theta - f(a, b) \right\} = 0$$

となることを示せ．

第10章　重積分

ここでは多変数関数の積分を学習する．多変数関数の偏微分を計算するには1つの変数以外を定数だと思い1変数関数の微分を計算するだけなので，その観点から言えばそれほど難しいものではない．理論的な部分はともかくとして，ただ偏導関数を計算するだけなら高校生でも可能である．一方，多変数関数の重積分に関しては状況が全く異なる．その主な理由は『多変数関数については不定積分が存在しない』からである．実際，多変数関数ならば1次偏導関数は変数の数だけあるから，原始関数の概念を多変数関数版に修正するのは難しい．さらに，積分範囲として長方形や円，三角形など多種多様な形があり，それも理論を難しくしている．そのために微分積分学の基本定理のような計算法がなく，全く新しい内容となる（ベクトル解析を学習すれば微分積分学の基本定理に相当する内容を扱うが，それにより多変数関数の積分が簡単に計算できるわけではない）．

まず最初にリーマン和を用いた重積分の定義とその性質を述べる．ここは1変数関数の積分と同様に議論が進む．次に具体的な重積分の計算方法を説明する．重積分を定義に従って直接計算するのは困難なので，例えば2変数関数の2重積分ならばそれを1変数関数の積分を各変数ごとに計2回行うことによって計算する方法を理解することが重要である．そのためには不等式が表す平面内の図形を素早く図示できる必要があるので，高校数学IIの知識が必要となる．

積分計算においては部分積分法と置換積分法が必須であった．重積分の場合にも同様であるが，部分積分法の方は内容が難しいので通常は微分積分学では扱わずに，ベクトル解析と呼ばれる講義で扱う．ここでは置換積分法の重積分版を解説する．これも変数が増えたために1変数関数の場合よりも難しくなり，線形代数学の知識が必要となる．その理由は変数変換を決める写像の1次近似が行列の表す1次変換となるからである．

大学で新しく学習した内容に広義積分があるが，重積分の場合にも対応する広義重積分という概念がある．これも多変数になると一気に難しくなる．有界閉集合上で積分し，その有界閉集合を広げていくことで計算するが，その広げ方が何通りもあることが原因である．そのため，定符号関数の広義重積分と符号が変化する関数の広義重積分に分けて解説する．

最後に重積分の応用として立体の体積や表面積を計算する方法を紹介する．また，図形の重心を定義し，その計算例を説明する．これらの公式が成り立つ理由を理解するためには，積分がリーマン和の極限であることおよび考える図形を細かく分割して各種の量を近似することをマスターしなければならない．このような考え方は今後物理や工学で必要となる物である．

1　2 重積分の定義と性質

1.1　区間上の 2 重積分

$\mathbb{R}^2$ の部分集合には多様な形があり，1 変数関数の積分範囲が常に区間だったこととは状況が異なる．そこで，まずは単純な長方形領域

$$K = [a,b] \times [c,d] = \{\,(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\,\}$$

の上での有界な関数 $f(x,y)$ の積分を Riemann 和を用いて定義する．K は有界閉集合であるから，K 上の連続関数 $f(x,y)$ は最大値・最小値をもつので K において有界となる．そこで，最初は $f(x,y)$ は連続関数だと思って読み進めても良い．

定義 1.1. **（Riemann 和）**

長方形領域 $K = [a,b] \times [c,d]$ に対して，$[a,b]$ の分割と $[c,d]$ の分割

$$\Delta_1 \colon a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b, \qquad \Delta_2 \colon c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

をとり，小長方形 K_{ij} を

$$K_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \qquad (i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

とおく．このような K の分け方を $\Delta = \{(x_i, y_j)\}_{ij}$ で表し，K の**分割**という．さらに

$$|\Delta| = \max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\} = \max\{\,x_i - x_{i-1},\ y_j - y_{j-1} \mid i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n\,\}$$

を分割 Δ の**幅**という．また，この小長方形の面積を

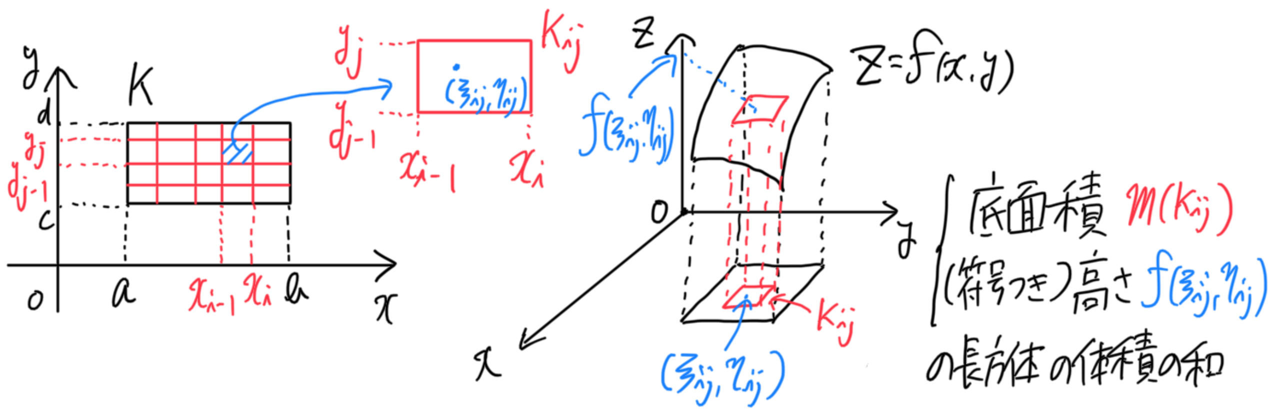
$$m(K_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

とおく．

各小長方形 K_{ij} から**代表点** $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in K_{ij}$ を決めたとき，長方形領域 K で有界な関数 $f(x,y)$ に対して

$$S(f; \Delta, \{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}) = \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) m(K_{ij})$$

を $(\Delta, \{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\})$ に関する $f(x,y)$ の **Riemann 和**という．ただし，和は $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ のように小長方形すべてに関する和を表すことにする．



定義 1.2. **(2 重積分の定義)**
関数 $f(x,y)$ は長方形領域 K 上で有界であるとする．このとき，ある実数 α が存在して，分割 $\Delta = \{(x_i, y_j)\}_{ij}$ と代表点 $\{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}$ の取り方によらず

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(f; \Delta, \{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}) = \alpha$$

が成り立つとき，$f(x,y)$ は K 上で**重積分可能**であるという．このとき

$$\alpha = \iint_K f(x,y)\,dx\,dy$$

と表し，これを $f(x,y)$ の K 上での**重積分**または **Riemann 積分**という.

1 変数関数の積分の場合と同様に次の定理が成り立つ.

定理 1.3. **(重積分の性質)**
関数 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ はともに長方形領域 K 上で重積分可能とするとき，次が成り立つ.

(1) 定数 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して，関数 $\lambda f + \mu g$ も K 上で重積分可能で

$$\iint_K \{\lambda f(x,y) + \mu g(x,y)\}\,dx\,dy = \lambda \iint_K f(x,y)\,dx\,dy + \mu \iint_K g(x,y)\,dx\,dy$$

(2) K 上で $f(x,y) \leqq g(x,y)$ ならば

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy \leqq \iint_K g(x,y)\,dx\,dy$$

(3) 関数 $|f(x,y)|$ も K 上で重積分可能で

$$\left| \iint_K f(x,y)\,dx\,dy \right| \leqq \iint_K |f(x,y)|\,dx\,dy$$

定理 1.4. **(連続関数の可積分性)**
関数 $f(x,y)$ が長方形領域 K 上で連続ならば，K 上で重積分可能である.

リーマン和の極限という定義に基づいて直接 2 重積分を計算するのは困難なので，累次化という操作により 1 変数関数の積分を 2 回行うことで積分を実行するのが普通である．

定理 1.5. （長方形領域上の 2 重積分の累次化）

関数 $f(x,y)$ が長方形領域 $K=[a,b]\times[c,d]$ 上で連続ならば，次の等式が成り立つ．

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

証明． これは後で説明する定理 1.18 の特別な場合なので，そちらでまとめて証明を述べることにする． □

$\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$ のように 1 変数関数の積分を連続して行うものを**累次積分**という．2 重積分（長方形領域を分割したリーマン和の極限）と累次積分（1 変数関数の積分を 2 回行うもの）は意味が異なるので注意すること．そのため，累次積分はかっこをつけて表している．被積分関数が連続ならば，これらが等しいということが定理の主張である．

累次積分と 2 重積分を区別するために

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy, \qquad \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$$

と表すこともある．ただし，この記法は計算ミスをしやすいので注意すること．

長方形領域 $K=[a,b]\times[c,d]$ 上の連続関数 $f(x,y)$ が，$[a,b]$ 上の連続関数 $\varphi(x)$ と $[c,d]$ 上の連続関数 $\psi(y)$ で

$$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$$

と表されている場合，$f(x,y)$ は**変数分離形**であるという．このような特殊な形の被積分関数については，2 重積分が次のように簡単に計算できる．

命題 1.6. （長方形領域上で変数分離された関数の 2 重積分）

$[a,b]$ 上の連続関数 $\varphi(x)$ と $[c,d]$ 上の連続関数 $\psi(y)$ に対して，積 $\varphi(x)\psi(y)$ の $K=[a,b]\times[c,d]$ 上の 2 重積分は

$$\iint_K \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \int_a^b \varphi(x)\,dx\int_c^d \psi(y)\,dy$$

となる．

証明． 累次化すれば

$$\iint_K \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b \varphi(x)\psi(y)\,dx\right)dy = \int_c^d \psi(y)\left(\int_a^b \varphi(x)\,dx\right)dy$$

であり，$\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx$ は定数であるから y に関する積分記号の前に出せて

$$\iint_K \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \int_a^b \varphi(x)\,dx\int_c^d \psi(y)\,dy$$

□

つまり，変数分離系の関数の 2 重積分は 1 変数関数の積分の積に分解できる．これは後で何度も用いるので，ぜひ使えるようにしておくのがよい．

例題 1.7. $K=[0,1]\times[0,1]$ のとき，$\displaystyle\iint_K (x^2+2xy)\,dx\,dy$ の値を求めよ．

（**解答 1**） 累次積分に直せば

$$\iint_K (x^2+2xy)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2+2xy)\,dy\right) dx = \int_0^1 \Big[x^2y+xy^2\Big]_{y=0}^{y=1} dx$$
$$= \int_0^1 (x^2+x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

（**解答 2**） 累次積分に直せば

$$\iint_K (x^2+2xy)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2+2xy)\,dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}+x^2y\right]_{x=0}^{x=1} dy$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}+y\right) dy = \left[\frac{y}{3}+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

（解答終）

例題 1.8. $K=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times[0,1]$ のとき，$J=\displaystyle\iint_K x\sin(xy)\,dx\,dy$ の値を求めよ．

（解答） 累次積分に直せば

$$J = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 x\sin(xy)\,dy\right)dx = \int_0^{\pi/2}\Big[-\cos(xy)\Big]_{y=0}^{y=1}dx$$
$$= \int_0^{\pi/2}(1-\cos x)\,dx = \Big[x-\sin x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}-1$$

（うまくない解答） 累次積分に直せば

$$J = \int_0^1\left(\int_0^{\pi/2} x\sin(xy)\,dx\right)dy$$

であり

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(xy)\,dx = \left[x\left(-\frac{\cos(xy)}{y}\right)\right]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos(xy)}{y}\,dx$$
$$= -\frac{\pi}{2y}\cos\frac{\pi y}{2} + \left[\frac{\sin(xy)}{y^2}\right]_{x=0}^{x=\pi/2} = -\frac{\pi}{2y}\cos\frac{\pi y}{2} + \frac{1}{y^2}\sin\frac{\pi y}{2}$$

となる．よって

$$J = \int_0^1\left(-\frac{\pi}{2y}\cos\frac{\pi y}{2}+\frac{1}{y^2}\sin\frac{\pi y}{2}\right)dy = \lim_{t\to+0}\left[-\frac{1}{y}\sin\frac{\pi y}{2}\right]_t^1 = \lim_{t\to+0}\left(\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{t}-1\right) = \frac{\pi}{2}-1$$

（解答終）

理論上は x と y のどちらの変数から積分してもよいことになっているが，実際に計算するときは不定積分が簡単に求められる変数から積分すること．上の例題のように積分する順番によって手間が大きく変わることもある．

例題 1.9.　$t>0$ のとき，$K_t = \{\,(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq t,\ 0 \leqq y \leqq t\,\}$ とする．このとき，2 重積分

$$J_t = \iint_{K_t} e^{-xy} \sin x \, dx \, dy$$

の値を計算することにより，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ の値を求めよ．

（解答）　累次化すれば

$$J_t = \int_0^t \left(\int_0^t e^{-xy} \sin x \, dy \right) dx = \int_0^t \left[-\frac{1}{x}\, e^{-xy} \sin x \right]_{y=0}^{y=t} dx = \int_0^t \frac{\sin x}{x}\,(1-e^{-tx})\, dx$$

となる．一方，別の累次化により

$$\begin{aligned} J_t = \int_0^t \left(\int_0^t e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy &= \int_0^t \left[\frac{e^{-xy}}{y^2+1}\,(-y\sin x - \cos x) \right]_{x=0}^{x=t} dy \\ &= \int_0^t \left\{ \frac{1}{y^2+1} - \frac{e^{-ty}}{y^2+1}\,(y \sin t + \cos t) \right\} dy \\ &= \mathrm{Tan}^{-1}\, t - \int_0^t \frac{e^{-ty}}{y^2+1}\,(y\sin t + \cos t)\, dy \end{aligned}$$

である．よって

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,(1-e^{-tx})\, dx = J_t = \mathrm{Tan}^{-1}\, t - \int_0^t \frac{e^{-ty}}{y^2+1}\,(y\sin t + \cos t)\, dy$$

より

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x}\, dx = \mathrm{Tan}^{-1}\, t + \int_0^t \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx - \int_0^t \frac{e^{-ty}}{y^2+1}\,(y\sin t + \cos t)\, dy$$

が成り立つ．ここで，$x \geqq |\sin x|$ $(x \geqq 0)$ より

$$\left| \int_0^t \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx \right| \leqq \int_0^t \left| \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx} \right| dx \leqq \int_0^t e^{-tx}\, dx = \left[-\frac{1}{t}\, e^{-tx} \right]_0^t = \frac{1-e^{-t^2}}{t} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (t \to \infty)$$

であり，コーシー・シュワルツの不等式より

$$|\, y \sin t + \cos t \,| \leqq \sqrt{y^2+1}\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{y^2+1}$$

より，上と同様にして

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \frac{e^{-ty}}{y^2+1}\,(y\sin t + \cos t)\, dy \right| &\leqq \int_0^t \left| \frac{e^{-ty}}{y^2+1}\,(y\sin t + \cos t) \right| dy \\ &\leqq \int_0^t \frac{e^{-ty}}{y^2+1} \sqrt{y^2+1}\, dy \\ &\leqq \int_0^t e^{-ty}\, dy \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (t \to \infty) \end{aligned}$$

が得られる．ゆえに

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \left\{ \mathrm{Tan}^{-1}\, t + \int_0^t \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx - \int_0^t \frac{e^{-ty}}{y^2+1}\,(y\sin t + \cos t)\, dy \right\} = \frac{\pi}{2} + 0 + 0 = \frac{\pi}{2}$$

（解答終）

積分値 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ は有名なものである．この値を計算する方法はいくつか知られているが，$\dfrac{\sin x}{x}$ の不定積分が具体的に求められないので工夫が必要なことも多い．

1.2　長方形領域上の 2 重積分の計算例

長方形領域上の積分については，x と y のうち不定積分が簡単に求められる方から積分すること．また，変数分離形については積分を分けておけば計算ミスをしにくいので，1 つの式が長くならないように工夫すること．

例題 1.10.　次の 2 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_K xy^2\,dx\,dy, \qquad K=[0,2]\times[0,3]$

(2) $\displaystyle\iint_K e^x\sin y\,dx\,dy, \qquad K=[0,1]\times[0,\pi]$

(3) $\displaystyle\iint_K \frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2}\,dx\,dy, \qquad K=[0,1]\times[0,\sqrt{3}\,]$

（解答）

(1)　累次積分に直せば，被積分関数が変数分離形なので

$$\iint_K xy^2\,dx\,dy=\int_0^2 x\,dx\int_0^3 y^2\,dy=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3=2\cdot 9=18$$

(2)　累次積分に直せば，被積分関数が変数分離形なので

$$\iint_K e^x\sin y\,dx\,dy=\int_0^1 e^x\,dx\int_0^\pi \sin y\,dy=\Big[e^x\Big]_0^1\Big[-\cos y\Big]_0^\pi=2(e-1)$$

(3)　累次積分に直せば，被積分関数は

$$\frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2}=\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

より変数分離形なので

$$\begin{aligned}\iint_K \frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2}\,dx\,dy&=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+y^2}\,dy\\&=\Big[\mathrm{Tan}^{-1}\,x\Big]_0^1\Big[\mathrm{Tan}^{-1}\,y\Big]_0^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

（解答終）

被積分関数が変数分離形でない場合の 2 重積分は累次化して計算する．問題によってはどちらの変数で先に積分するかが重要なこともあるので注意すること．

例題 1.11.　次の 2 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_K ye^{xy}\,dx\,dy, \qquad K=[0,1]\times[0,1]$

(2) $\displaystyle\iint_K y\cos(xy)\,dx\,dy, \qquad K=[0,1]\times[0,\pi]$

(3) $\displaystyle\iint_K \frac{y^2}{x^2y^2+1}\,dx\,dy, \qquad K=[0,1]\times[0,1]$

（解答）

(1)　累次積分に直せば

$$\iint_K ye^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^1 ye^{xy}\,dx\right)dy = \int_0^1\Big[e^{xy}\Big]_{x=0}^{x=1}dy = \int_0^1(e^y-1)\,dy = \Big[e^y-y\Big]_0^1 = e-2$$

(2)　累次積分に直せば

$$\iint_K y\cos(xy)\,dx\,dy = \int_0^\pi\left(\int_0^1 y\cos(xy)\,dx\right)dy = \int_0^\pi\Big[\sin(xy)\Big]_{x=0}^{x=1}dy = \int_0^\pi \sin y\,dy = \Big[-\cos y\Big]_0^\pi = 2$$

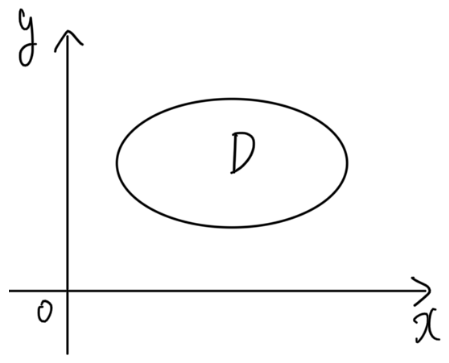
(3)　累次積分に直せば

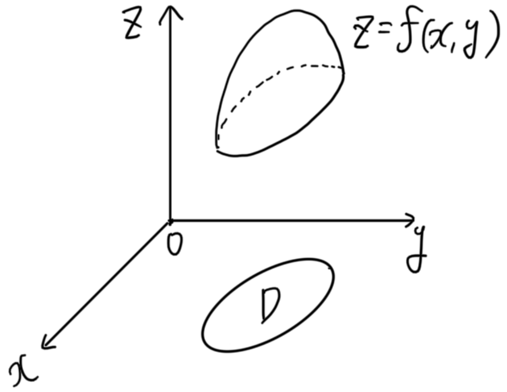
$$\begin{aligned}
\iint_K \frac{y^2}{x^2y^2+1}\,dx\,dy &= \int_0^1\left(\int_0^1\frac{y^2}{(xy)^2+1}\,dx\right)dy \\
&= \int_0^1\Big[y\,\mathrm{Tan}^{-1}(xy)\Big]_{x=0}^{x=1}dy \\
&= \int_0^1 y\,\mathrm{Tan}^{-1}\,y\,dy \\
&= \left[\frac{y^2}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,y\right]_0^1 - \int_0^1\frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\,dy \\
&= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)dy \\
&= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\Big[y-\mathrm{Tan}^{-1}\,y\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

（解答終）

1.3　一般の集合上の 2 重積分

D を $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合とし，$f(x,y)$ は D 上の有界な関数とする．このような閉長方形とは限らない場合の重積分を以下のように定義する．





定義 1.12. （2 重積分の定義）

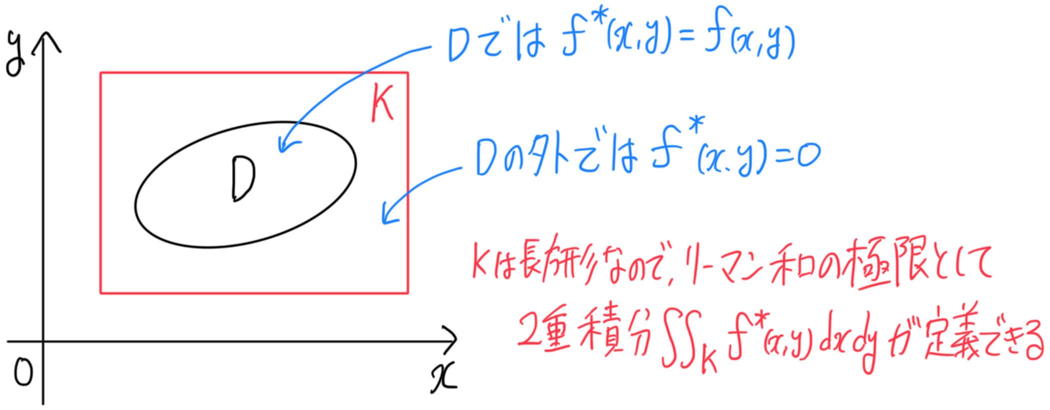
D を $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合とし，関数 $f(x,y)$ は D 上で有界とする．このとき，$D \subset K$ となる長方形領域 K を 1 つとり，K 上の関数 $f^*(x,y)$ を

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \big((x,y) \in D\big) \\ 0 & \big((x,y) \notin D\big) \end{cases}$$

とおく．$f^*(x,y)$ が K 上で重積分可能であるとき，$f(x,y)$ は D 上で**重積分可能**であるといい，その積分の値を

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy := \iint_K f^*(x,y)\,dx\,dy$$

と定義する．



定義 1.13. （面積の定義）

定数関数 1 が $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合 D 上で重積分可能であるとき，D は**面積確定**であるといい，その**面積** $|D|$ を

$$|D| := \iint_D 1\,dx\,dy$$

で定義する．

定理 1.14. （面積確定の必要十分条件）

$\mathbb{R}^2$ の有界集合 D が面積確定であるための必要十分条件は，D の境界 ∂D の面積が 0 であることである．

以下では常に積分範囲 D として面積確定な有界閉集合を考え，**積分領域**と呼ぶことにする．一般の積分領域についても，長方形領域上の重積分の場合と同様の定理が成り立つ．

定理 1.15. （重積分の性質）
関数 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ はともに積分領域 D 上で重積分可能とするとき，次が成り立つ．

(1) 定数 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して，関数 $\lambda f + \mu g$ も D 上で重積分可能で

$$\iint_D \{\lambda f(x,y) + \mu g(x,y)\}\, dx\, dy = \lambda \iint_D f(x,y)\, dx\, dy + \mu \iint_D g(x,y)\, dx\, dy$$

(2) D 上で $f(x,y) \leqq g(x,y)$ ならば

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \leqq \iint_D g(x,y)\, dx\, dy$$

(3) 関数 $|f(x,y)|$ も D 上で重積分可能で

$$\left| \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \right| \leqq \iint_D |f(x,y)|\, dx\, dy$$

定理 1.16. （連続関数の可積分性）
関数 $f(x,y)$ が積分領域 D 上で連続ならば，D 上で重積分可能である．

具体的に重積分を計算できるような積分領域として，特に以下のようなもの形のものを考える．

定義 1.17. （縦線集合）

D を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とする．

(1) D が閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$ を用いて

$$D = \{\,(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\,\}$$

と表されるとき，D は y **方向の縦線集合**であるという．

(2) D が閉区間 $[c,d]$ 上の連続関数 $\psi_1(y)$ と $\psi_2(y)$ を用いて

$$D = \{\,(x,y) \mid c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\,\}$$

と表されるとき，D は x **方向の縦線集合**であるという．

(3) D がどちらかの変数について縦線集合であるとき，単に D を**縦線集合**という．

y 方向の縦線集合

$$D = \{\,(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\,\}$$

は面積確定である．面積は次の定理 1.18 から

$$|D| = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1\,dy\right) dx = \int_a^b \{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\}\,dx$$

と計算できることがわかる．

定理 1.18. （縦線集合上の 2 重積分の累次化）

関数 $f(x,y)$ は積分領域 D 上で連続とする．

(1) D が y 方向の縦線集合 $D = \{\,(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\,\}$ であれば，次が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$$

(2) D が x 方向の縦線集合 $D = \{\,(x,y) \mid c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\,\}$ であれば，次が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy$$

証明． どちらも同様なので (1) のみ示す．

$D \subset K = [a,b] \times [c,d]$ となる長方形領域 K をとり，K 上の関数 $f^*(x,y)$ を定義 1.12 のように定義する．$f(x,y)$ は D 上で連続であるから，$f^*(x,y)$ は K 上で重積分可能である．また，x を固定すれば，$f^*(x,y)$ は D の境界上の有限個の y を除いて $[c,d]$ 上の連続関数であるから積分可能なので

$$F(x) = \int_c^d f^*(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

とおく．

$[a,b]$ の分割 $\Delta_1\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ と代表点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ を任意にとると，$F(x)$ のリーマン和は

$$S(F; \Delta_1, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

となる．ここで，$[c,d]$ の分割 $\Delta_2\colon c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ を $|\Delta_2| < |\Delta_1|$ となるようにとり，K の分割 $\Delta = \{(x_i, y_j)\}$ をつくり，$K_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ とおく．$f(x,y)$ は $K_{ij} \cap D$ 上で連続であるから，$f^*(x,y)$

は K_{ij} 上で最大値 M_{ij} と最小値 m_{ij} をとる．これらを実現する点をそれぞれ $(\xi_{ij}^{max}, \eta_{ij}^{max})$ と $(\xi_{ij}^{min}, \eta_{ij}^{min})$ とする．このとき，$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ より

$$m_{ij} \leqq f^*(\xi_i, y) \leqq M_{ij} \qquad (y_{j-1} \leqq y \leqq y_j)$$

なので，$[y_{j-1}, y_j]$ 上で積分すれば

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leqq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(\xi_i, y)\,dy \leqq M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

となる．よって，この両辺を $j = 1, 2, \ldots, n$ について加えると

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leqq \int_c^d f^*(\xi_i, y)\,dy \leqq \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

が成り立つ．この中辺は $F(\xi_i)$ であり，不等式に $x_i - x_{i-1}$ をかけてから $i = 1, 2, \ldots, m$ について加えると

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leqq \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leqq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

より

$$S(f^*; \Delta, \{(\xi_{ij}^{min}, \eta_{ij}^{min})\}) \leqq S(F; \Delta_1, \{\xi_i\}) \leqq S(f^*; \Delta, \{(\xi_{ij}^{max}, \eta_{ij}^{max})\})$$

が得られる．$|\Delta_1| \to 0$ のとき $|\Delta| \to 0$ であり，$f^*(x, y)$ は K 上での重積分可能なので

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(f^*; \Delta, \{(\xi_{ij}^{min}, \eta_{ij}^{min})\}) = \iint_K f^*(x, y)\,dx\,dy, \quad \lim_{|\Delta| \to 0} S(f^*; \Delta, \{(\xi_{ij}^{max}, \eta_{ij}^{max})\}) = \iint_K f^*(x, y)\,dx\,dy$$

であるから，はさみうちの定理より代表点 $\{\xi_i\}$ の選び方によらず

$$\lim_{|\Delta_1| \to 0} S(F; \Delta_1, \{\xi_i\}) = \iint_K f^*(x, y)\,dx\,dy$$

が成り立つ．ゆえに，$F(x)$ は $[a, b]$ 上で積分可能で

$$\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{|\Delta_1| \to 0} S(F; \Delta_1, \{\xi_i\}) = \iint_K f^*(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

である．したがって，$F(x)$ の決め方から

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

となる． $\square$

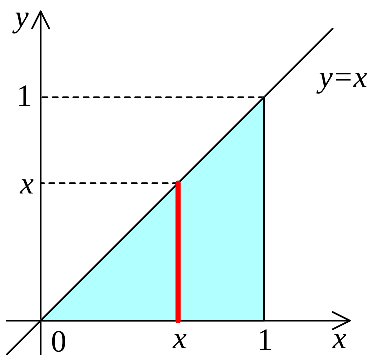
例題 1.19. $D = \{\,(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\,\}$ とする．このとき，2 重積分

$$\iint_D x^2 y\,dx\,dy$$

の値を求めよ．

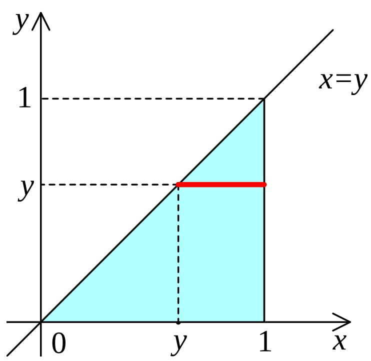
（解答 1） 累次積分に直せば

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 y\,dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^4}{2}\,dx = \left[\frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{10}\end{aligned}$$



（解答 2） $D = \{\,(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 1\,\}$ とみて累次積分に直せば

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_y^1 x^2 y\,dx\right) dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3 y}{3}\right]_{x=y}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \frac{y - y^4}{3}\,dy = \left[\frac{y^2}{6} - \frac{y^5}{15}\right]_0^1 = \frac{1}{10}\end{aligned}$$



（解答終）

解法 1 はまず x を固定して y から積分するものである．x を固定するので y の動く範囲は図の赤線の部分であるから，$y\colon 0 \to 1$ ではなく $y\colon 0 \to x$ となる．ここを間違えやすいので，領域を図示して確認すること．y について積分した後は x を $x\colon 0 \to 1$ と動かせば図の赤線が左から右へと移動し，積分領域 D 全体で積分したことになる．

解法 2 はまず y を固定して x から積分するものである．y を固定するので x の動く範囲は図の赤線の部分であるから，$x\colon 0 \to 1$ ではなく $x\colon y \to 1$ となる．x について積分した後は y を $y\colon 0 \to 1$ と動かせば図の赤線が下から上へと移動し，積分領域 D 全体で積分したことになる．

連続関数の 2 重積分は正しく計算すれば，その積分値は累次化の方法によらない．ただし，後の節で述べるように先に x で積分する場合だけ値が計算できるといった例が存在するので注意すること．

また，2 重積分は定積分なので計算結果は実数となる．もし計算結果が x や y の関数となった場合には，累次化や計算部分のどこかに必ず誤りがあるので見直すこと．

1.4　縦線集合上の 2 重積分の計算例

積分領域が複雑な場合には，領域を図示してどう累次化すればよいかを確認すること．その際には

- 境界線の方程式
- 積分計算に必要な点の座標（軸との交点・境界線の曲線の交点など）

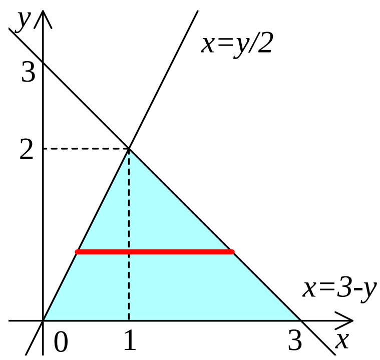
などを書き込み，縦線や横線（または斜線や塗りつぶし）により積分領域を示すこと．『自分がわかるから不要』ではなく，他人に読んでもらう答案の説明として必要です．

例題 1.20.　次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D (2x+3y)\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid x+y \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq 2x\,\}$$

（解答）　累次化すれば

$$\begin{aligned}
\iint_D (2x+3y)\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_{y/2}^{3-y} (2x+3y)\,dx \right) dy \\
&= \int_0^2 \Big[x^2 + 3xy \Big]_{x=y/2}^{x=3-y} dy \\
&= \int_0^2 \left(-\frac{15}{4}\,y^2 + 3y + 9 \right) dy \\
&= \left[-\frac{5}{4}\,y^3 + \frac{3}{2}\,y^2 + 9y \right]_0^2 = 14
\end{aligned}$$

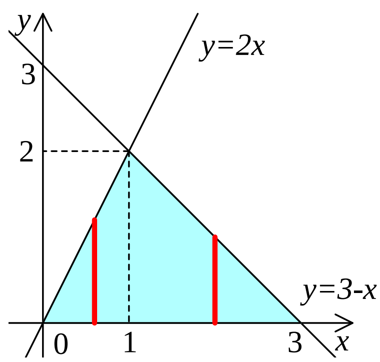


（解答終）

累次化の方法を変えても計算できるが，次のようになるのでどちらが簡単かは積分領域 D を図示して考えること．一般には境界線の場合分けが不要となるように累次化すればよいことが多い．

（うまくない解答）　累次化すれば

$$\begin{aligned}
&\iint_D (2x+3y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2x} (2x+3y)\,dy \right) dx + \int_1^3 \left(\int_0^{3-x} (2x+3y)\,dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[2xy + \frac{3}{2}\,y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} dx + \int_1^3 \left[2xy + \frac{3}{2}\,y^2 \right]_{y=0}^{y=3-x} dx \\
&= \int_0^1 10x^2\,dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{2}\,x^2 - 3x + \frac{27}{2} \right) dx \\
&= \left[\frac{10}{3}\,x^3 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{6}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{27}{2}\,x \right]_1^3 \\
&= \frac{10}{3} + \frac{32}{3} = 14
\end{aligned}$$



（解答終）

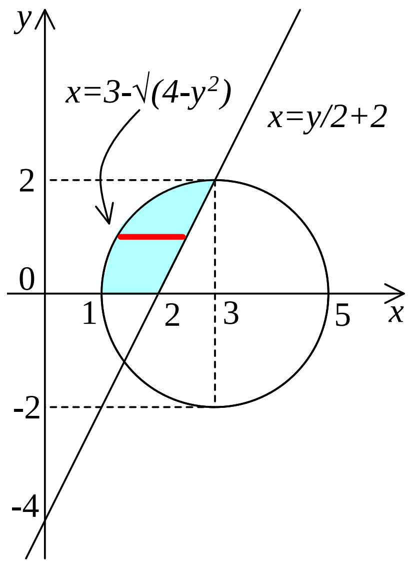
正しく解答できれば累次化の方法によらず答えの値はもちろん同じである．ただし，必要な計算量に差が出ることもあるので注意すること．

例題 1.21.　次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xy^2\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid (x-3)^2 + y^2 \leqq 4,\ 2(x-2) \leqq y,\ y \geqq 0\,\}$$

（解答）　求める積分値を I とおくと，累次化すれば

$$I = \iint_D xy^2\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{3-\sqrt{4-y^2}}^{(y+4)/2} xy^2\,dx \right) dy$$



である．ここで

$$\int_{3-\sqrt{4-y^2}}^{(y+4)/2} xy^2\,dx = \left[\frac{x^2y^2}{2} \right]_{x=3-\sqrt{4-y^2}}^{x=(y+4)/2}$$
$$= \frac{5}{8}\,y^4 + y^3 - \frac{9}{2}\,y^2 + 3y^2\sqrt{4-y^2}$$

より

$$I = \int_0^2 \left(\frac{5}{8}\,y^4 + y^3 - \frac{9}{2}\,y^2 + 3y^2\sqrt{4-y^2} \right) dy$$
$$= \left[\frac{1}{8}\,y^5 + \frac{1}{4}\,y^4 - \frac{3}{2}\,y^3 \right]_0^2 + 3\int_0^2 y^2\sqrt{4-y^2}\,dy$$
$$= -4 + 3\int_0^2 y^2\sqrt{4-y^2}\,dy$$

である．さらに，$y = 2\sin\theta$ とおけば，第 2 項の積分を J とおけば

$$J = \int_0^2 y^2\sqrt{4-y^2}\,dy = \int_0^{\pi/2} (2\sin\theta)^2\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} 16\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} 4\sin^2 2\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} 2(1-\cos 4\theta)\,d\theta = \left[2\theta - \frac{\sin 4\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi$$

より

$$I = -4 + 3J = 3\pi - 4$$

が求める値である．

（解答終）

J の値については

$$\int_0^{\pi/2} 16\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = 16\int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta - \sin^4\theta)\,d\theta = 16\left(\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} \right) = 8\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} \right) = \pi$$

と求めてもよい．よく出てくる積分値

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$$

の結果は憶えておくこと．

例題 1.22.　次の 2 重積分の値を求めよ．

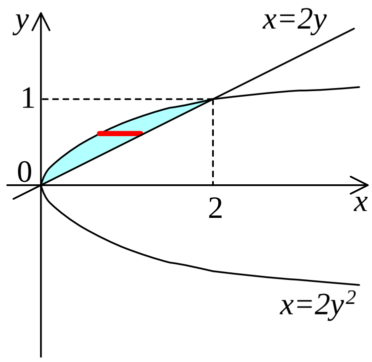
$$\iint_D \sqrt{x-2y^2}\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid 2y^2 \leqq x \leqq 2y\,\}$$

（解答）　求める積分値を I とおくと，累次化すれば

$$I = \iint_D \sqrt{x-2y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{2y^2}^{2y} \sqrt{x-2y^2}\,dx\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2}{3}\,(x-2y^2)^{3/2}\right]_{x=2y^2}^{x=2y} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{4\sqrt{2}}{3}\,(y-y^2)^{3/2}\,dy$$



である．ここで

$$y - y^2 = \frac{1}{4} - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

とみて $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sin\theta$ とおけば

$$I = \int_0^1 \frac{4\sqrt{2}}{3}\left\{\frac{1}{4} - \left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{3/2} dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\sqrt{2}}{3}\left|\frac{1}{2}\cos\theta\right|^3 \cdot \frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16\sqrt{2}}$$

（解答終）

例題 1.23.　次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \sin\frac{y}{x}\,dx\,dy, \qquad D = \left\{\,(x,y)\;\middle|\; 0 \leqq y \leqq \frac{\pi x}{2} \leqq \frac{\pi}{2},\ x \geqq \frac{1}{2}\,\right\}$$

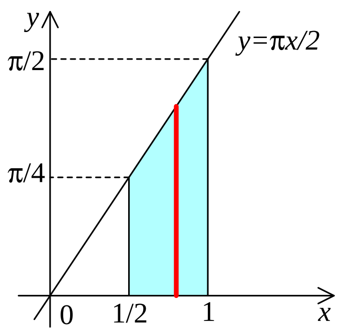
（解答）　累次化すれば

$$\iint_D \sin\frac{y}{x}\,dx\,dy = \int_{1/2}^1 \left(\int_0^{\pi x/2} \sin\frac{y}{x}\,dy\right) dx$$

$$= \int_{1/2}^1 \left[-x\cos\frac{y}{x}\right]_{y=0}^{y=\pi x/2} dx$$

$$= \int_{1/2}^1 x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^1 = \frac{3}{8}$$



（解答終）

1.5　積分順序の変更

関数 $f(x,y)$ が積分領域 D 上連続で，さらに積分領域 D が

$$\begin{aligned} D &= \{\,(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\,\} \\ &= \{\,(x,y) \mid c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\,\} \end{aligned}$$

のように x 方向と y 方向でともに縦線集合の場合には

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

が成り立つ．この 2 つの累次積分の一方から他方への書き換えを**積分順序の変更**という．

累次積分によっては積分順序を変更しなければ値を求められないものもある．

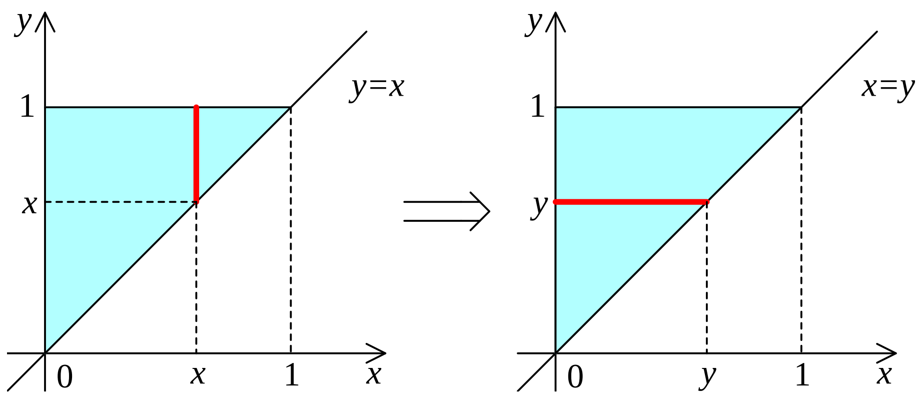
例題 1.24.　次の累次積分の値を求めよ．

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2}\,dy \right) dx$$

（解答）　図より，積分領域を

$$\begin{aligned} D &= \{\,(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq 1\,\} \\ &= \{\,(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y\,\} \end{aligned}$$

と見て積分順序を変更すれば



$$\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2}\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2}\,dx \right) dy = \int_0^1 y e^{y^2}\,dy = \left[\frac{1}{2}\, e^{y^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

（解答終）

例題 1.24 はそのまま計算しようと思っても，不定積分 $\displaystyle\int e^{y^2}\,dy$ が計算できないので実行不可能である．このように不定積分が初等関数を用いて求まらない場合には，積分順序の変更を検討してみるとよい．また，前節でも扱ったように積分する変数の順番により計算量が大幅に異なることもあるので，そのときにも積分の順序変更が有効なこともある．

最初のうちはどのように変更すればよいかが理解しにくいので，しっかり積分領域を図示して縦線集合としての表し方を把握できるよう計算練習すること．

1.6 積分順序の変更を利用した累次積分の計算例

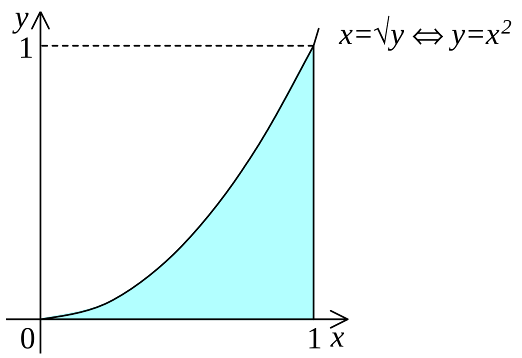
積分順序を変更する際には，必ず積分領域を図示して説明すること．

例題 1.25. 次の累次積分の値を求めよ．

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx \right) dy$$

（解答） 図より，積分領域を

$$D = \{ (x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ \sqrt{y} \leqq x \leqq 1 \}$$
$$= \{ (x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x^2 \}$$



と見て積分順序を変更すれば

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} e^{x^3} dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$$
$$= \left[\frac{1}{3} e^{x^3} \right]_0^1 = \frac{e-1}{3}$$

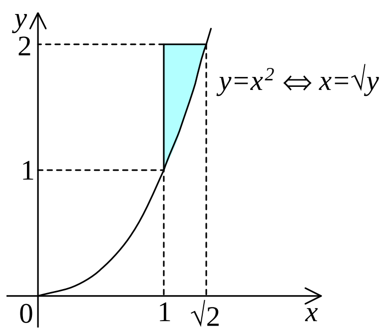
（解答終）

例題 1.26. 次の累次積分の値を求めよ．

$$\int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^2 \frac{1}{y^2} e^{x/\sqrt{y}} dy \right) dx$$

（解答） 図より，積分領域を

$$D = \{ (x,y) \mid 1 \leqq x \leqq \sqrt{2},\ x^2 \leqq y \leqq 2 \}$$
$$= \{ (x,y) \mid 1 \leqq y \leqq 2,\ 1 \leqq x \leqq \sqrt{y} \}$$



と見て積分順序を変更すれば

$$\int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^2 \frac{1}{y^2} e^{x/\sqrt{y}} dy \right) dx = \int_1^2 \left(\int_1^{\sqrt{y}} \frac{1}{y^2} e^{x/\sqrt{y}} dx \right) dy$$
$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{y\sqrt{y}} e^{x/\sqrt{y}} \right]_{x=1}^{x=\sqrt{y}} dy$$
$$= \int_1^2 \frac{1}{y\sqrt{y}} (e - e^{1/\sqrt{y}})\, dy = \left[-\frac{2e}{\sqrt{y}} + 2e^{1/\sqrt{y}} \right]_1^2 = 2e^{1/\sqrt{2}} - \sqrt{2}\, e$$

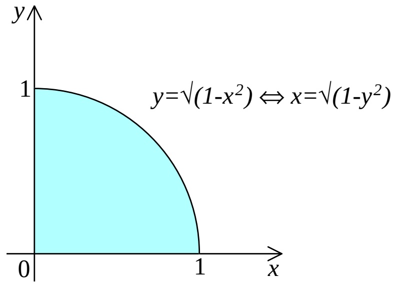
（解答終）

例題 1.27. 次の累次積分の値を求めよ.

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{3/2}\, dy \right) dx$$

（解答） 図より，積分領域を

$$D = \{\, (x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\,\}$$
$$= \{\, (x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2}\,\}$$



と見て積分順序を変更すれば

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{3/2}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (1-y^2)^{3/2}\, dx \right) dy$$
$$= \int_0^1 (1-y^2)^2\, dy$$
$$= \int_0^1 (y^4 - 2y^2 + 1)\, dy = \left[\frac{1}{5}\, y^5 - \frac{2}{3}\, y^3 + y \right]_0^1 = \frac{8}{15}$$

（解答終）

2　2 重積分の変数変換

2.1　行列式とその幾何学的意味

2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，その行列式は

$$\det A = ad - bc$$

で定義されていた．ここで，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおき，行列式の意味を幾何学的な視点から考察してみる．

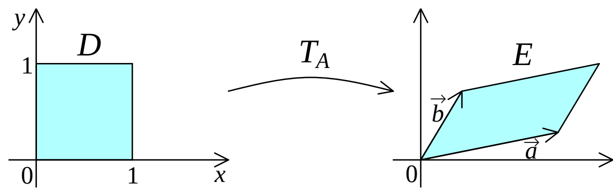
$\mathbb{R}^2$ の線形変換 T_A を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定めると，$\mathbb{R}^2$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して

$$T_A(\boldsymbol{e}_1) = A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}, \qquad T_A(\boldsymbol{e}_2) = A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

となる．

$\det A = ad-bc \fallingdotseq 0$ のときには，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ はともに $\boldsymbol{0}$ でなく平行でもないから 1 次独立である．よって，この 2 本のベクトルから作られる平行四辺形 E の面積 S は

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} = |\,ad-bc\,| = |\det A|$$

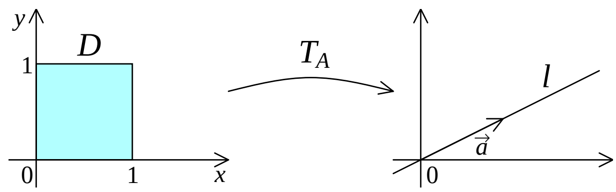


となる．また，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ がつくる正方形 D に属する点の位置ベクトルは $s\boldsymbol{e}_1 + t\boldsymbol{e}_2$ $(s,\,t\in[0,1])$ と表せるから

$$T_A(s\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2) = s\,T_A(\boldsymbol{e}_1)+t\,T_A(\boldsymbol{e}_2) = s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\in E \qquad (s,\,t\in[0,1])$$

であり，正方形 D は線形変換 T_A により平行四辺形 E に写ることがわかる．正方形 D の面積は 1，平行四辺形 E の面積は $|\det A|$ であるから，線形変換 T_A により図形の面積は $|\det A|$ 倍されていることになる．長方形の場合にも同様の計算により T_A で写せば面積は $|\det A|$ 倍されることがわかる．

$\det A = ad-bc = 0$ のときには，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は 1 次従属になる．もし $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ ならば，$A=O$ となり T_A により平面内のすべての点は原点に写る．そこで，$\boldsymbol{a}\fallingdotseq\boldsymbol{0}$ の場合を考えることにする．このとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は平行であるから，$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ となる実数 k が存在する（$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ でも $k=0$ とすればよい）．よって，$\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ を T_A で写すと



$$T_A(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2) = x\,T_A(\boldsymbol{e}_1)+y\,T_A(\boldsymbol{e}_2) = x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b} = (x+ky)\boldsymbol{a}$$

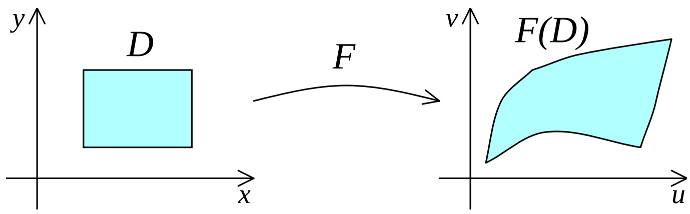
となる．よって，平面の任意の点は原点を通り $\boldsymbol{a}$ を方向ベクトルとする直線 l 上の点に写ることになる．このときは正方形や円など有界などんな図形を写しても線分となるが，便宜上この場合は線分の面積が 0 であると約束すれば，線形変換 T_A により図形の面積は $|\det A| = 0$ 倍されていることになる．

このように，長方形を線形変換 T_A で写したときの像の面積は元の長方形の $|\det A|$ 倍となっていることがわかる．一般の図形でもこれは正しいが，これは 2 重積分の変数変換のところで説明することにする．大雑把に述べれば，平面図形の中に小さな正方形を敷き詰めていけば各正方形の面積倍率は $|\det A|$ であるから，全体としても $|\det A|$ 倍されるということである．

2.2　ヤコビアン

D を $\mathbb{R}^2$ の開集合とし，2 つの関数

$$\varphi(x,y),\ \psi(x,y)\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$



は C^1 級とする．このとき

$$u=\varphi(x,y), \quad v=\psi(x,y)$$

$$F\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y)=\begin{pmatrix}\varphi(x,y)\\ \psi(x,y)\end{pmatrix}$$

とおく．この F は xy 平面内の開集合 D から uv 平面の部分集合 $F(D)$ への写像である．また，$F(x,y)$ の各成分である $\varphi(x,y)$ と $\psi(x,y)$ はともに C^1 級なので，F は D 上で C^1 級であるという．

一般に $F(x,y)$ は複雑な形をしているので，1 次近似がどのような形になるかを考えてみる．そのためには各成分である $\varphi(x,y)$ と $\psi(x,y)$ を漸近展開すればよい．そこで，$r=\sqrt{h^2+k^2}$ とおいて，$r\to+0$ のとき

$$\varphi(x+h,y+k)=\varphi(x,y)+\varphi_x(x,y)h+\varphi_y(x,y)k+o(r)$$

$$\psi(x+h,y+k)=\psi(x,y)+\psi_x(x,y)h+\psi_y(x,y)k+o(r)$$

と表せば

$$\begin{aligned} F(x+h,y+k)=\begin{pmatrix}\varphi(x+h,y+k)\\ \psi(x+h,y+k)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\varphi(x,y)+\varphi_x(x,y)h+\varphi_y(x,y)k+o(r)\\ \psi(x,y)+\psi_x(x,y)h+\psi_y(x,y)k+o(r)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\varphi(x,y)\\ \psi(x,y)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varphi_x(x,y)h+\varphi_y(x,y)k\\ \psi_x(x,y)h+\psi_y(x,y)k\end{pmatrix}+o(r)\\ &= F(x,y)+\begin{pmatrix}\varphi_x(x,y) & \varphi_y(x,y)\\ \psi_x(x,y) & \psi_y(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}+o(r)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}$ とおけば，この式は

$$F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})=F(\boldsymbol{x})+\begin{pmatrix}\varphi_x(\boldsymbol{x}) & \varphi_y(\boldsymbol{x})\\ \psi_x(\boldsymbol{x}) & \psi_y(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\boldsymbol{h}+o(r)$$

と表せて，これは順番に $\boldsymbol{h}$ に関する定数項，1 次の項，2 次以上の項と並んでいる．そこでテイラー展開の公式を思い出せば，1 次の項の係数行列 $\begin{pmatrix}\varphi_x(x,y) & \varphi_y(x,y)\\ \psi_x(x,y) & \psi_y(x,y)\end{pmatrix}$ が $F(x,y)$ の導関数と考えるのが自然である．そのため，この行列を F のヤコビ行列と呼び，F の導関数と考えて

$$DF(x,y)=\begin{pmatrix}\varphi_x(x,y) & \varphi_y(x,y)\\ \psi_x(x,y) & \psi_y(x,y)\end{pmatrix}$$

のように表すことが多い．

以上の考察より，$F(x+h,y+k)-F(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換 $\begin{pmatrix}\varphi_x(x,y) & \varphi_y(x,y)\\ \psi_x(x,y) & \psi_y(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}$ で近似できることがわかる．そのため，$\begin{pmatrix}\varphi_x(x,y) & \varphi_y(x,y)\\ \psi_x(x,y) & \psi_y(x,y)\end{pmatrix}$ の行列式は次節で述べる 2 重積分の変数変換公式など多くの場面で重要な役割を果たす．そこで，次のように用語を定義しておく．

定義 2.1. （ヤコビアン）

$u=\varphi(x,y),\ v=\psi(x,y)$ がともに C^1 級であるとき，次の行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varphi_x(x,y) & \varphi_y(x,y)\\ \psi_x(x,y) & \psi_y(x,y)\end{vmatrix}$$

を写像 $(x,y)\longmapsto(u,v)=(\varphi(x,y),\,\psi(x,y))$ の**ヤコビアン**という．

例題 2.2. a,b,c,d を定数とするとき，写像 $u=ax+by,\ v=cx+dy$ のヤコビアン $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ を求めよ．

（解答） 偏導関数を計算すれば

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a,\qquad \frac{\partial u}{\partial v}=b,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=c,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=d$$

であるから

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

（解答終）

この例題は実際には何も計算しなくてよい．なぜならば，写像は $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ と表せるので，1 次近似の必要もなくこれは線形変換である．よって，ヤコビアンの定義より

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$$

が成り立つことがわかる．

例題 2.3. 次の写像のヤコビアン $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ を求めよ．

(1) $u=x-y,\ v=xy$　　(2) $u=x^2-y^2,\ v=2xy$

（解答）

(1) 偏導関数を計算すれば

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-1,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=x$$

であるから

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ y & x\end{vmatrix}=x+y$$

(2) 偏導関数を計算すれば

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=2y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2x$$

であるから

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{vmatrix}=4(x^2+y^2)$$

（解答終）

次の例は極座標変換のヤコビアンとして今後何度も用いるものである．

例題 2.4.　写像 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

（解答）　偏導関数を計算すれば

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

であるから

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

（解答終）

例題 2.5.　写像 $r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ のヤコビアン $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$ を求めよ．

（解答）　偏導関数を計算すれば

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

であるから

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

（解答終）

$r > 0,\ -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で考えれば

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad \Longleftrightarrow \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$$

が成り立ち，さらに例題 2.4 と例題 2.5 より

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r, \qquad \frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$$

であるから

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\cdot\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = 1$$

となっている．このように，ある写像のヤコビアンとその逆写像のヤコビアンは互いに逆数の関係となっている．この事実を用いればヤコビアンを簡単に計算できることもあるが，やや高度な内容なのでここでは触れるだけにしておく．

写像 $F\colon D(\subset \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を C^1 級とする．このとき，F のヤコビアンが 0 にならなければ，F は単射となることがわかる．よって，F の値域を制限して $F\colon D \longrightarrow F(D)$ とすればこれは全単射であり，その逆写像 $F^{-1}\colon F(D) \longrightarrow D$ も C^1 級となる．ただし，この『逆写像定理』の証明は複雑なので，ここでは定理を紹介するにとどめる．感覚的にはヤコビアンが 0 でなければ，1 次近似の係数行列が正則で逆行列をもつので，局所的には全単射であり逆行列が導関数となる写像が逆写像となっているということである．

2.3 変数変換公式

定理 2.6. （変数変換）

関数 $f(x,y)$ は積分領域 D 上で連続とする．また，C^1 級の変換 $x=\varphi(s,t),\ y=\psi(s,t)$ により D は st 平面の積分領域 E と一対一に対応するとする．この変換のヤコビアンが $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \fallingdotseq 0$ をみたすならば

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\bigl(\varphi(s,t),\psi(s,t)\bigr)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|\,ds\,dt$$

が成り立つ．

厳密な証明はかなり複雑になるので，大まかな方針を述べる．応用上はこの程度の理解で十分である．

証明． 変数変換を表す写像を

$$g\colon E \longrightarrow D, \qquad g(s,t)=\begin{pmatrix}\varphi(s,t)\\ \psi(s,t)\end{pmatrix}$$

とおく．後の便宜上，縦ベクトルで書いておく．

積分領域 E を含む長方形領域 $K=[a,b]\times[c,d]$ を 1 つ固定する．K の任意の分割 $\Delta=\{(s_i,t_j)\}_{ij}$ を

$$a=s_0<s_1<s_2<\cdots<s_{m-1}<s_m=b, \qquad c=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=d$$

とし，小長方形 K_{ij} を

$$K_{ij}=[s_{i-1},s_i]\times[t_{j-1},t_j] \qquad (i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n)$$

とおく．

E に含まれる小長方形 K_{ij} について，K_{ij} を変換 g で写して現れる xy 平面の微小部分 $g(K_{ij})$（これは長方形とは限らない）の面積 ΔS_{ij} を以下のように近似する．K_{ij} から 1 点 (ξ_{ij},η_{ij}) をとれば，テイラーの定理より $r=\sqrt{h^2+k^2}\to +0$ のとき

$$\begin{aligned}\varphi(\xi_{ij}+h,\eta_{ij}+k)&=\varphi(\xi_{ij},\eta_{ij})+\varphi_s(\xi_{ij},\eta_{ij})h+\varphi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})k+o(r)\\ \psi(\xi_{ij}+h,\eta_{ij}+k)&=\psi(\xi_{ij},\eta_{ij})+\psi_s(\xi_{ij},\eta_{ij})h+\psi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})k+o(r)\end{aligned}$$

より

$$g(\xi_{ij}+h,\eta_{ij}+k)=g(\xi_{ij},\eta_{ij})+\begin{pmatrix}\varphi_s(\xi_{ij},\eta_{ij}) & \varphi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})\\ \psi_s(\xi_{ij},\eta_{ij}) & \psi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}+o(r)$$

が成り立つ．よって，$|h|$ と $|k|$ が十分小さければ，変換 g は点 (ξ_{ij},η_{ij}) の周りで，行列

$$\begin{pmatrix}\varphi_s(\xi_{ij},\eta_{ij}) & \varphi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})\\ \psi_s(\xi_{ij},\eta_{ij}) & \psi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})\end{pmatrix}$$

が定める線形変換で近似できる．つまり，(h,k) だけずれたときの値の変化は，この変位ベクトル（を縦にしたもの）に上の行列をかければ近似できている．上のヤコビ行列から定まる線形変換による面積の変換倍率は，その行列式の絶対値なので $\left|\det\begin{pmatrix}\varphi_s(\xi_{ij},\eta_{ij}) & \varphi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})\\ \psi_s(\xi_{ij},\eta_{ij}) & \psi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})\end{pmatrix}\right|$ で表される．ゆえに

$$\Delta S_{ij} \fallingdotseq \left|\det\begin{pmatrix}\varphi_s(\xi_{ij},\eta_{ij}) & \varphi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})\\ \psi_s(\xi_{ij},\eta_{ij}) & \psi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})\end{pmatrix}\right| m(K_{ij})$$

となる．K_{ij} が E の境界と交わる場合は，分割を細かくしていくと小長方形の面積が小さくなっていき寄与が無視できることがわかる．

したがって，小長方形 K_{ij} の添え字 i,j について和をとれば

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j} f\bigl(\varphi(\xi_{ij},\eta_{ij}),\psi(\xi_{ij},\eta_{ij})\bigr)\Delta S_{ij} \\
&\qquad\qquad \fallingdotseq \sum_{i,j} f\bigl(\varphi(\xi_{ij},\eta_{ij}),\psi(\xi_{ij},\eta_{ij})\bigr)\left|\det\begin{pmatrix}\varphi_s(\xi_{ij},\eta_{ij}) & \varphi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})\\ \psi_s(\xi_{ij},\eta_{ij}) & \psi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})\end{pmatrix}\right| m(K_{ij})
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

となる．(2.1)の右辺は関数 $f\bigl(\varphi(s,t),\psi(s,t)\bigr)\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|$ の K の分割 Δ と代表点 $\{(\xi_{ij},\eta_{ij})\}$ に関するリーマン和なので，$|\Delta|\to 0$ とすれば

$$
\begin{aligned}
&\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i,j} f\bigl(\varphi(\xi_{ij},\eta_{ij}),\psi(\xi_{ij},\eta_{ij})\bigr)\left|\det\begin{pmatrix}\varphi_s(\xi_{ij},\eta_{ij}) & \varphi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})\\ \psi_s(\xi_{ij},\eta_{ij}) & \psi_t(\xi_{ij},\eta_{ij})\end{pmatrix}\right| m(K_{ij}) \\
&\qquad\qquad = \iint_E f\bigl(\varphi(s,t),\psi(s,t)\bigr)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| ds\,dt
\end{aligned}
$$

が成り立つ．(2.1)の左辺は（関数 $f(x,y)$ の代表点 $\bigl(\varphi(\xi_{ij},\eta_{ij}),\psi(\xi_{ij},\eta_{ij})\bigr)$ での値）×（微小面積 ΔS_{ij}）の形なので，適切なリーマン和で近似することができて

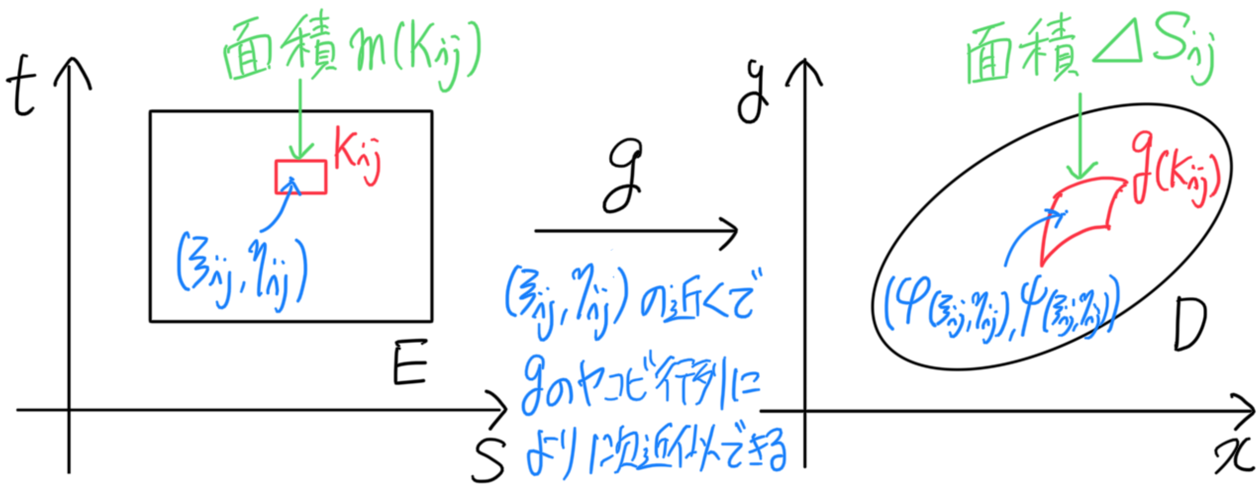
$$
\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i,j} f\bigl(\varphi(\xi_{ij},\eta_{ij}),\psi(\xi_{ij},\eta_{ij})\bigr)\Delta S_{ij} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy
$$

もわかる．さらに，$|\Delta|\to 0$ とすれば，(2.1)における近似のずれも 0 に近づくので，結果として

$$
\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\bigl(\varphi(s,t),\psi(s,t)\bigr)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| ds\,dt
$$

が成り立つ． □

証明からわかるように，局所的な面積の変換倍率として，変数変換の 1 次近似として得られるヤコビ行列の行列式の絶対値が現れている．これが変数変換後にヤコビアンの絶対値が必要な理由である．



注意 2.7.　変換が一対一であるという仮定は重要である．しかし，変換が一対一でなくても面積が 0 である部分を除いて変換が一対一であれば変数変換の公式は成り立つ．ヤコビアンが 0 でないという仮定も面積が 0 でない部分を除いて成り立っていればよい．

2.4　極座標変換（円の中心が原点の場合）

定理 2.8.（極座標変換）

D は xy 平面の積分領域とし，関数 $f(x,y)$ は D 上で連続とする．極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により D は $r\theta$ 平面の積分領域 E に一対一に対応するとする．このとき

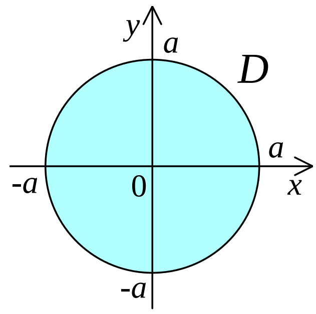
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

となる．

証明.　極座標変換のヤコビアンは例題 2.4 より $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ となるので，変数変換公式より成り立つ．　□

例えば，$a > 0$ とするとき，積分領域が

$$D = \{\,(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq a^2\,\}$$

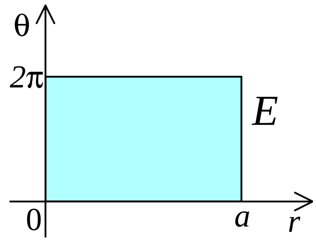


ならば，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により

$$E = \{\,(r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\,\}$$

に対応する．ただし，この D と E の対応は一対一とはならない．実際，$r = 0$ のときは θ の値によらず $x = y = 0$ となるから

$$(0,0) \in D \quad \longleftrightarrow \quad \{\,(0,\theta) \in E \mid 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\,\} \subset E$$



と対応してしまう．また，$r > 0$ でも $\theta = 0$ と $\theta = 2\pi$ のときには xy 平面で同じ点を表している．つまり

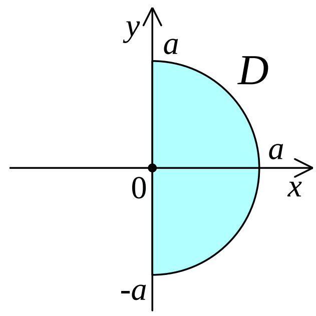
$$(r,0) \in D \quad \longleftrightarrow \quad \{\,(r,0),\,(r,2\pi)\,\} \subset E$$

と対応している．さらに，$r = 0$ ではヤコビアンが $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r = 0$ となってしまう．ゆえに，厳密には重積分の変数変換公式の仮定をみたしていない．

しかし，上記のように一対一対応していないのは長方形領域 E の辺の一部，つまり E の面積 0 の部分である．また，ヤコビアンが 0 となるのも E の面積 0 の部分である．そのため，注意事項で述べたように変数変換公式が適用できて正しく計算できる．このように点や線分など面積 0 の部分は気にしなくてもよい．

積分領域 D が円全体でない場合には，偏角 θ がとりうる範囲を適切に定める必要がある．例えば，$a > 0$ のとき

$$D = \{\,(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0\,\}$$

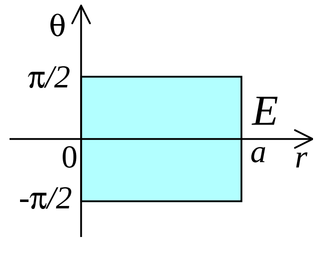


ならば，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により

$$E = \left\{\,(r,\theta)\ \middle|\ 0 \leqq r \leqq a,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\,\right\}$$

に対応する．このように簡単な図を描いて θ の範囲を間違えないようにすること．この対応も一対一ではないが，そのような部分は面積 0 なので議論には影響しない．

以下の例題の解説においては，極座標変換で一対一でない部分やヤコビアンが 0 となる部分が面積 0 であることをいちいち断らないことにする．



2.5　極座標変換の計算例 1（円の中心が原点の場合）

例題 2.9.　$a > 0$ とする．次の 2 重積分の値を求めよ．

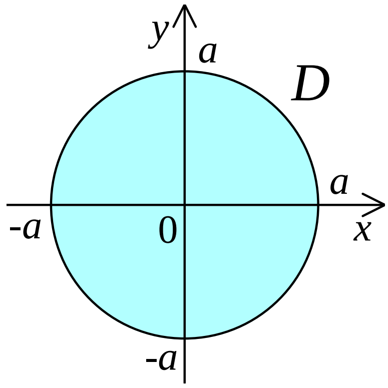
$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy, \qquad D = \{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq a^2 \,\}$$

（解答）　極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D は

$$E = \{\, (r, \theta) \mid 0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \,\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ である．よって

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy &= \iint_E \sqrt{a^2 - r^2} \cdot r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}\, dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}\,(a^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^a = \frac{2\pi}{3}\, a^3\end{aligned}$$



（解答終）

例題 2.10.　次の 2 重積分の値を求めよ．

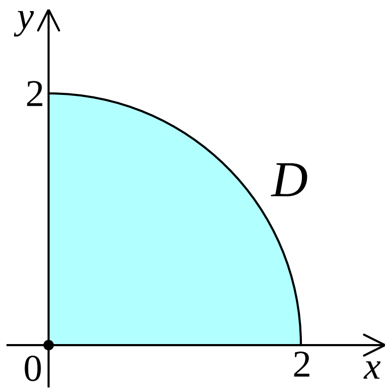
$$\iint_D y(x^2 + y^2)^2\, dx\, dy, \qquad D = \{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \,\}$$

（解答）　極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D は

$$E = \left\{\, (r, \theta) \;\middle|\; 0 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \,\right\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ である．よって

$$\begin{aligned}\iint_D y(x^2 + y^2)^2\, dx\, dy &= \iint_E (r\sin\theta) r^4 \cdot r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^2 r^6\, dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \\ &= \left[\frac{r^7}{7} \right]_0^2 \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{128}{7}\end{aligned}$$



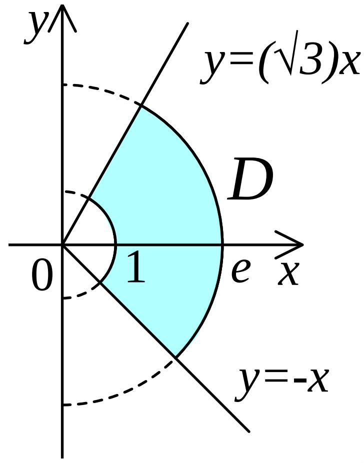
（解答終）

例題 2.11.　次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \qquad D=\{\,(x,y)\mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq e^2,\ -x \leqq y \leqq \sqrt{3}\,x\,\}$$

（解答）　極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，D は

$$E=\left\{\,(r,\theta)\ \middle|\ 1 \leqq r \leqq e,\ -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}\,\right\}$$



に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ である．よって

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy &= \iint_E \frac{\log r^2}{r}\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^e \log r\,dr \\
&= 2\cdot\frac{7\pi}{12}\Big[r\log r - r\Big]_1^e = \frac{7}{6}\,\pi
\end{aligned}$$

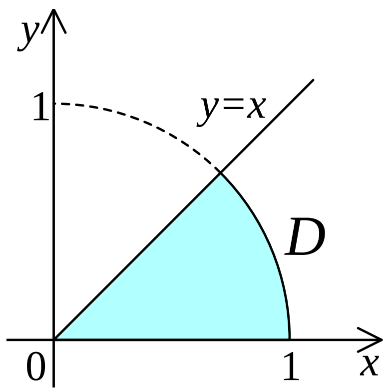
（解答終）

例題 2.12.　次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \log(1+x^2+y^2)\,dx\,dy, \qquad D=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\,\}$$

（解答）　極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，D は

$$E=\left\{\,(r,\theta)\ \middle|\ 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\,\right\}$$



に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ である．よって

$$\begin{aligned}
\iint_D \log(1+x^2+y^2)\,dx\,dy &= \iint_E \log(1+r^2)\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 r\log(1+r^2)\,dr \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\left[\frac{1+r^2}{2}\log(1+r^2)\right]_0^1 - \int_0^1 r\,dr\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

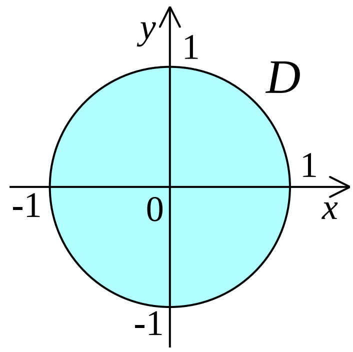
（解答終）

例題 2.13.　次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\,\}$$

（解答）　極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D は

$$E = \{\,(r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\,\}$$



に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ である．よって，求める積分値を I とおけば

$$\begin{aligned} I = \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy &= \iint_E \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} \cdot r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,dr \end{aligned}$$

となる．ここで，$t = \sqrt{\dfrac{1-r^2}{1+r^2}}$ とおけば

$$\begin{array}{c|ccc} r & 0 & \to & 1 \\ \hline t & 1 & \to & 0 \end{array} \qquad r^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1 + \frac{2}{1+t^2} \qquad \therefore\ r\,dr = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

より

$$I = 2\pi \int_1^0 t \cdot \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,dt = -2\pi\left(\left[t \cdot \frac{1}{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt\right) = -\pi + 2\pi\left[\,\mathrm{Tan}^{-1}\,t\,\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{2} - \pi$$

（解答終）

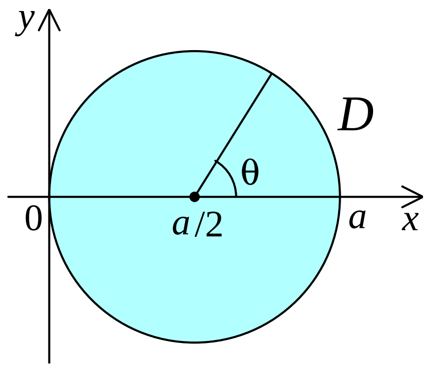
2.6　極座標変換（円の中心が原点でない場合）

積分領域が中心が原点ではない円（の一部）の場合には，極座標変換は複数考えられることがある．例えば，$a>0$ のとき

$$D=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2\leqq ax\,\}$$

が積分領域であるとする．

D を定める不等式は



$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\leqq\frac{a^2}{4}$$

と変形できて，これは中心 $\left(\frac{a}{2},0\right)$，半径 $\frac{a}{2}$ の円の境界または内部だから

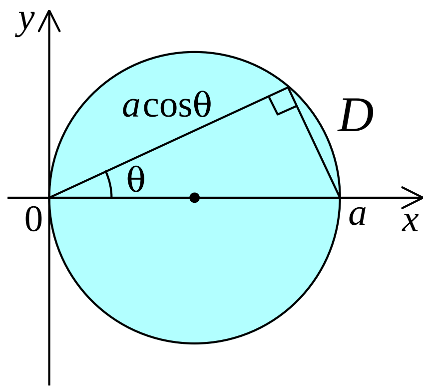
$$x=\frac{a}{2}+r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

とおけば，D は

$$E_1=\left\{\,(r,\theta)\;\middle|\;0\leqq\theta\leqq2\pi,\ 0\leqq r\leqq\frac{a}{2}\,\right\}$$

に対応する．偏角 θ は円の中心から測っているので 1 周分 $\theta\colon 0\to2\pi$ まで動く．また，θ を固定すれば r は 0 から円の半径まで動くから $r\colon 0\to\frac{a}{2}$ となる．

一方，別の変数変換として



$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

と極座標に変換すれば，D は

$$E_2=\left\{\,(r,\theta)\;\middle|\;-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\ 0\leqq r\leqq a\cos\theta\,\right\}$$

に対応する．この場合は偏角 θ は原点から測っているので，円が第 1 象限と第 4 象限にあることから $\theta\colon -\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$ まで動く．また，θ を固定すれば r の範囲は右図より $r\colon 0\to a\cos\theta$ となり，極座標変換だが積分領域 E_2 は $r\theta$ 平面の長方形領域とはならない．

この 2 種類の大きな違いは，変換後の積分領域が長方形か否かということ，および原点からの距離 x^2+y^2 が簡単な形になるか否かということである．そのため，被積分関数と積分領域の形に応じて適切な方を選ばなければならない．後で見るように単純な計算問題ならばどちらでも積分値を求められるが，場合によってはどちらか一方でしか答えに到達できないことも多い．

円の中心が y 軸上にあって原点を通る場合にも同様に 2 通りの極座標変換が考えられる．例えば $a>0$ として

$$D=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2\leqq ay\,\}$$

のとき，極座標変換 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ により，D は

$$E=\{\,(r,\theta)\mid 0\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq r\leqq a\sin\theta\,\}$$

に対応する．後の例題で解説するが，各自で図を描いて理由を考えてみよ．

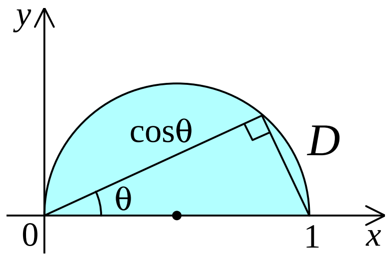
2.7　極座標変換の計算例 2（円の中心が原点でない場合）

例題 2.14.　次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xy\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq x,\ y \geqq 0\,\}$$

（**解答 1**）　極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D は

$$E = \left\{ (r,\theta) \,\middle|\, 0 \leqq r \leqq \cos\theta,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$$

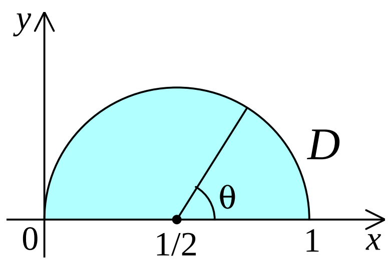


に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ である．よって

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dx\,dy &= \iint_E r^2\cos\theta\sin\theta \cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos\theta} r^3\cos\theta\sin\theta\,dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\cos^5\theta\sin\theta\,d\theta \\
&= \left[-\frac{\cos^6\theta}{24} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

（**解答 2**）　極座標変換 $x = \dfrac{1}{2} + r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D は

$$E = \left\{ (r,\theta) \,\middle|\, 0 \leqq r \leqq \frac{1}{2},\ 0 \leqq \theta \leqq \pi \right\}$$



に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ である．よって

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dx\,dy &= \iint_E \left(\frac{1}{2} + r\cos\theta\right) r\sin\theta \cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{1/2} \left\{ \int_0^{\pi} \left(\frac{r^2}{2}\sin\theta + r^3\sin\theta\cos\theta \right) d\theta \right\} dr \\
&= \int_0^{1/2} \left[-\frac{r^2}{2}\cos\theta + \frac{r^3}{2}\sin^2\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr \\
&= \int_0^{1/2} r^2\,dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

（解答終）

このように被積分関数が多項式のような簡単な場合には，どちらのタイプの極座標変換でも計算することができ，手間もそれほど大きくは変わらない．ただし，2 種類の極座標変換を混同している誤答がよく見られるので，自分の選んだ極座標変換は偏角 θ を原点から測るのか円の中心から測るのか図を描いて確認すること．

なお，この被積分関数は不定積分が簡単なので，累次化して

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x-x^2}} xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^2-x^3}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

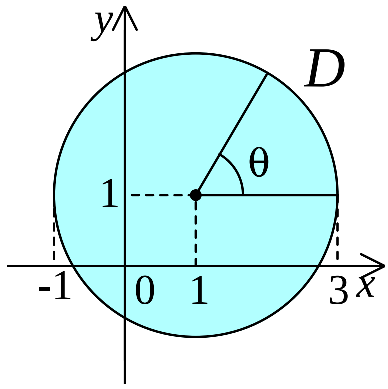
と求めることもできる．ただし，普通は x に関する積分の計算で根号が残るので，結局そこで変数変換が必要になることがほとんどである．

例題 2.15.　次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \qquad D=\{\,(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2 \leqq 4\,\}$$

（解答）　極座標変換 $x=1+r\cos\theta,\ y=1+r\sin\theta$ により，D は

$$E=\{\,(r,\theta)\mid 0\leqq r\leqq 2,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi\,\}$$



に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ である．よって

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy &= \iint_E \{(1+r\cos\theta)^2+(1+r\sin\theta)^2\}\cdot r\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^2\left(\int_0^{2\pi}\{r^3+2r+2r^2(\cos\theta+\sin\theta)\}\,d\theta\right)dr\\ &= 2\pi\int_0^2 (r^3+2r)\,dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}+r^2\right]_0^2 = 16\pi\end{aligned}$$

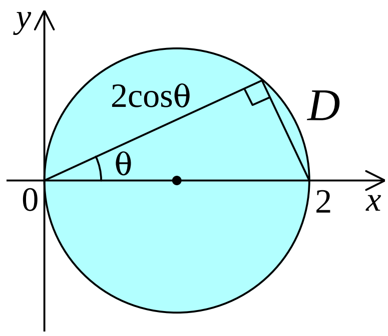
（解答終）

例題 2.16.　次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy, \qquad D=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2-2x\leqq 0\,\}$$

（解答）　極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，D は

$$E=\left\{\,(r,\theta)\ \middle|\ 0\leqq r\leqq 2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\,\right\}$$



に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ である．よって

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy &= \iint_E \sqrt{4-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta} r\sqrt{4-r^2}\,dr\right)d\theta\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}\,(4-r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{8}{3}\left(1-|\sin\theta|^3\right)d\theta\\ &= \frac{8}{3}\,\pi-\frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta = \frac{8}{3}\,\pi-\frac{16}{3}\cdot\frac{2!!}{3!!} = \frac{8}{3}\,\pi-\frac{32}{9}\end{aligned}$$

（解答終）

この例題は $x=1+r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ と極座標に変換して計算するのは難しい．

$$\sqrt{4-(1+r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}\cdot r = r\sqrt{3-2r\cos\theta-r^2}$$

となるが，この関数の累次積分を求めようとしてもかなり大変そうである．まず θ については初等関数の範囲では不定積分が表せない．先に r について何とか積分しても，形はかなり複雑になってしまう．

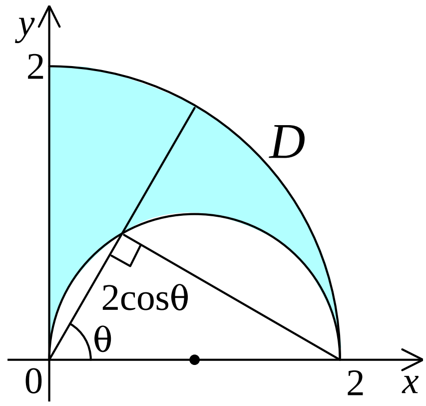
一般に積分の変数変換を行う動機は「積分領域を簡単にしたい」か「被積分関数を不定積分が簡単にわかる形にしたい」のどちらかであるが，その両立は困難なことが多いのでどちらを優先すべきかは考えること．

例題 2.17. 次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x \leqq x^2+y^2 \leqq 4\,\}$$

（解答） D を定める 3 番目の不等式は

$$(x-1)^2+y^2 \geqq 1, \qquad x^2+y^2 \leqq 4$$



と表せるから，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D は

$$E = \left\{\,(r,\theta)\ \middle|\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 2\cos\theta \leqq r \leqq 2\,\right\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ である．よって

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \iint_E r\cdot r\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_{2\cos\theta}^{2} r^2\,dr\right)d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=2\cos\theta}^{r=2} d\theta\\ &= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^3\theta)\,d\theta = \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2!!}{3!!}\right) = \frac{4}{3}\pi - \frac{16}{9}\end{aligned}$$

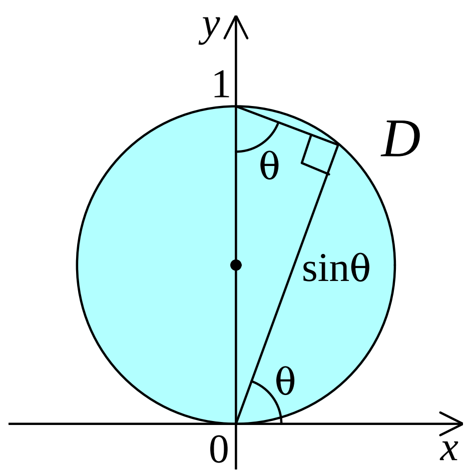
（解答終）

例題 2.18. 次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{y}\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq y\,\}$$

（解答） 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D は

$$E = \{\,(r,\theta) \mid 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq r \leqq \sin\theta\,\}$$



に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ である．よって

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{y}\,dx\,dy &= \iint_E \sqrt{r\sin\theta}\cdot r\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\sin\theta} r^{3/2}\sqrt{\sin\theta}\,dr\right)d\theta\\ &= \int_0^{\pi}\left[\frac{2}{5}r^{5/2}\sqrt{\sin\theta}\right]_{r=0}^{r=\sin\theta} d\theta\\ &= \int_0^{\pi}\frac{2}{5}\sin^3\theta\,d\theta\\ &= \frac{4}{5}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta = \frac{4}{5}\cdot\frac{2!!}{3!!} = \frac{8}{15}\end{aligned}$$

（解答終）

2.8　一般の変数変換を利用した 2 重積分の計算例

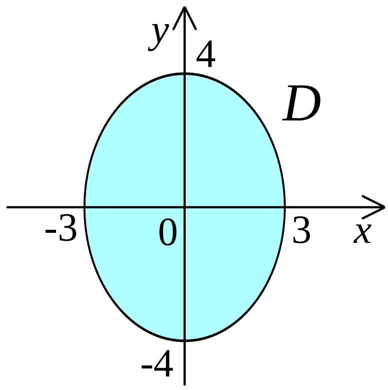
変数変換の際の注意事項は，**積分領域を図示して**どのように変わるかを確認し，**ヤコビアン**を忘れないことである．また，極座標変換のときに問題となることはないが，一般の変数変換ではヤコビアンの絶対値をかけることを忘れないこと．

例題 2.19.　次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \qquad D=\left\{ (x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16} \leqq 1 \right\}$$

（解答）　$x=3u,\ y=4v$ と変数変換すれば，D は

$$E=\{\,(u,v)\mid u^2+v^2\leqq 1\,\}$$



に対応し，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=12\ (>0)$$

である．よって，求める積分値を I とおけば

$$I=\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=\iint_E (9u^2+16v^2)\cdot 12\,du\,dv$$

となる．そこで，さらに $u=r\cos\theta,\ v=r\sin\theta$ と極座標に変換すれば，E は

$$F=\{\,(r,\theta)\mid 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi\,\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}=r$ である．よって

$$\begin{aligned}I&=12\iint_E (9u^2+16v^2)\,du\,dv=12\iint_F (9r^2\cos^2\theta+16r^2\sin^2\theta)\cdot r\,dr\,d\theta\\&=12\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{2\pi}(9+7\sin^2\theta)\,d\theta\\&=12\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{25-7\cos 2\theta}{2}\,d\theta=3\cdot 25\pi=75\pi\end{aligned}$$

（解答終）

楕円は円を縦方向か横方向に縮尺したものである．このように簡単な図形を縦や横にのばしているだけの場合には，それに応じた変数変換を行えばよい．ヤコビアンは面積の変換倍率であるから，$x=au,\ y=bv$ とおけば $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=ab$ となる．

なお，最初の例題なので丁寧に解説したが，慣れてくれば最初から

$$x=3r\cos\theta, \qquad y=4r\sin\theta$$

と変数変換すれば一度の変換ですむ．ただし，単純な極座標変換ではないから，毎回ヤコビアンを計算すること．この変換なら

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}3\cos\theta & -3r\sin\theta\\ 4\sin\theta & 4r\cos\theta\end{vmatrix}=12r$$

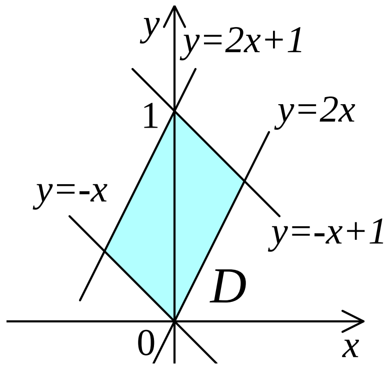
となる．また，この変換における θ は上の例題の解答における E での円に対する偏角である．楕円は円が歪んだものなので，$(x,y)=(3r\cos\theta,4r\sin\theta)$ は楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$ と直線 $y=(\tan\theta)x$ の交点ではないことには気をつけること．ただし，この事実は直接は今回の積分計算において関係しない．

例題 2.20. 次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D y\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid 0 \leqq y-2x \leqq 1,\ 0 \leqq x+y \leqq 1\,\}$$

（解答） 変数変換 $s = y-2x,\ t = x+y$ により，D は

$$E = \{\,(s,t) \mid 0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1\,\}$$



に対応し，$x = \dfrac{-s+t}{3}$, $y = \dfrac{s+2t}{3}$ なので，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

である．よって

$$\begin{aligned}
\iint_D y\,dx\,dy &= \iint_E \frac{s+2t}{3} \cdot \left| -\frac{1}{3} \right| ds\,dt \\
&= \frac{1}{9}\int_0^1 \left(\int_0^1 (s+2t)\,dt \right) ds \\
&= \frac{1}{9}\int_0^1 \Big[st+t^2 \Big]_{t=0}^{t=1} ds = \frac{1}{9}\int_0^1 (s+1)\,ds = \frac{1}{9}\left[\frac{(s+1)^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

（解答終）

この 2 重積分は直接累次化しても計算できるが，積分領域がやや複雑で境界線の方程式が変化する点があり簡単ではない．そこで，簡単に積分を実行するために，1 次変換で積分領域を平行四辺形から長方形に変形する方法が有効である．なお，$s = y-2x,\ t = x+y$ のヤコビアンは

$$\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

となり，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = -\dfrac{1}{3}$ の逆数となっている．これはヤコビアンが 0 でない限り行列式の性質から常に成り立つので，x や y の具体的な式が必要なければこのように解いている参考書もある．

例題 2.21.　次の 2 重積分の値を求めよ．

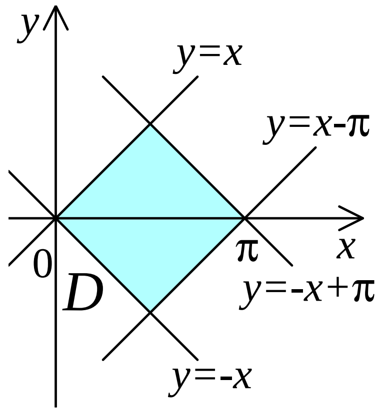
$$\iint_D (x-y)^2 \sin(x+y)\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid 0 \leqq x-y \leqq \pi,\ 0 \leqq x+y \leqq \pi\,\}$$

（解答）　変数変換 $s = x-y,\ t = x+y$ により，D は

$$E = \{\,(s,t) \mid 0 \leqq s \leqq \pi,\ 0 \leqq t \leqq \pi\,\}$$

に対応し，$x = \dfrac{s+t}{2},\ y = \dfrac{-s+t}{2}$ より

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\ (>0)$$



である．よって

$$\iint_D (x-y)^2 \sin(x+y)\,dx\,dy = \iint_E s^2 \sin t \cdot \frac{1}{2}\,ds\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi s^2\,ds \int_0^\pi \sin t\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^3}{3}\cdot 2 = \frac{\pi^3}{3}$$

（解答終）

例題 2.22.　次の 2 重積分の値を求めよ．

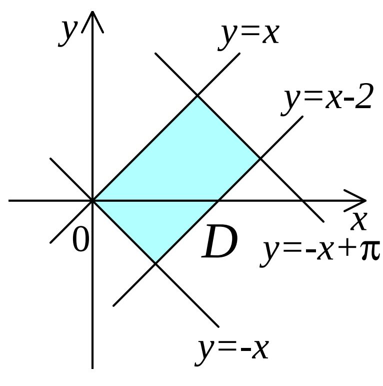
$$\iint_D e^{x-y} \sin(x+y)\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid 0 \leqq x-y \leqq 2,\ 0 \leqq x+y \leqq \pi\,\}$$

（解答）　変数変換 $s = x-y,\ t = x+y$ により，D は

$$E = \{\,(s,t) \mid 0 \leqq s \leqq 2,\ 0 \leqq t \leqq \pi\,\}$$

に対応し，$x = \dfrac{s+t}{2},\ y = \dfrac{-s+t}{2}$ より

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\ (>0)$$



である．よって

$$\iint_D e^{x-y} \sin(x+y)\,dx\,dy = \iint_E e^s \sin t \cdot \frac{1}{2}\,ds\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 e^s\,ds \int_0^\pi \sin t\,dt = \frac{1}{2}\cdot(e^2-1)\cdot 2 = e^2-1$$

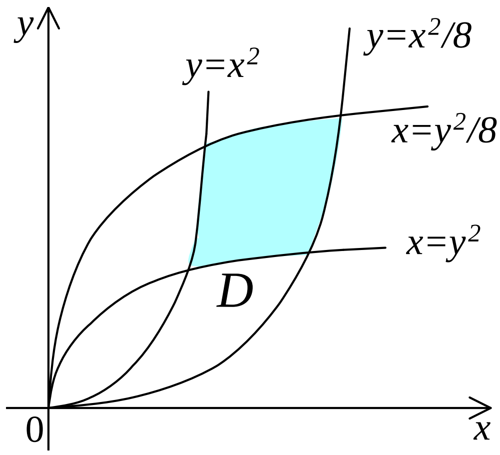
（解答終）

例題 2.23.　次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D y\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid y \leqq x^2 \leqq 8y,\ x \leqq y^2 \leqq 8x,\ x>0\,\}$$

（解答）　変数変換 $s = \dfrac{x^2}{y},\ t = \dfrac{y^2}{x}$ により，D は

$$E = \{\,(s,t) \mid 1 \leqq s \leqq 8,\ 1 \leqq t \leqq 8\,\}$$



に対応し，$x = s^{2/3}t^{1/3},\ y = s^{1/3}t^{2/3}$ なので，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} (2/3)s^{-1/3}t^{1/3} & (1/3)s^{2/3}t^{-2/3} \\ (1/3)s^{-2/3}t^{2/3} & (2/3)s^{1/3}t^{-1/3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\ (>0)$$

である．よって

$$\begin{aligned}\iint_D y\,dx\,dy &= \iint_E s^{1/3}t^{2/3}\cdot\frac{1}{3}\,ds\,dt \\ &= \frac{1}{3}\int_1^8 s^{1/3}\,ds\int_1^8 t^{2/3}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{4}\,s^{4/3}\right]_1^8\left[\frac{3}{5}\,t^{5/3}\right]_1^8 \\ &= \frac{3}{20}\,(2^4-1)(2^5-1) = \frac{279}{4}\end{aligned}$$

（解答終）

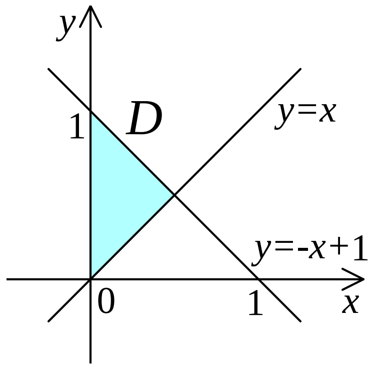
この例題もうまく変数変換すれば積分領域が長方形となり簡単に求められる．領域 D の面積 S を求める場合にも，高校流の 1 変数関数の積分で求めると境界線が途中で変わるので場合分けが大変だが，面積の定義に立ち返って $S = \iint_D dx\,dy$ として 2 重積分の変数変換を上記のように行えばすぐに答えが求められる．これはグラフで囲まれた領域の面積を出す場合にも 2 重積分の考え方が有効な例である．

例題 2.24. 次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D (y^2-x^2)e^{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad D=\{\,(x,y)\mid y \geqq x \geqq 0,\ x+y \leqq 1\,\}$$

（解答） 変数変換 $s=x+y,\ t=-x+y$ により，D は

$$E=\{\,(s,t)\mid 0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq s\,\}$$



に対応し，$x=\dfrac{s-t}{2}$，$y=\dfrac{s+t}{2}$ なので，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix}1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\ (>0)$$

である．よって

$$\begin{aligned}
\iint_D (y^2-x^2)e^{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \iint_E ste^{(s^2+t^2)/2}\cdot\frac{1}{2}\,ds\,dt\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^s ste^{(s^2+t^2)/2}\,dt\right)ds\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\left[se^{(s^2+t^2)/2}\right]_{t=0}^{t=s}ds\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1 s(e^{s^2}-e^{s^2/2})\,ds\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{s^2}-e^{s^2/2}\right]_0^1=\frac{e}{4}-\frac{\sqrt{e}}{2}+\frac{1}{4}=\frac{(\sqrt{e}-1)^2}{4}
\end{aligned}$$

（解答終）

3　n 重積分

3.1　3 重積分の定義と計算

3 重積分の定義は 2 重積分の場合と同様である．直方体領域

$$K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = \{\, (x, y, z) \mid a_1 \leqq x \leqq b_1,\ a_2 \leqq y \leqq b_2,\ a_3 \leqq z \leqq b_3 \,\}$$

上で有界な関数 $f(x, y, z)$ に対して，K の分割を細かくするときにリーマン和が一定の値に収束するとき，$f(x, y, z)$ は K で**重積分可能**といい，その極限値を $\iiint_K f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ と表す．$\mathbb{R}^3$ の有界集合 Ω 上の積分も同様に定義される．

定義 3.1. （体積の定義）

定数関数 1 が $\mathbb{R}^3$ の有界な部分集合 Ω 上で重積分可能であるとき，Ω は**体積確定**であるといい，その**体積** $|\Omega|$ を

$$|\Omega| \coloneqq \iint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz$$

で定義する．

3 重積分についても，累次化により計算することができる．直方体領域 K 上の積分については，1 変数関数の積分を 3 回繰り返せばよい．

定理 3.2. （直方体領域上の 3 重積分の累次化）

関数 $f(x, y, z)$ が直方体領域 $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ 上で連続であれば

$$\iiint_K f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\,dz \right) dy \right) dx$$

が成り立つ．

上では z, y, x の順番で積分する形で累次化したが，別の順番でも構わない．被積分関数の形に応じて適切な順番で積分するように累次化すればよい．

直方体領域上の積分は，累次化により 1 変数関数の積分を 3 回繰り返せばよい．ただし，理屈は簡単だが計算をミス無く実行することは易しくないので，必ず計算練習をしておくこと．

例題 3.3. 次の 3 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iiint_K (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz, \qquad K=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

(2) $\displaystyle\iiint_K \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz \qquad K=[0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$

（解答）

(1) 累次化すれば

$$\begin{aligned}\iiint_K (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^1 (x+y+z)^2\,dx\right)dy\right)dz \\ &= \int_0^1\left(\int_0^1\left[\frac{(x+y+z)^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1}dy\right)dz \\ &= \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{(1+y+z)^3-(y+z)^3}{3}\,dy\right)dz \\ &= \int_0^1\left[\frac{(1+y+z)^4-(y+z)^4}{12}\right]_{y=0}^{y=1}dz \\ &= \int_0^1 \frac{(2+z)^4-2(1+z)^4+z^4}{12}\,dz \\ &= \left[\frac{(2+z)^5-2(1+z)^5+z^5}{60}\right]_0^1 = \frac{180-30}{60} = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

(2) 累次化すれば

$$\begin{aligned}\iiint_K \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{\pi/6}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi}\sin(x+y+z)\,dx\right)dy\right)dz \\ &= \int_0^{\pi/6}\left(\int_0^{\pi/2}\Big[-\cos(x+y+z)\Big]_{x=0}^{x=\pi}dy\right)dz \\ &= \int_0^{\pi/6}\left(\int_0^{\pi/2}\Big\{-\cos(\pi+y+z)+\cos(y+z)\Big\}\,dy\right)dz \\ &= \int_0^{\pi/6}\left(\int_0^{\pi/2}2\cos(y+z)\,dy\right)dz \\ &= 2\int_0^{\pi/6}\Big[\sin(y+z)\Big]_{y=0}^{y=\pi/2}dz \\ &= 2\int_0^{\pi/6}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right)-\sin z\right\}dz \\ &= 2\int_0^{\pi/6}(\cos z-\sin z)\,dz \\ &= 2\Big[\sin z+\cos z\Big]_0^{\pi/6} = \sqrt{3}-1\end{aligned}$$

（解答終）

縦線集合上の積分についても同様に累次積分の計算に直すことができる．3 変数の分け方として「1 変数関数の積分→残りの変数で 2 重積分」と「2 重積分→残りの変数で 1 変数関数の積分」の 2 パターンがあるので，それぞれの主張を述べておく．

定理 3.4. （縦線集合上の 3 重積分の累次化）

関数 $f(x,y,z)$ は $\mathbb{R}^3$ の積分領域 Ω 上で連続とする．

(1) xy 平面の積分領域 D と D 上の連続関数 $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$ により，Ω が z 方向の縦線集合

$$\Omega = \{\, (x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ \varphi_1(x,y) \leqq z \leqq \varphi_2(x,y) \,\}$$

として表されるとき

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

が成り立つ．

(2) $z \in [a,b]$ をパラメータとする xy 平面の積分領域 D_z により，Ω が

$$\Omega = \{\, (x,y,z) \mid a \leqq z \leqq b,\ (x,y) \in D_z \,\}$$

と表されるとき

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

が成り立つ．

上の (1) は積分領域である立体 Ω が 2 個のグラフ $z=\varphi_1(x,y)$ と $z=\varphi_2(x,y)$ で挟まれている場合である．後の節で説明するように，立体の体積を求める際によく用いられる累次化である．(2) は記号がやや難しいかもしれないが，$z=t$ を固定したときに立体 Ω を平面 $z=t$ で切った断面を xy 平面に射影した（真上から見たもの）を D_t とおいている．式で書けば

$$D_t = \{\, (x,y) \mid (x,y,t) \in \Omega \,\}$$

ということである．毎回 t とおくのは面倒なので，普通は z を固定したと考えて上の定理のように記述する．

一般の有界閉領域 Ω 上の積分では，累次積分への直し方が複数考えられることもあるので，様々な計算法がありうる．

例題 3.5. $\Omega = \{\,(x,y,z) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x+y+z \leqq 1\,\}$ とする．このとき，3 重積分

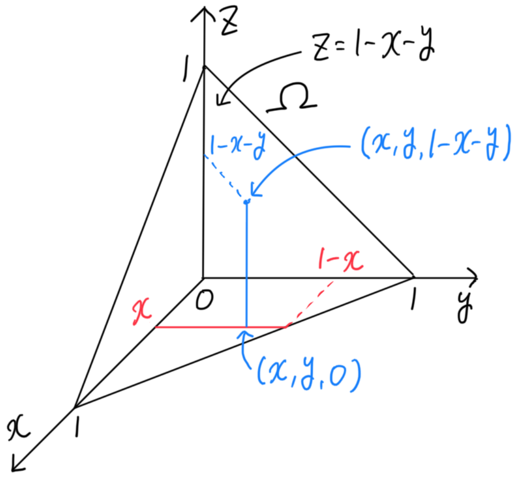
$$\iiint_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$$

の値を求めよ．

（解答 1） 積分領域 Ω は

$$\Omega = \{\,(x,y,z) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1-x,\ 0 \leqq z \leqq 1-x-y\,\}$$

と表せるから



$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} z\,dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2}\,dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{6} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6}\,dx = \left[-\frac{(1-x)^4}{24} \right]_0^1 = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

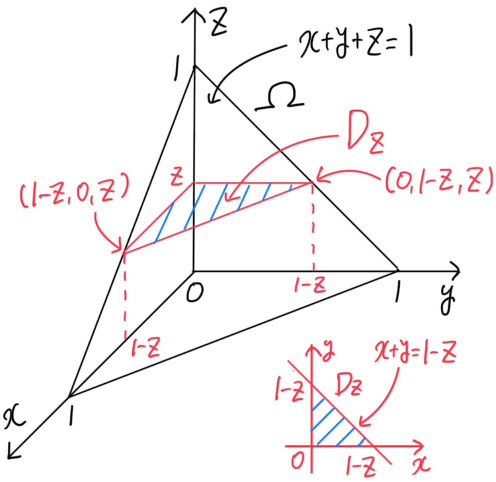
（解答 2） 積分領域 Ω は

$$\Omega = \{\,(x,y,z) \mid 0 \leqq z \leqq 1,\ (x,y) \in D_z\,\}$$
$$D_z = \{\,(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1-z\,\}$$

と表せる．ここで，直角三角形 D_z の面積は

$$|D_z| = \frac{1}{2}\,(1-z)^2$$

であるから



$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left(\iint_{D_z} z\,dx\,dy \right) dz \\
&= \int_0^1 z|D_z|\,dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (z^3 - 2z^2 + z)\,dz \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{z^4}{4} - \frac{2}{3}z^3 + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

（解答終）

例題 3.5 では解法 2 の方が簡単だが，それは「被積分関数が z のみに依存し」さらに「Ω の z 軸に垂直な断面 D_z の面積がすぐにわかる」からである．このように，3 重積分の累次化で万能な方法はなく，ベストな計算法は被積分関数 $f(x,y,z)$ の形と積分領域 Ω の形に大きく依存する．これぱかりは計算問題に当たって練習するしかないので，最初のうちは 1 つの計算問題を複数の方法で計算してみること．

3.2　3 重積分の変数変換

3 変数の写像に関するヤコビアンおよび 3 重積分の変数変換は 2 変数のときと同様に定義される．

定義 3.6. （ヤコビアン）

$u=\varphi(x,y,z)$, $v=\psi(x,y,z)$, $w=\eta(x,y,z)$ がすべて C^1 級であるとき，次の行列式

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \varphi_x(x,y,z) & \varphi_y(x,y,z) & \varphi_z(x,y,z) \\ \psi_x(x,y,z) & \psi_y(x,y,z) & \psi_z(x,y,z) \\ \eta_x(x,y,z) & \eta_y(x,y,z) & \eta_z(x,y,z) \end{vmatrix}$$

を写像 $(x,y,z)\longmapsto(u,v,w)=(\varphi(x,y,z),\ \psi(x,y,z),\ \eta(x,y,z))$ の**ヤコビアン**という．

写像が 3 次正方行列 A により

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z \end{pmatrix}$$

と表せるときには

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\det A$$

となる．ここで，線形代数学の定理により $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{pmatrix}$ と列ベクトル分解すれば，$|\det A|$ は 3 本のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の始点を揃えたときに作られる平行六面体の体積を表すことが知られている．そのため，1 辺が 1 の立方体は $\mathbb{R}^3$ の 1 次変換 $T_A\colon\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $T_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ により，体積が $|\det A|$ の平行六面体に写る．これより，$|\det A|$ は T_A による図形の体積の変換倍率を表してることがわかる．

定理 3.7. （変数変換）

関数 $f(x,y,z)$ は積分領域 Ω 上で連続とする．C^1 級の変換 $x=\varphi(s,t,u)$, $y=\psi(s,t,u)$, $z=\chi(s,t,u)$ により Ω は stu 空間の積分領域 Γ に一対一に対応するとする．この変換のヤコビアンが $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t,u)}\fallingdotseq 0$ をみたすならば

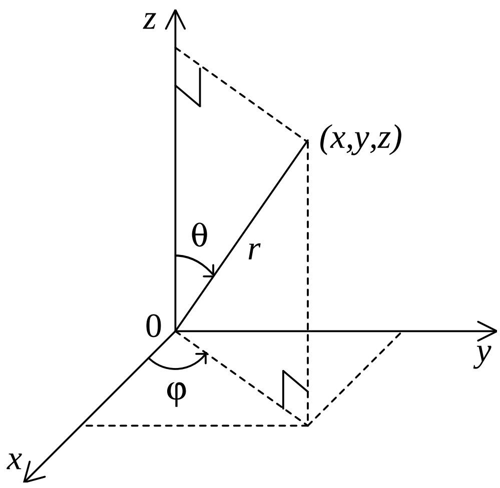
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_\Gamma f\big(\varphi(s,t,u),\psi(s,t,u),\chi(s,t,u)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t,u)}\right|ds\,dt\,du$$

が成り立つ．

証明は 3 重積分がリーマン和の極限であることとヤコビアンの絶対値が局所的な体積の変換倍率を表していることから，2 重積分の場合と同様である．また，実際には体積 0 の部分を除いて積分領域が一対一対応し，ヤコビアンが 0 でなければ変数変換公式を適用できる．

xyz 空間の極座標変換は角度を右図のように設定すれば

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



で与えられる．このとき，例えば $a > 0$ のとき

$$\Omega = \{\,(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2\,\}$$

は $r\theta\varphi$ 空間の直方体

$$\Gamma = \{\,(r,\theta,\varphi) \mid 0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\,\}$$

に対応する．地球で考えれば θ が緯度に，φ が経度に対応するので，動く角度は

$$0 \leqq \theta \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

となることに注意すること．この対応は厳密には 1 対 1 ではないが，1 対 1 でない部分は直方体 Γ の境界の部分集合なので体積が 0 であるから，積分値には影響しない．

定理 3.8. （3 変数関数の極座標変換）

関数 $f(x,y,z)$ は積分領域 Ω 上で連続とする．極座標変換

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

により Ω は $r\theta\varphi$ 空間の積分領域 Γ に一対一に対応するとする．このとき

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Gamma f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

が成り立つ．

証明． ヤコビアンは 3 行目で余因子展開すれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} + r\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \\
&= r^2\sin\theta\cos^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\sin^3\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\
&= r^2\sin\theta\cos^2\theta + r^2\sin^3\theta \\
&= r^2\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2\sin\theta
\end{aligned}$$

となる．上で説明したように標準的な角度の設定のもとでは $0 \leqq \theta \leqq \pi$ なので

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta \geqq 0$$

であり，0 となる部分は $r = 0$ や $\theta = 0, \pi$ のときなので体積 0 である．よって，変数変換公式より成り立つ． □

例題 3.9. $\Omega = \{\,(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 1\,\}$ とする．このとき，3 重積分

$$\iiint_\Omega z^2\,dx\,dy\,dz$$

の値を求めよ．

（解答 1） 極座標変換

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

により，積分領域は

$$\Gamma = \{\,(r,\theta,\varphi) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\,\}$$

に対応し

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega z^2\,dx\,dy\,dz &= \iiint_\Gamma (r\cos\theta)^2 \cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi \\ &= \int_0^1 r^4\,dr \int_0^\pi \sin\theta\cos^2\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi \cdot 2\pi = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\pi = \frac{4}{15}\,\pi\end{aligned}$$

（解答 2）

積分領域 Ω は

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\,(x,y,z) \mid -1 \leqq z \leqq 1,\ (x,y) \in D_z\,\} \\ D_z &= \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1-z^2\,\}\end{aligned}$$

と表せる．ここで，円板 D_z の面積は

$$|D_z| = \pi(1-z^2)$$

であるから

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega z^2\,dx\,dy\,dz &= \int_{-1}^1 \left(\iint_{D_z} z^2\,dx\,dy\right) dz \\ &= \int_{-1}^1 z^2|D_z|\,dz \\ &= \pi\int_{-1}^1 (z^2-z^4)\,dz = 2\pi\left[\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,\pi\end{aligned}$$

（解答終）

被積分関数が多項式なのでどちらでも計算できるが，積分領域が球（の一部）の場合には極座標変換が有効なことが多い．累次化では計算できないが極座標に変換すれば計算できる例を次の節で挙げてあるので，必ず計算練習をしておくこと．

なお，ヤコビアンが $r^2\sin\theta$ であることのみを暗記しても θ がどの角度かを理解していなければ意味がない．また，極座標変換

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

の形を図で理解しておかないと，積分領域が球の一部である場合に θ と φ の動く範囲がわからなくなってしまう．極座標変換の意味を正しく図で把握できるようにしておくこと．

3.3　3 重積分の計算例

3 重積分を計算する際に累次化する方法はいろいろ考えられる．さらに累次化する前に変数変換を組み合わせることもあるので，計算を正確に実行するのは大変であるがしっかり取り組むこと．

例題 3.10.　次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz, \qquad \Omega = \{\,(x,y,z) \mid 0 \leqq x \leqq y^2,\ z \leqq y \leqq 2z,\ 0 \leqq z \leqq 1\,\}$$

（解答）　累次化すれば

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left(\int_z^{2z} \left(\int_0^{y^2} z\,dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_z^{2z} y^2 z\,dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \left[\frac{y^3 z}{3} \right]_{y=z}^{y=2z} dz = \int_0^1 \frac{7}{3}\,z^4\,dz = \left[\frac{7}{15}\,z^5 \right]_0^1 = \frac{7}{15}\end{aligned}$$

（解答終）

例題 3.11.　次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_{\Omega} (x+y^2 z)\,dx\,dy\,dz, \qquad \Omega = \{\,(x,y,z) \mid 0 \leqq z \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1,\ x \geqq 0\,\}$$

（解答）　$0 \leqq z \leqq 1$ に対して

$$D_z = \{\,(x,y) \mid z \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1,\ x \geqq 0\,\}$$

とおけば，積分領域 Ω は

$$\Omega = \{\,(x,y,z) \mid 0 \leqq z \leqq 1,\ (x,y) \in D_z\,\}$$

と表せる．よって，求める積分値を I とおくと，累次化すれば

$$I = \iiint_{\Omega} (x+y^2 z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} (x+y^2 z)\,dx\,dy \right) dz$$

となる．ここで，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D_z は

$$E_z = \left\{ (r,\theta) \;\middle|\; z \leqq r \leqq 1,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ である．よって

$$\begin{aligned}
\iint_{D_z} (x+y^2 z)\,dx\,dy &= \iint_{E_z} (r\cos\theta + zr^2\sin^2\theta)\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_z^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2\cos\theta + zr^3\sin^2\theta)\,d\theta \right) dr \\
&= \int_z^1 \left(\int_0^{\pi/2} \{2r^2\cos\theta + zr^3(1-\cos 2\theta)\}\,d\theta \right) dr \\
&= \int_z^1 \left[2r^2\sin\theta + zr^3\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} dr \\
&= \int_z^1 \left(2r^2 + \frac{\pi z}{2}\,r^3 \right) dr = \left[\frac{2}{3}\,r^3 + \frac{\pi z}{8}\,r^4 \right]_{r=z}^{r=1} = \frac{2}{3}\,(1-z^3) + \frac{\pi}{8}\,(z-z^5)
\end{aligned}$$

であるから

$$I = \int_0^1 \left\{ \frac{2}{3}\,(1-z^3) + \frac{\pi}{8}\,(z-z^5) \right\} dz = \left[\frac{2}{3}\left(z - \frac{z^4}{4}\right) + \frac{\pi}{8}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^6}{6}\right) \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{24}$$

（解答終）

例題 3.12.　$a > 0$ とする．次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz, \qquad \Omega = \{\,(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq a^2,\ x^2+y^2 \leqq ax,\ z \geqq 0\}$$

（解答）　xy 平面内の領域を

$$D = \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq ax\,\}$$

とおけば，積分領域 Ω は

$$\Omega = \left\{\,(x,y,z)\ \middle|\ (x,y) \in D,\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\right\}$$

と表せる．よって，求める積分値を I とおくと，累次化すれば

$$I = \iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\,dz\right) dx\,dy = \iint_D \frac{a^2-x^2-y^2}{2}\,dx\,dy$$

となる．ここで，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D は

$$E = \left\{\,(r,\theta)\ \middle|\ 0 \leqq r \leqq a\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\,\right\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ である．よって

$$\begin{aligned}
I = \iint_E \frac{a^2-r^2}{2}\cdot r\,dr\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{a\cos\theta}(a^2r-r^3)\,dr\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{a^2r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=a\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{a^4}{2}\cos^2\theta-\frac{a^4}{4}\cos^4\theta\right)d\theta \\
&= \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\left(2\cos^2\theta-\cos^4\theta\right)d\theta = \frac{a^4}{4}\left(2\cdot\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{64}\,\pi a^4
\end{aligned}$$

（解答終）

例題 3.13.　次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz, \qquad \Omega = \{\,(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqq z^2,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\ z \geqq 0\,\}$$

（解答）　$0 \leqq z \leqq 1$ に対して

$$D_z = \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq z^2,\ x^2+y^2 \leqq 1-z^2\,\}$$

とおけば，積分領域 Ω は

$$\Omega = \{\,(x,y,z) \mid 0 \leqq z \leqq 1,\ (x,y) \in D_z\,\}$$

と表せる．よって，求める積分値を I とおくと，累次化すれば

$$I = \iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} z\,dx\,dy\right) dz = \int_0^1 z|D_z|\,dz$$

となる．ここで，$0 \leqq z \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときには $z^2 \leqq 1-z^2$ より

$$D_z = \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq z^2\,\} \qquad \therefore\ |D_z| = \pi z^2$$

であり，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq z \leqq 1$ のときには $1-z^2 \leqq z^2$ より

$$D_z = \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1-z^2\,\} \qquad \therefore\ |D_z| = \pi(1-z^2)$$

となる．よって

$$I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \pi z^3\,dz + \int_{1/\sqrt{2}}^1 \pi z(1-z^2)\,dz = \left[\frac{\pi z^4}{4}\right]_0^{1/\sqrt{2}} + \left[\pi\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right)\right]_{1/\sqrt{2}}^1 = \frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$$

（解答終）

例題 3.14.　$a > 0$ とする．次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_\Omega xyz\,dx\,dy\,dz, \qquad \Omega = \{\,(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\,\}$$

（解答）　極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ により，積分領域 Ω は

$$\Gamma = \left\{ (r,\theta,\varphi) \;\middle|\; 0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega xyz\,dx\,dy\,dz &= \iiint_\Gamma (r\sin\theta\cos\varphi)(r\sin\theta\sin\varphi)(r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi \\
&= \iiint_\Gamma r^5\sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_0^a r^5\,dr \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \\
&= \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^a \left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{a^6}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a^6}{48}
\end{aligned}$$

（解答終）

例題 3.15.　次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{Tan}^{-1} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz, \qquad \Omega = \{\, (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 1 \,\}$$

（解答）　極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ により，積分領域 Ω は

$$\Gamma = \{\, (r,\theta,\varphi) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \,\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \mathrm{Tan}^{-1} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz &= \iiint_{\Gamma} \mathrm{Tan}^{-1} r \cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 r^2\, \mathrm{Tan}^{-1} r\, dr \\
&= 2\pi \cdot 2 \left(\left[\frac{r^3}{3}\, \mathrm{Tan}^{-1} r \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 r^3 \cdot \frac{1}{1+r^2}\, dr \right) \\
&= 4\pi \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \int_0^1 \left(r - \frac{r}{1+r^2} \right) dr \right\} \\
&= 4\pi \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} \log(1+r^2) \right]_0^1 \right) = \frac{\pi(\pi - 2 + 2\log 2)}{3}
\end{aligned}$$

（解答終）

例題 3.16.　次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_{\Omega} \cos\left(\frac{\pi}{4} (x^2+y^2+z^2)^{3/2} \right) dx\, dy\, dz, \qquad \Omega = \{\, (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 1 \,\}$$

（解答）　極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ により，積分領域 Ω は

$$\Gamma = \{\, (r,\theta,\varphi) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \,\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \cos\left(\frac{\pi}{4} (x^2+y^2+z^2)^{3/2} \right) dx\, dy\, dz &= \iiint_{\Gamma} \cos\frac{\pi r^3}{4} \cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 r^2 \cos\frac{\pi r^3}{4}\, dr \\
&= 2\pi \cdot 2 \left[\frac{4}{3\pi} \sin\frac{\pi r^3}{4} \right]_0^1 = \frac{8\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

（解答終）

3.4　球と楕円体の体積

3 重積分のまとめとして，球の体積を様々な方法で求めてみる．

例題 3.17.　$a>0$ とする．半径 a の球 $B_a=\{\,(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqq a^2\,\}$ の体積 V を求めよ．

（解答）　求める体積は $V=\displaystyle\iiint_{B_a}dx\,dy\,dz$ である．

(i)　（空間の極座標変換を利用した計算）
極座標変換 $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ により，積分領域 B_a は

$$\Gamma=\{\,(r,\theta,\varphi)\mid 0\leqq r\leqq a,\ 0\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi\,\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta$ である．よって

$$V=\iiint_\Gamma r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^a r^2\,dr=2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{4}{3}\,\pi a^3$$

(ii)　（z 軸に垂直な平面の断面積の積分として計算）
積分領域 B_a は

$$B_a=\{\,(x,y,z)\mid -a\leqq z\leqq a,\ (x,y)\in D_z\,\},\qquad D_z=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2\leqq a^2-z^2\,\}$$

と表せるから，$|D_z|=\pi(a^2-z^2)$ より

$$V=\int_{-a}^{a}\left(\iint_{D_z}dx\,dy\right)dz=\int_{-a}^{a}|D_z|\,dz=\int_{-a}^{a}\pi(a^2-z^2)\,dz=2\pi\left[a^2z-\frac{z^3}{3}\right]_0^a=\frac{4}{3}\,\pi a^3$$

(iii)　（2 つの半球面に囲まれた立体の体積として計算）
積分領域 B_a は，$D=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2\leqq a^2\,\}$ とおけば

$$B_a=\left\{\,(x,y,z)\;\middle|\;(x,y)\in D,\ -\sqrt{a^2-x^2-y^2}\leqq z\leqq\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\right\}$$

と表せるから

$$V=\iint_D\left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dz\right)dx\,dy=\iint_D 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

となる．ここで，極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，D は

$$E=\{\,(r,\theta)\mid 0\leqq r\leqq a,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi\,\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ である．よって

$$V=2\iint_E\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr=4\pi\left[-\frac{1}{3}\,(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^a=\frac{4}{3}\,\pi a^3$$

（解答終）

楕円体は変数変換により球の体積を求める計算に帰着される．

例題 3.18. $a>0,\ b>0,\ c>0$ とする．楕円体 $\Omega=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqq 1\right\}$ の体積 V を求めよ．

（解答） 求める体積は $V=\displaystyle\iiint_\Omega dx\,dy\,dz$ である．ここで，$u=\dfrac{x}{a},\ v=\dfrac{y}{b},\ w=\dfrac{z}{c}$ と変数変換すれば，積分領域 Ω は

$$\Gamma=\{\,(u,v,w)\mid u^2+v^2+w^2\leqq 1\,\}$$

に対応し，$x=au,\ y=bv,\ z=cw$ より

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{vmatrix}=abc$$

である．また，Γ は半径 1 の球なので，求める体積は

$$V=\iiint_\Gamma abc\,du\,dv\,dw=abc|\Gamma|=abc\cdot\frac{4}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi abc$$

（解答終）

立体が回転された楕円体ならば，直交行列を用いて適切に変数変換すればよい．これは線形代数の知識を用いるので，実対称行列の対角化の理論を学んでから取り組むこと．

例題 3.19. 立体 $\Omega=\{\,(x,y,z)\mid 3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx\leqq 1\,\}$ の体積を求めよ．

（解答） Ω を定める不等式は，行列 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を用いて

$$3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}\leqq 1$$

と表せる．そこで，実対称行列 A を直交行列 P を用いて対角化する．まず

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^3-9\lambda^2+24\lambda-20=(\lambda-2)^2(\lambda-5)=0$$

より，A の固有値は $\lambda=2,2,5$ である．

固有値 $\lambda=2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A-2E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A-2E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

より，解は s,t を任意の実数として

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-s-t\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

と表せる．よって，$V(2)$ の基底として $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれる．

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ からグラム・シュミットの直交化法により，$V(2)$ の正規直交基底を構成する．

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおけば，$\|\boldsymbol{w}_1\| = \sqrt{2},\ \|\boldsymbol{w}_2\| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ より

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

は $V(2)$ の正規直交基底である．

固有値 $\lambda = 5$ に対する固有空間 $V(5)$ を求める．これは方程式 $(A - 5E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行を } (-1/3) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行の入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(5)$ の基底として $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．よって，$V(5)$ の正規直交基底として $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

このとき，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であるから

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

とおくと，P は直交行列であり，$P^{-1}AP = {}^t\!PAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ と対角化できる．

そこで，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ と変数変換すれば，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ より

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{y}({}^tPAP)\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 2X^2 + 2Y^2 + 5Z^2$$

なので，Ω は

$$\Gamma = \{\, (X, Y, Z) \mid 2X^2 + 2Y^2 + 5Z^2 \leqq 1 \}$$

に対応し，直交行列の性質より

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(X, Y, Z)} \right| = |\det P\,| = 1$$

であるから，例題 3.18 の楕円体の体積の公式を利用すれば

$$V = \iiint_\Omega dx\, dy\, dz = \iiint_\Gamma dX\, dY\, dZ = |\Gamma| = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}\pi$$

（解答終）

2 次曲面で囲まれた立体の体積については，2 次形式の標準形への変形を利用すると簡単に計算できる．なお，直交変換が合同変換である，つまり変換で体積が不変であることを知っていれば見通しがさらによくなる．これは実対称行列の直交行列による対角化の重要な応用例の 1 つである．線形代数の復習も兼ねて上では丁寧に解答したが，**答えだけなら P を求めなくても A の固有値だけで体積の値は求めることができる**．実際，P が直交行列なのでその行列式の絶対値が常に 1 とわかるからである．

4　広義重積分

ここまでは有界な閉領域における有界な関数の重積分を考えてきた．この節では積分領域が非有界または被積分関数が非有界となる場合にも積分の概念を拡張した広義重積分を扱う．1 変数関数の場合の広義積分と異なり，与えられた積分領域に対してその標準的な拡張がないために，理論が複雑になる．ここでは主に広義の 2 重積分について考えることにする．3 変数以上の関数の広義重積分の場合にも全く同様である．

4.1　定符号関数の広義重積分

関数 $f(x,y)$ が D 上で常に $f(x,y) \geqq 0$ である，または D 上で常に $f(x,y) \leqq 0$ であるとき，$f(x,y)$ を D 上の**定符号関数**という．理論を簡単にするため，まずは定符号関数の広義積分を扱うことにする．

定義 4.1. （近似増加列）

D を有界とは限らない $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする（$D = \mathbb{R}^2$ でもよい）．D の部分集合の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ が次の 3 条件をみたすとき，D の**近似増加列**という．

(1) D_n は面積確定な有界閉領域である．

(2) $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \cdots$

(3) 任意の有界閉集合 $K \subset D$ に対して，$K \subset D_n$ となる自然数 n が存在する．

$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上の 3 条件を満たせば，$D = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ となる．直感的には D_n が単調に広がって $D = \displaystyle\lim_{n\to\infty} D_n$ となると思えばよいが，集合の極限を扱っていないのでこのような極限による表記はしないことにする．

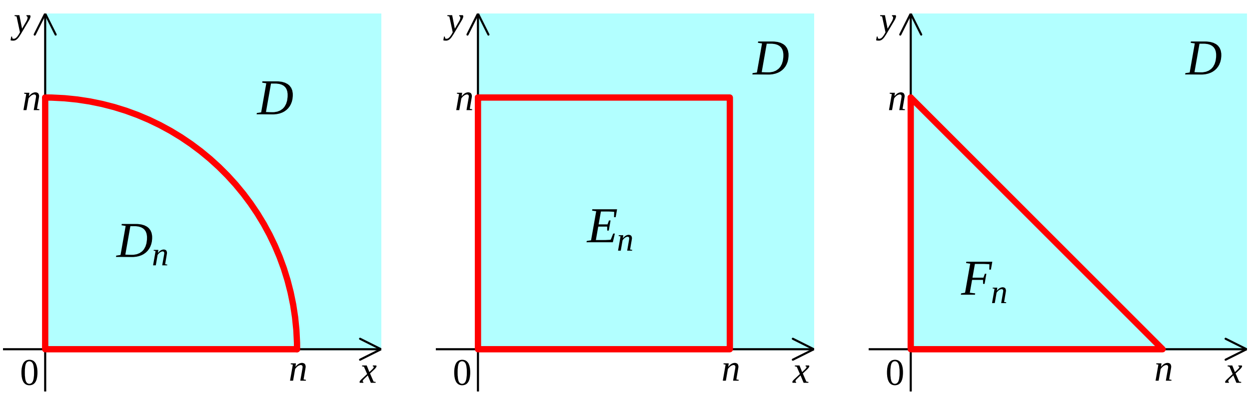
例えば

$$D = \{\,(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\,\}$$

とする．D の部分集合の列を

$$\begin{aligned} D_n &= \{\,(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq n^2\,\} \\ E_n &= \{\,(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n\,\} \\ F_n &= \{\,(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq n\,\} \end{aligned}$$

とおけば，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ はすべて D の近似増加列である．このように，近似増加列の選び方は無限に存在する．



図のように，有界な領域を広げて非有界な領域に近づいていく方法はいくらでも考えられる．後で見るように具体的な計算問題に対しては，被積分関数の形に合わせて適切な近似増加列を選ばなければならない．

$f(x,y)$ を D 上で連続で $f(x,y) \geqq 0$ となる関数とし，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D の近似増加列とする．まず近似増加列の条件 (1) より，2 重積分 $\displaystyle\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ の値が定まる．次に，近似増加列の条件 (2) より

$$D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \cdots$$

だから，$f(x,y) \geqq 0$ より

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy \leqq \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy \leqq \cdots \leqq \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy \leqq \iint_{D_{n+1}} f(x,y)\,dx\,dy \leqq \cdots$$

が成り立つ．つまり，2 重積分 $\displaystyle\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ は n に関して単調増加である．よって，実数の連続性より，数列 $\displaystyle\left\{\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy\right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界ならば収束し，そうでなければ正の無限大に発散する．また，近似増加列の条件 (3) より，D_n は D に近づいていくから

$$\iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy \coloneqq \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

と定義すればよさそうである．これを $f(x,y)$ の D における**広義の 2 重積分**または**広義重積分**という．上で述べたように，右辺の極限値が存在するか，正の無限大となるかのどちらかである．この極限値が存在するときに広義重積分は**収束**するといい，∞ であるときに広義重積分は**発散**するという．広義重積分が収束するとき，D 上で**広義重積分可能**であるともいう．

$f(x,y)$ が D 上連続で $f(x,y) \leqq 0$ となる関数の場合には，2 重積分 $\displaystyle\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ が n に関して単調減少であることに注意すれば同様に議論できる．

この定義が意味を持つためには極限値が近似増加列の取り方によらない必要があるが，それは確かに正しい．

定理 4.2. （広義積分の定義の妥当性）

$f(x,y)$ は D 上の連続な定符号関数とする．このとき，D の 2 個の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{D'_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D'_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

が成り立つ．

証明. D 上で $f(x,y) \geqq 0$ の場合を示す．D の 2 個の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{D'_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$I = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy, \qquad I' = \lim_{n\to\infty} \iint_{D'_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

とおく．D'_m は有界閉集合なので，近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の条件 (3) より，ある自然数 n_0 が存在して $D'_m \subset D_{n_0}$ が成り立つ．このとき，$f(x,y) \geqq 0$ なので

$$\iint_{D'_m} f(x,y)\,dx\,dy \leqq \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (n \geqq n_0)$$

となるから

$$\iint_{D'_m} f(x,y)\,dx\,dy \leqq \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy = I$$

である．よって，$m \to \infty$ とすれば

$$I' = \lim_{m\to\infty} \iint_{D'_m} f(x,y)\,dx\,dy \leqq I$$

となる．2 つの近似増加列の役割を入れ替えて同様の議論を行えば $I \leqq I'$ も得られるから，$I = I'$ が成り立つ． □

4.2　定符号関数の広義重積分の計算例

被積分関数が定符号関数であり積分領域 D が非有界な場合には，D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を適切にとり，D_n 上の積分値の極限をとればよい．近似増加列の適切な選び方は問題ごとに異なるので，長方形で累次化したいのか，極座標に変換したいのかなど先を見通して計算すること．

例題 4.3.　次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iint_D e^{-x-y}\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\,\}$$

（解答）　D 上で $e^{-x-y} > 0$ なので，適当な近似増加列をとって計算すればよい．D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$D_n = \{\,(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n\,\}$$

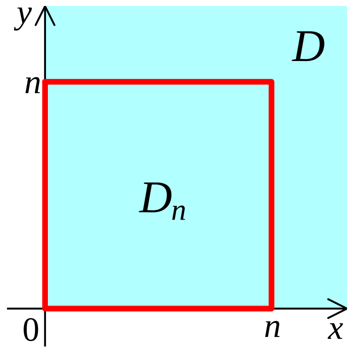
とおく．このとき

$$\iint_{D_n} e^{-x-y}\,dx\,dy = \int_0^n e^{-x}\,dx \int_0^n e^{-y}\,dy = \left(\Big[-e^{-x}\Big]_0^n\right)^2 = (1-e^{-n})^2$$

となる．よって

$$\iint_D e^{-x-y}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} e^{-x-y}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}(1-e^{-n})^2 = 1$$

である．



（解答終）

例題 4.4.　次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iint_D x^2 e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\,\}$$

（解答）　D 上で $x^2 e^{-x^2-y^2} \geqq 0$ なので，適当な近似増加列をとって計算すればよい．D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

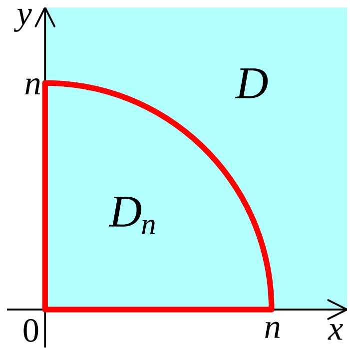
$$D_n = \{\,(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq n^2\,\}$$

とおく．このとき，極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により，D_n は

$$E_n = \left\{\,(r,\theta)\ \middle|\ 0 \leqq r \leqq n,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\,\right\}$$

と対応するので

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} x^2 e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy &= \iint_{E_n} (r\cos\theta)^2 e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^n r^3 e^{-r^2}\,dr \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}\int_0^n r^3 e^{-r^2}\,dr\end{aligned}$$



となる．ここで，$t = r^2$ とおけば

$$\int_0^n r^3 e^{-r^2}\,dr = \frac{1}{2}\int_0^{n^2} te^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Big[-te^{-t}-e^{-t}\Big]_0^{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{n^2+1}{2e^{n^2}}$$

より，$\displaystyle\iint_{D_n} x^2 e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{n^2+1}{e^{n^2}}\right)$ が得られる．よって，第 5 章命題 6.34 より

$$\iint_D x^2 e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} x^2 e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{n^2+1}{e^{n^2}}\right) = \frac{\pi}{8}$$

である．

（解答終）

例題 4.5.　$D = \{ (x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0 \}$ のとき，広義重積分

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

の値を求めることで，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ の値を求めよ．

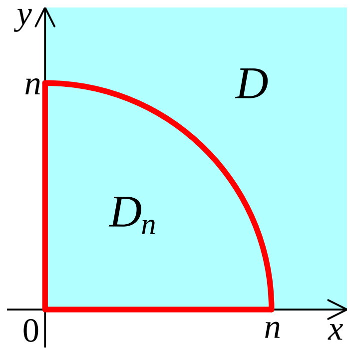
（解答）　D 上で $e^{-x^2-y^2} > 0$ なので，適当な近似増加列をとって計算すればよい．D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ を

$$D_n = \{ (x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq n^2 \}$$

とおく．このとき，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D_n は

$$E_n = \left\{ (r,\theta) \,\middle|\, 0 \leqq r \leqq n,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$$

と対応するので



$$\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_{E_n} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^n re^{-r^2}\,dr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^n = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-n^2}\right)$$

である．よって

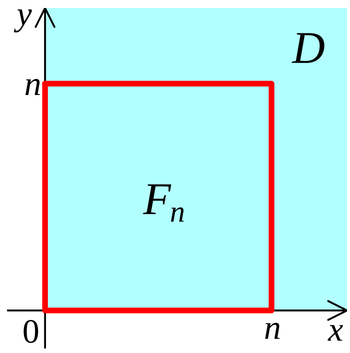
$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

が得られる．

　また，積分領域 D の別の近似増加列

$$F_n = \{ (x,y) \mid 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n \}$$

をとると



$$\iint_{F_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^n e^{-x^2}\,dx \int_0^n e^{-y^2}\,dy = \left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

である．よって

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{F_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

も得られる．

　ゆえに

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

が成り立つ．したがって，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx > 0$ より，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である．

（解答終）

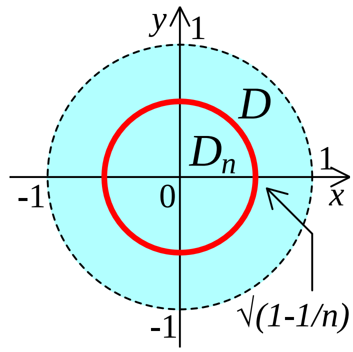
　直接広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$ の値を求めるのは大変であるが，広義重積分を利用すれば簡単に計算できる．この積分値 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ は統計学などさまざまな分野で登場する重要な値なので，必ず記憶しておくこと．

被積分関数が積分領域の境界で発散する場合には，発散する点を避けて近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ をつくればよい．

例題 4.6.　次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy, \qquad D=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2<1\,\}$$

（解答）　D 上で $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}>0$ なので，適当な近似増加列をとって計算すればよい．D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を



$$D_n=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;x^2+y^2\leqq 1-\frac{1}{n}\,\right\}$$

とおく．このとき，極座標変換 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ により，D_n は

$$E_n=\left\{\,(r,\theta)\;\middle|\;0\leqq r\leqq\sqrt{1-\frac{1}{n}},\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi\,\right\}$$

に対応するので

$$\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\iint_{E_n}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr=2\pi\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となる．よって

$$\iint_D\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2\pi$$

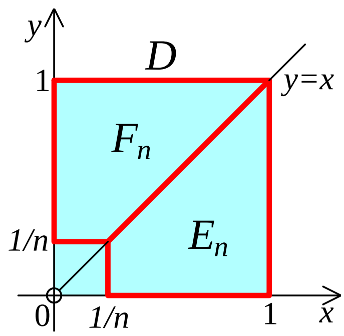
である．

（解答終）

例題 4.7.　次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iint_D\frac{1}{x+y}\,dx\,dy, \qquad D=\{\,(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ (x,y)\risingdotseq(0,0)\,\}$$

（解答）　D 上で $\dfrac{1}{x+y}>0$ なので，適当な近似増加列をとって計算すればよい．D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を



$$E_n=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;\frac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\,\right\}$$

$$F_n=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;\frac{1}{n}\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y\,\right\}$$

とし，$D_n=E_n\cup F_n$ とおく．このとき

$$\iint_{E_n}\frac{1}{x+y}\,dx\,dy=\int_{1/n}^{1}\left(\int_0^x\frac{1}{x+y}\,dy\right)dx$$

$$=\int_{1/n}^{1}\Big[\log(x+y)\Big]_{y=0}^{y=x}dx=\int_{1/n}^{1}\log 2\,dx=\left(1-\frac{1}{n}\right)\log 2$$

であり，同様に

$$\iint_{F_n}\frac{1}{x+y}\,dx\,dy=\left(1-\frac{1}{n}\right)\log 2$$

である．よって

$$\iint_D\frac{1}{x+y}\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{x+y}\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n}\right)\log 2=2\log 2$$

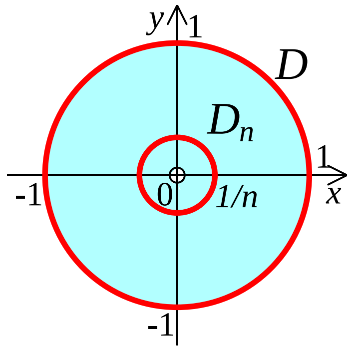
である．

（解答終）

例題 4.8.　次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy, \qquad D=\{\,(x,y)\mid 0<x^2+y^2 \leqq 1\,\}$$

（解答）　D 上で $\log(x^2+y^2)\leqq 0$ なので，適当な近似増加列をとって計算すればよい．D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を



$$D_n=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;\frac{1}{n^2}\leqq x^2+y^2\leqq 1\,\right\}$$

とおく．このとき，極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，D_n は

$$E_n=\left\{\,(r,\theta)\;\middle|\;\frac{1}{n}\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi\,\right\}$$

に対応するので

$$\begin{aligned}\iint_{D_n}\log(x^2+y^2)\,dx\,dy &= \iint_{E_n}\log r^2\cdot r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_{1/n}^1 2r\log r\,dr = 2\pi\left[r^2\log r-\frac{r^2}{2}\right]_{1/n}^1 = -\pi+\frac{\pi}{n^2}(1+2\log n)\end{aligned}$$

となる．よって，多項式と対数関数の増大度の比較より

$$\iint_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\log(x^2+y^2)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\left\{-\pi+\frac{\pi}{n^2}(1+2\log n)\right\}=-\pi$$

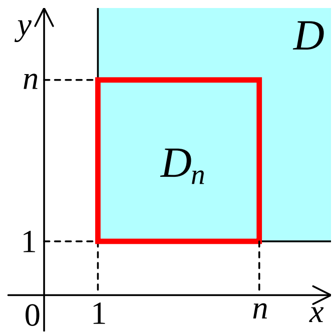
である．

（解答終）

例題 4.9.　次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy, \qquad D=\{\,(x,y)\mid x\geqq 1,\ y\geqq 1\,\}$$

（解答）　D 上で $\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^3}>0$ なので，適当な近似増加列をとって計算すればよい．D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を



$$D_n=\{\,(x,y)\mid 1\leqq x\leqq n,\ 1\leqq y\leqq n\,\}$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}\iint_{D_n}\frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy &= \int_1^n\left(\int_1^n\frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\,dy\right)dx \\ &= \int_1^n\left[-\frac{x}{4(x^2+y^2)^2}\right]_{y=1}^{y=n}dx \\ &= \frac14\int_1^n\left\{\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{x}{(x^2+n^2)^2}\right\}dx \\ &= \frac14\left[-\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2(x^2+n^2)}\right]_1^n=\frac{1}{16}+\frac{1}{16n^2}-\frac{1}{4(n^2+1)}\end{aligned}$$

となる．よって

$$\iint_D\frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{16}+\frac{1}{16n^2}-\frac{1}{4(n^2+1)}\right\}=\frac{1}{16}$$

である．

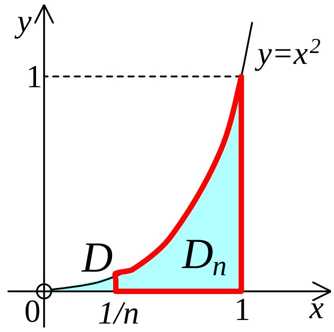
（解答終）

例題 4.10.　次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iint_D e^{y/x}\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq x^2,\ 0 < x \leqq 1\,\}$$

（解答）　D 上で $e^{y/x} > 0$ なので，適当な近似増加列をとって計算すればよい．
D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$D_n = \left\{\,(x, y)\ \middle|\ 0 \leqq y \leqq x^2,\ \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1\,\right\}$$



とおく．このとき

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} e^{y/x}\,dx\,dy &= \int_{1/n}^{1}\left(\int_0^{x^2} e^{y/x}\,dy\right)dx \\ &= \int_{1/n}^{1}\left[x e^{y/x}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx \\ &= \int_{1/n}^{1}(xe^x - x)\,dx = \left[(x-1)e^x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/n}^{1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{1/n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}\end{aligned}$$

となる．よって

$$\iint_D e^{y/x}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} e^{y/x}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{1/n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}\right\} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

である．

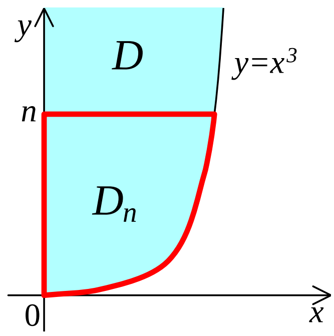
（解答終）

例題 4.11.　次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iint_D x^2 y e^{-y^3}\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq x^3\,\}$$

（解答）　D 上で $x^2 y e^{-y^3} \geqq 0$ なので，適当な近似増加列をとって計算すれば
よい．D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$D_n = \{\,(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq n,\ 0 \leqq x \leqq \sqrt[3]{y}\,\}$$



とおく．このとき

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} x^2 y e^{-y^3}\,dx\,dy &= \int_0^n\left(\int_0^{\sqrt[3]{y}} x^2 y e^{-y^3}\,dx\right)dy \\ &= \int_0^n\left[\frac{x^3}{3}\,y e^{-y^3}\right]_{x=0}^{x=\sqrt[3]{y}} dy \\ &= \int_0^n \frac{y^2}{3}\,e^{-y^3}\,dy = \left[-\frac{1}{9}\,e^{-y^3}\right]_0^n = \frac{1}{9}\,(1 - e^{-n^3})\end{aligned}$$

となる．よって

$$\iint_D x^2 y e^{-y^3}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} x^2 y e^{-y^3}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{9}\,(1 - e^{-n^3}) = \frac{1}{9}$$

である．

（解答終）

例題 4.12.　次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dx\,dy\,dz, \qquad D=\{\,(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\geqq 1\,\}$$

（解答）　D 上で $\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}>0$ なので，適当な近似増加列をとって計算すればよい．D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$D_n=\{\,(x,y,z)\mid 1\leqq x^2+y^2+z^2\leqq n^2\,\}$$

とおく．このとき，極座標変換 $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ により，D_n は

$$E_n=\{\,(r,\theta,\varphi)\mid 1\leqq r\leqq n,\ 0\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi\,\}$$

に対応するので

$$\begin{aligned}\iiint_{D_n}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dx\,dy\,dz&=\iiint_{E_n}\frac{1}{r^4}\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\\&=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_1^n\frac{1}{r^2}\,dr=2\pi\cdot 2\left[-\frac{1}{r}\right]_1^n=4\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\iiint_D\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dx\,dy\,dz=\lim_{n\to\infty}\iiint_{D_n}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dx\,dy\,dz=\lim_{n\to\infty}4\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)=4\pi$$

である．

（解答終）

例題 4.13.　次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz, \qquad D=\{\,(x,y,z)\mid 0<x^2+y^2+z^2\leqq 1\,\}$$

（解答）　D 上で $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}>0$ なので，適当な近似増加列をとって計算すればよい．D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$D_n=\left\{(x,y,z)\;\middle|\;\frac{1}{n^2}\leqq x^2+y^2+z^2\leqq 1\right\}$$

とおく．このとき，極座標変換 $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ により，D_n は

$$E_n=\left\{(r,\theta,\varphi)\;\middle|\;\frac{1}{n}\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi\right\}$$

に対応するので

$$\begin{aligned}\iiint_{D_n}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz&=\iiint_{E_n}\frac{1}{r^2}\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\\&=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_{1/n}^1 dr=2\pi\cdot 2\left(1-\frac{1}{n}\right)=4\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\iiint_D\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=\lim_{n\to\infty}\iiint_{D_n}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=\lim_{n\to\infty}4\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)=4\pi$$

である．

（解答終）

4.3　ガンマ関数とベータ関数の関係

第 6 章で紹介した次の公式を広義 2 重積分を利用して証明する．応用例は第 6 章 7.3 節を参照．

例題 4.14. （ガンマ関数とベータ関数の関係式）

任意の $p>0,\ q>0$ に対して，次の公式が成り立つことを示せ．

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

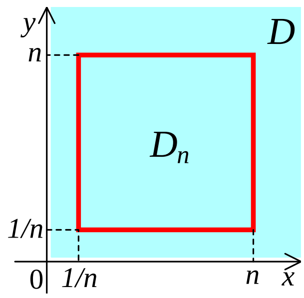
（解答）　$p>0,\ q>0$ に対して，広義重積分

$$I=\iint_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}\,dx\,dy,\qquad D=\{\,(x,y)\mid x>0,\ y>0\,\}$$

を考える．D 上で $f(x,y)=x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}>0$ なので，適当な近似増加列をとって計算すればよい．

まず，D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$D_n=\left\{\,(x,y)\ \middle|\ \frac{1}{n}\leqq x\leqq n,\ \frac{1}{n}\leqq y\leqq n\,\right\}$$



とおけば，$f(x,y)=x^{p-1}e^{-x}y^{q-1}e^{-y}$ は変数分離形なので

$$\iint_{D_n}f(x,y)\,dx\,dy=\int_{1/n}^{n}x^{p-1}e^{-x}\,dx\int_{1/n}^{n}y^{q-1}e^{-y}\,dy$$

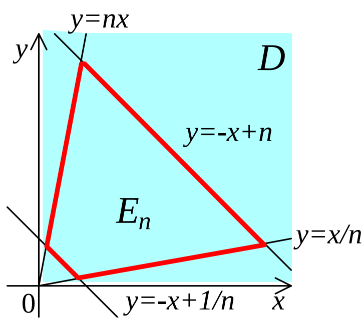
より

$$I=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\infty}x^{p-1}e^{-x}\,dx\int_0^{\infty}y^{q-1}e^{-y}\,dy=\Gamma(p)\Gamma(q)$$

となる．

一方，D の近似増加列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$E_n=\left\{\,(x,y)\ \middle|\ \frac{x}{n}\leqq y\leqq nx,\ \frac{1}{n}\leqq x+y\leqq n\,\right\}$$



とする．さらに $x=uv,\ y=u(1-v)$ と変数変換すれば，E_n は

$$E_n'=\left\{\,(u,v)\ \middle|\ \frac{1}{n}\leqq u\leqq n,\ \frac{1}{n+1}\leqq v\leqq\frac{n}{n+1}\,\right\}$$

と対応し，また

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}v & u\\ 1-v & -u\end{vmatrix}=-u$$

であるから

$$\begin{aligned}\iint_{E_n}f(x,y)\,dx\,dy&=\iint_{E_n'}(uv)^{p-1}\{u(1-v)\}^{q-1}e^{-u}\cdot|-u|\,du\,dv\\&=\int_{1/n}^{n}u^{p+q-1}e^{-u}\,du\int_{1/(n+1)}^{n/(n+1)}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dv\end{aligned}$$

より

$$I=\lim_{n\to\infty}\iint_{E_n}f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\infty}u^{p+q-1}e^{-u}\,du\int_0^{1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dv=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)$$

ともなる．

以上の結果より，$\Gamma(p)\Gamma(q)=I=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)$ であるから

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

が成り立つ．

（解答終）

4.4 定符号でない関数の広義重積分

ここでは関数 $f(x,y)$ が D で定符号ではない場合の広義重積分を考える．定符号の場合と異なり，単純に D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとり

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

と定義することはできない．なぜならば，右辺の極限が存在するとは限らないし，存在したとしても近似増加列のとり方によって極限値が異なることがありうるからである．

そこで，まずは

$$f_+(x,y) = \max\{f(x,y),\,0\}, \qquad f_-(x,y) = -\min\{f(x,y),\,0\}$$

とおくと，$f_+(x,y)$ と $f_-(x,y)$ はともに定符号関数である．さらに

$$f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y)$$

であるから，定符号関数に対する広義重積分 $\iint_D f_+(x,y)\,dx\,dy$, $\iint_D f_-(x,y)\,dx\,dy$ がともに収束する場合に

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \coloneqq \iint_D f_+(x,y)\,dx\,dy - \iint_D f_-(x,y)\,dx\,dy$$

と定義し，左辺の広義重積分は**収束**するという．$\iint_D f_+(x,y)\,dx\,dy$, $\iint_D f_-(x,y)\,dx\,dy$ の少なくとも一方が正の無限大に発散する場合には，左辺の広義重積分は発散するという．

定理 4.15. **（広義重積分可能であるための必要十分条件）**

広義重積分 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ について，次が成り立つ．

(1) $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ が収束 $\iff$ $\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$ が収束

(2) $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ が収束すれば，D の任意の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

が成り立つ．

無限級数や 1 変数関数の広義積分については，絶対収束と条件収束という概念があったが，2 変数以上の関数の広義重積分については絶対収束の場合しか考えられないことがわかる．また，広義重積分の収束・発散の判定に比較判定法が使えることが同様にしてわかる．

例題 4.16.　$D = \{ (x,y) \mid 0 < x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \}$ のとき，広義重積分

$$\iint_D \frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

が収束することを示し，その値を求めよ．

（解答）　シュワルツの不等式より，D 上で

$$\left| \frac{2x-y}{x^2+y^2} \right| = \frac{|2x-y|}{x^2+y^2} \leqq \frac{\sqrt{5}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

である．D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$D_n = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \frac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$$

とおく．このとき，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D_n は

$$E_n = \left\{ (r,\theta) \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$$

に対応するので

$$\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_{E_n} \frac{1}{\sqrt{r^2}} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{1/n}^1 dr = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{\pi}{2} \qquad (n \to \infty)$$

より，定符号関数 $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は D 上で広義重積分可能である．

よって，比較判定法により，広義重積分 $\displaystyle\iint_D \left| \frac{2x-y}{x^2+y^2} \right| dx\,dy$ も収束する．

ゆえに，広義重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ は絶対収束するから，適当な近似増加列をとって計算すればよい．D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を上と同じようにとって，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により

$$\iint_{D_n} \frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{E_n} \frac{r(2\cos\theta-\sin\theta)}{r^2} r\,dr\,d\theta = \int_{1/n}^1 dr \int_0^{\pi/2} (2\cos\theta-\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\Big[2\sin\theta+\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} = 1-\frac{1}{n}$$

であるから，求める広義重積分の値は

$$\iint_D \frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$$

である．

（解答終）

このように定符号ではない関数の広義重積分については，まず絶対収束することを確認し，それから適当な近似増加列をとり計算しなければならない．後半のみを解答しても不十分なので注意すること．

なお，上では工夫したが，三角不等式と $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ より

$$\left| \frac{2x-y}{x^2+y^2} \right| = \frac{|2x-y|}{x^2+y^2} \leqq \frac{2x+y}{x^2+y^2}$$

として，この右辺の D 上の広義重積分が収束することを示してもよい．

例題 4.17.（発散する広義重積分）

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D と D 上の関数 $f(x,y)$ を次で定める．

$$D = \{\,(x,y) \mid 0 < x \leqq 1,\ 0 < y \leqq 1\,\}, \qquad f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

(1) $D_n = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ \dfrac{1}{n} \leqq y \leqq 1 \right\}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ を求めよ．

(2) $E_n = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \dfrac{1}{n^2} \leqq x \leqq 1,\ \dfrac{1}{n} \leqq y \leqq 1 \right\}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} f(x,y)\,dx\,dy$ を求めよ．

(3) 広義重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ の収束・発散を調べよ．

（解答）

(1) $D_n = \left[\dfrac{1}{n}, 1\right] \times \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$ であるから，累次化すれば

$$\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{1/n}^{1} \left\{ \int_{1/n}^{1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) dy \right\} dx$$

となる．ここで

$$\int_{1/n}^{1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) dy = \left[\frac{y}{x} - \log y \right]_{y=1/n}^{1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{x} - \log n$$

であるから

$$\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{1/n}^{1} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{x} - \log n \right\} dx = \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \log x - x \log n \right]_{1/n}^{1} = 0$$

となる．よって

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

である．

(2) $E_n = \left[\dfrac{1}{n^2}, 1\right] \times \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$ であるから，累次化すれば (1) の計算より

$$\begin{aligned}\iint_{E_n} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{1/n^2}^{1} \left\{ \int_{1/n}^{1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) dy \right\} dx \\ &= \int_{1/n^2}^{1} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{x} - \log n \right\} dx = \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \log x - x \log n \right]_{1/n^2}^{1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \log n\end{aligned}$$

となる．よって

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} f(x,y)\,dx\,dy = \infty$$

である．

(3) D の異なる近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy \neq \lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

であるから，広義重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ は発散する．

（解答終）

例題 4.18. （発散する広義重積分）

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D と D 上の関数 $f(x,y)$ を次で定める．

$$D = \{\,(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ (x,y) \neq (0,0)\,\}, \qquad f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx$ の値を求めよ．　(2) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy$ の値を求めよ．

(3) 広義重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ の収束・発散を調べよ．

（解答）

(1)　不定積分を求めると

$$\int \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy = \int \left\{\frac{2x}{(x+y)^3} - \frac{1}{(x+y)^2}\right\} dy = \frac{-x}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y} = \frac{y}{(x+y)^2}$$

であるから，$x > 0$ ならば

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

となる．これは $x = 0$ まで含めて連続であるから

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx = \lim_{t\to+0}\int_t^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

である．

(2)　不定積分を求めると，(1) と同様にして

$$\int \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

であるから

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = \lim_{t\to+0}\int_t^1 \left[-\frac{x}{(x+y)^2}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{(y+1)^2}\,dy = \left[\frac{1}{y+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

である．

(3)　$f(x,y) \geqq 0$ となるのは

$$(x,y) \in D^+ = \{\,(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq x \leqq 1,\ (x,y) \neq (0,0)\,\}$$

のときであり，D^+ の近似増加列 $\{D_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$D_n^+ = \left\{\,(x,y) \;\middle|\; \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\right\}$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}\iint_{D_n^+} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{1/n}^1 \left(\int_0^x \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right) dx \\ &= \int_{1/n}^1 \left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_{1/n}^1 \frac{1}{4x}\,dx = \left[\frac{1}{4}\log x\right]_{1/n}^1 = \frac{1}{4}\log n\end{aligned}$$

より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n^+} f(x,y)\,dx\,dy = \infty$ となる．よって，広義重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ は発散する．

（解答終）

このように関数 $f(x,y)$ が D 上で広義重積分不可能な場合でも（広義）累次積分は可能なことがある．ただし，その際には積分順序の変更ができない場合もあるので注意すること．

5　重積分の応用

5.1　体積

立体の体積 V を重積分を用いて求めてみる．高校数学では立体 Ω が与えられたときに，例えば $z=t$ としたときの t の動く範囲と平面 $z=t$ による立体 Ω の断面積 $S(t)$ を求めてから

$$V=\int_a^b S(t)\,dt$$

のように計算した．これは立体 Ω を

$$\Omega=\{\,(x,y,z)\mid a\leqq z\leqq b,\ (x,y)\in D_z\,\},\qquad D_z=\{\,(x,y)\mid (x,y,z)\in\Omega\,\}$$

と考えて（D_z とは z の値を固定したときの z 軸に垂直な平面による Ω の断面のこと），3 重積分を

$$V=\iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz=\int_a^b\left(\iint_{D_z}1\,dx\,dy\right)dz=\int_a^b|D_z|\,dz$$

と計算したことに相当する．

ただし，この計算法では z 軸に対して垂直な平面による立体 Ω の断面積を直接計算できなければならない．そのため，立体が回転体である，立体の断面積が相似であるなどの特殊な状況でなければ一般には困難である．そこで曲面に囲まれた立体について，その体積の 3 重積分を素直に累次化すれば以下のようになる．

定理 5.1.（立体の体積）
関数 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ はともに積分領域 D 上で連続で，$f(x,y)\leqq g(x,y)$ とする．このとき，D 上の z 軸方向の柱体と曲面 $z=f(x,y)$, $z=g(x,y)$ が囲む立体 Ω の体積 V は次で与えられる．

$$V=\iint_D\{g(x,y)-f(x,y)\}\,dx\,dy$$

証明.　立体 Ω は

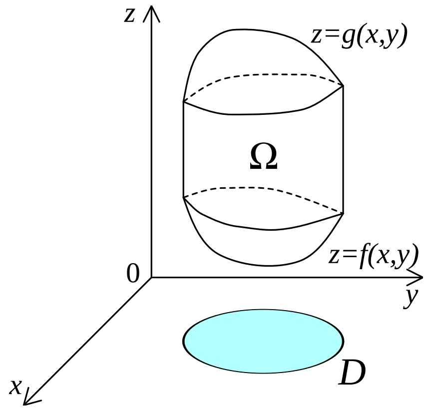
$$\Omega=\{\,(x,y,z)\mid (x,y)\in D,\ f(x,y)\leqq z\leqq g(x,y)\,\}$$

と縦線集合で表せるから，その体積 V は 3 重積分を累次化して

$$V=\iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz=\iint_D\left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)}1\,dz\right)dx\,dy=\iint_D\{g(x,y)-f(x,y)\}\,dx\,dy$$

が成り立つ．　□

簡単にまとめれば，2 つのグラフで囲まれる面積の求め方と同様に，2 つのグラフ（曲面）で囲まれる立体の体積を求めるには上側にある関数から下側にある関数を引いてから，囲んでいる範囲の (x,y) の領域について 2 重積分すればよい．



具体的な立体の体積を計算するには，立体の上側と下側の境界の曲面の方程式および積分領域 D を決定しなければならない．必ずしも立体の概形を図示する必要はないが，問題によっては簡単な図を描くだけで考えやすいこともある．球や平面，回転放物面や回転双曲面などはイメージできるようにしておくことが望ましい．なお，立体の体積は必ず正の値となるから，計算結果が負になった場合は誤りなので必ず見直すこと．

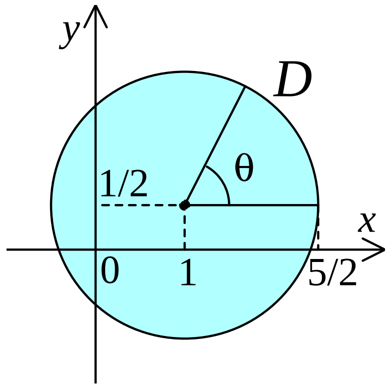
例題 5.2.　回転放物面 $z=x^2+y^2$ と平面 $z=2x+y+1$ が囲む部分の体積を求めよ．

（解答）　囲む部分において回転放物面 $z=x^2+y^2$ が平面 $z=2x+y+1$ より下にあり

$$x^2+y^2 \leqq 2x+y+1 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{9}{4}$$

なので，積分領域は

$$D=\left\{ (x,y) \,\middle|\, (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{9}{4} \right\}$$



となる．よって，求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \{(2x+y+1)-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy \\ &= \iint_D \left\{ \frac{9}{4}-(x-1)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \right\} dx\,dy \end{aligned}$$

である．

　ここで，極座標変換 $x=1+r\cos\theta,\ y=\dfrac{1}{2}+r\sin\theta$ により，D は

$$E=\left\{ (r,\theta) \,\middle|\, 0 \leqq r \leqq \frac{3}{2},\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \right\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ であるから

$$V=\iint_E \left(\frac{9}{4}-r^2\right)\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{3/2} \left(\frac{9}{4}r-r^3\right) dr = 2\pi\left[\frac{9}{8}r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^{3/2}=\frac{81}{32}\pi$$

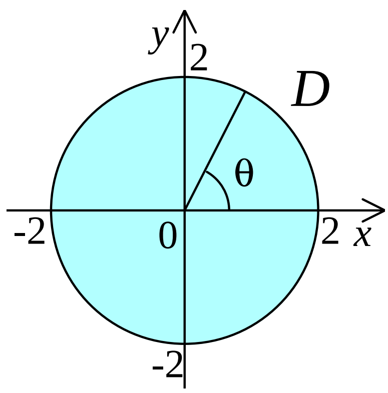
である．

（解答終）

例題 5.3.　平面 $z=0$，平面 $z=2-y$ と円柱面 $x^2+y^2=4$ で囲まれる部分の体積を求めよ．

（解答）　円柱体 $x^2+y^2 \leqq 4$ において平面 $z=2-y$ が平面 $z=0$ より上にあるので，積分領域は

$$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 4\}$$



となり，求める体積 V は

$$V=\iint_D (2-y)\,dx\,dy$$

である．

　ここで，極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，D は

$$E=\{(r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ であるから

$$V=\iint_E (2-r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi}(2r-r^2\sin\theta)\,d\theta\right) dr=2\pi\int_0^2 2r\,dr=2\pi\Big[r^2\Big]_0^2=8\pi$$

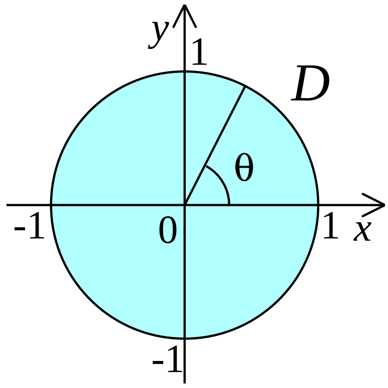
である．

（解答終）

例題 5.4.　球体 $x^2+y^2+z^2 \leqq 3$ と円柱体 $x^2+y^2 \leqq 1$ の共通部分の体積を求めよ．

（解答）　球面は $z=\pm\sqrt{3-x^2-y^2}$ と表せて，円柱体 $x^2+y^2 \leqq 1$ において半球面 $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$ が半球面 $z=-\sqrt{3-x^2-y^2}$ より上にあるので，積分領域は

$$D=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2 \leqq 1\,\}$$



となり，求める体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\iint_D \left\{\sqrt{3-x^2-y^2}-(-\sqrt{3-x^2-y^2}\,)\right\}dx\,dy\\&=\iint_D 2\sqrt{3-x^2-y^2}\,dx\,dy\end{aligned}$$

である．

ここで，極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，D は

$$E=\{\,(r,\theta)\mid 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi\,\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ であるから

$$V=\iint_E 2\sqrt{3-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\sqrt{3-r^2}\,dr=4\pi\left[-\frac{1}{3}(3-r^2)^{3/2}\right]_0^1=\frac{4\pi}{3}\,(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\,)$$

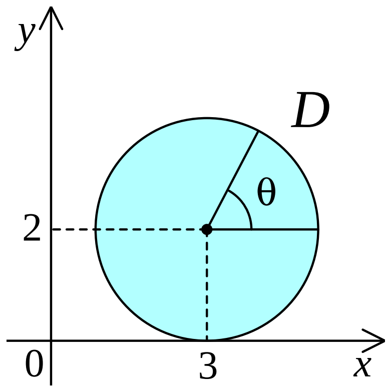
である．

（解答終）

例題 5.5.　曲面 $z=xy$ と円柱面 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ および xy 平面の囲む部分の体積を求めよ．

（解答）　円柱体 $(x-3)^2+(y-2)^2 \leqq 4$ において曲面 $z=xy$ が平面 $z=0$ より上にあるので，積分領域は

$$D=\{\,(x,y)\mid (x-3)^2+(y-2)^2\leqq 4\,\}$$



となり，求める体積 V は

$$V=\iint_D xy\,dx\,dy$$

である．

ここで，極座標変換 $x=3+r\cos\theta,\ y=2+r\sin\theta$ により，D は

$$E=\{\,(r,\theta)\mid 0\leqq r\leqq 2,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi\,\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ であるから

$$\begin{aligned}V&=\iint_E (3+r\cos\theta)(2+r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta\\&=\int_0^2\left\{\int_0^{2\pi}\left(6r+2r^2\cos\theta+3r^2\sin\theta+\frac{r^3}{2}\sin 2\theta\right)d\theta\right\}dr=2\pi\int_0^2 6r\,dr=2\pi\left[3r^2\right]_0^2=24\pi\end{aligned}$$

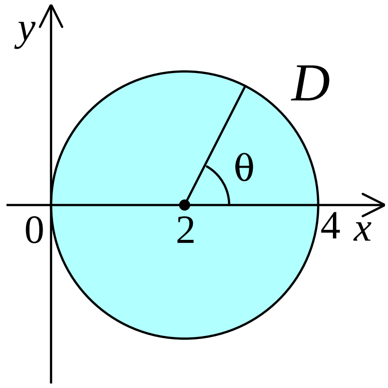
である．

（解答終）

例題 5.6.　双曲放物面 $z = x^2 - y^2$ と楕円放物面 $z = 18 - 2(x-3)^2 - 4y^2$ の囲む部分の体積を求めよ．

（解答）　不等式

$$x^2 - y^2 \leqq 18 - 2(x-3)^2 - 4y^2$$



を変形すれば

$$3x^2 - 12x + 3y^2 \leqq 0 \qquad \therefore\ (x-2)^2 + y^2 \leqq 4$$

となる．これは有界集合であるから，積分領域は

$$D = \{\, (x, y) \mid (x-2)^2 + y^2 \leqq 4 \,\}$$

であり，領域 D 上で 2 曲面が囲む部分において双曲放物面 $z = x^2 - y^2$ が楕円放物面 $z = 18 - 2(x-3)^2 - 4y^2$ より下にある．よって，求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \{18 - 2(x-3)^2 - 4y^2 - (x^2 - y^2)\}\, dx\, dy \\ &= \iint_D 3\{4 - (x-2)^2 - y^2\}\, dx\, dy \end{aligned}$$

である．

ここで，極座標変換 $x = 2 + r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D は

$$E = \{\, (r, \theta) \mid 0 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \,\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ であるから

$$V = \iint_E 3(4 - r^2) \cdot r\, dr\, d\theta = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r - r^3)\, dr = 6\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 24\pi$$

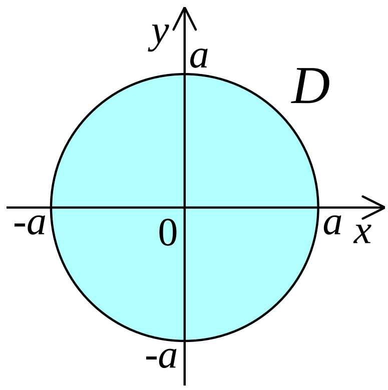
である．

（解答終）

例題 5.7.　$a > 0$ とする．2 個の円柱体 $x^2 + y^2 \leqq a^2,\ x^2 + z^2 \leqq a^2$ の共通部分の体積を求めよ．

（解答）　円柱体 $x^2 + y^2 \leqq a^2$ において曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ が曲面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2}$ より上にあるので，積分領域は

$$D = \{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq a^2 \,\}$$



となり，求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left\{ \sqrt{a^2 - x^2} - \left(-\sqrt{a^2 - x^2} \right) \right\} dx\, dy \\ &= \int_{-a}^{a} \left(\int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} 2\sqrt{a^2 - x^2}\, dy \right) dx \\ &= \int_{-a}^{a} 4(a^2 - x^2)\, dx = 8\left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{16}{3}\, a^3 \end{aligned}$$

である．

（解答終）

例題 5.8.　$a>0$ とする．曲面 $z=xy$ と曲面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ および xy 平面の囲む部分の体積を求めよ．

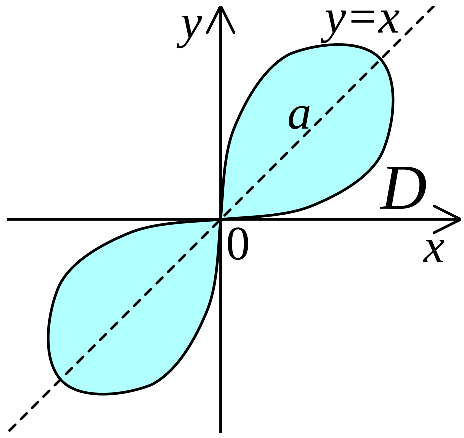
（解答）　積分領域を求めるために曲線

$$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$$

を極座標表示すれば，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ より

$$r^4=2a^2r^2\cos\theta\sin\theta=a^2r^2\sin 2\theta \qquad \therefore\ r^2=a^2\sin 2\theta$$

となる．これより，$\sin 2\theta \geqq 0$ でなければならないから，θ の範囲は $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ である．



よって，積分領域は右図のように

$$D=\{\,(x,y)\mid(x^2+y^2)^2\leqq 2a^2xy\,\}$$

となる．さらに D 上では曲面 $z=xy$ が平面 $z=0$ より上にあり，曲面 $z=xy$ および柱体 $(x^2+y^2)^2\leqq 2a^2xy$ がともに原点に関して点対称だから，$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ の部分の体積を求めて 2 倍すればよいので

$$D'=\{\,(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ (x^2+y^2)^2\leqq 2a^2xy\,\}$$

とおけば，求める体積 V は

$$V=2\iint_{D'}xy\,dx\,dy$$

である．

ここで，極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，D' は上の計算により

$$E=\left\{\,(r,\theta)\ \middle|\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\ 0\leqq r\leqq a\sqrt{\sin 2\theta}\,\right\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ であるから

$$V=2\iint_E r^2\cos\theta\sin\theta\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}r^3\sin 2\theta\,dr\right)d\theta$$

となり

$$\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}r^3\sin 2\theta\,dr=\left[\frac{r^4}{4}\sin 2\theta\right]_{r=0}^{r=a\sqrt{\sin 2\theta}}=\frac{a^4}{4}\sin^3 2\theta=\frac{a^4}{16}(3\sin 2\theta-\sin 6\theta)$$

なので

$$V=\frac{a^4}{16}\int_0^{\pi/2}(3\sin 2\theta-\sin 6\theta)\,d\theta=\frac{a^4}{16}\left[-\frac{3}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{6}\cos 6\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{a^4}{6}$$

である．

（解答終）

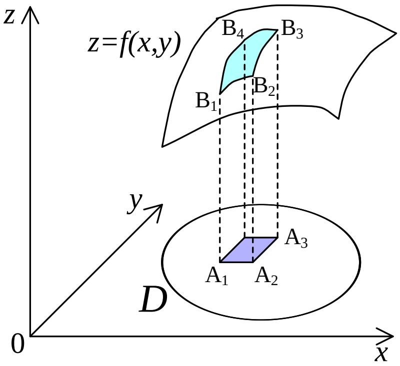
5.2 曲面積

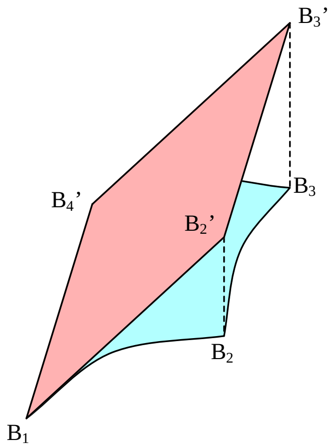
定理 5.9. （曲面積）

関数 $f(x,y)$ は積分領域 D 上で C^1 級とする．このとき，D の上にある曲面 $z=f(x,y)$ の曲面積 S は

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

となる．





証明. D を x 軸に平行な直線と y 軸に平行な直線を用いて細かく分割する．D の内部に含まれる小長方形の 1 つを $[x,x+\Delta x]\times[y,y+\Delta y]$ とし，その 4 頂点を

$$\mathrm{A}_1(x,y),\qquad \mathrm{A}_2(x+\Delta x,y),\qquad \mathrm{A}_3(x+\Delta x,y+\Delta y),\qquad \mathrm{A}_4(x,y+\Delta y)$$

とおく．また，D の細分に応じて曲面 $z=f(x,y)$ も分割されるので，xy 平面上の点 A_j に対応する曲面上の点を B_j とおき，長方形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ に対応する曲面上の微小部分 $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\mathrm{B}_4$ の曲面積 ΔS を次のように近似する．

まず，点 $\mathrm{B}_1(x,y,f(x,y))$ における曲面の接平面を考え，A_j に対応する接平面上の点を B'_j とする．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}'_2}=\Delta x\begin{pmatrix}1\\0\\f_x(x,y)\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}'_4}=\Delta y\begin{pmatrix}0\\1\\f_y(x,y)\end{pmatrix}$$

であるから，Δx, Δy が十分小さければ，$j=2,3,4$ に対して点 B_j と点 B'_j は十分近い．そこで，曲面の微小部分の曲面積 ΔS を平行四辺形 $\mathrm{B}_1\mathrm{B}'_2\mathrm{B}'_3\mathrm{B}'_4$ の面積で近似すれば

$$\begin{aligned}\Delta S &\fallingdotseq \sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}'_2}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}'_4}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}'_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}'_2}\right)^2}\\ &=\sqrt{\{1+\{f_x(x,y)\}^2\}\{1+\{f_y(x,y)\}^2\}-\{f_x(x,y)f_y(x,y)\}^2}\,\Delta x\,\Delta y\\ &=\sqrt{1+\{f_{\mathrm{x}}(x,y)\}^2+\{f_y(x,y)\}^2}\,\Delta x\,\Delta y\end{aligned}$$

である．この微小部分の曲面積 ΔS を D の分割の小長方形すべてについて足し合わせれば

$$S=\sum\Delta S\fallingdotseq\sum\sqrt{1+\{f_x(x,y)\}^2+\{f_y(x,y)\}^2}\,\Delta x\,\Delta y$$

と近似される．ここで D の分割を一様に細かくして極限をとれば，上の近似における微小部分 $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\mathrm{B}_4$ と平行四辺形 $\mathrm{B}_1\mathrm{B}'_2\mathrm{B}'_3\mathrm{B}'_4$ のずれがなくなるので等号となり，右辺はリーマン和の極限として

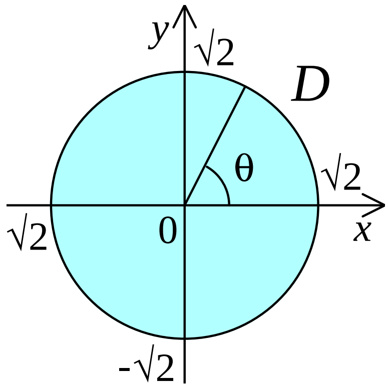
$$S=\iint_D\sqrt{1+\{f_x(x,y)\}^2+\{f_y(x,y)\}^2}\,dx\,dy$$

が得られる． □

例題 5.10.　回転放物面 $z = 2 - x^2 - y^2$ の $z \geqq 0$ の部分の曲面積を求めよ．

（解答）　$z_x = -2x,\ z_y = -2y$ より

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$



となる．また，積分領域は

$$D = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 2\,\}$$

となり，求める曲面積 S は

$$S = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy$$

である．

ここで，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D は

$$E = \{\,(r, \theta) \mid 0 \leqq r \leqq \sqrt{2},\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\,\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ であるから

$$S = \iint_E \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr = 2\pi \left[\frac{1}{12}\,(1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{3}\,\pi$$

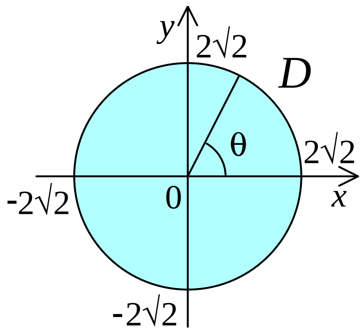
である．

（解答終）

例題 5.11.　球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ の $z \geqq 1$ の部分の曲面積を求めよ．

（解答）　$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ であるから

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \qquad z_y = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$



より

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{9 - x^2 - y^2}} = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

となる．また，積分領域は $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \geqq 1$ より

$$D = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 8\,\}$$

となり，求める曲面積 S は

$$S = \iint_D \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

である．

ここで，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，D は

$$E = \{\,(r, \theta) \mid 0 \leqq r \leqq 2\sqrt{2},\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\,\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ であるから

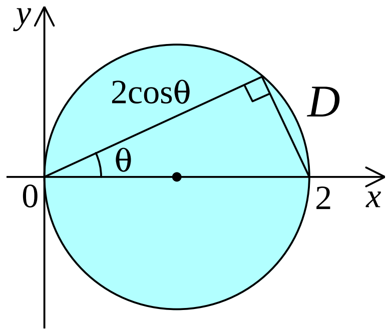
$$S = \iint_E \frac{3}{\sqrt{9 - r^2}} \cdot r\, dr\, d\theta = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{r}{\sqrt{9 - r^2}}\, dr = 6\pi \left[-\sqrt{9 - r^2} \right]_0^{2\sqrt{2}} = 12\pi$$

である．

（解答終）

例題 5.12.　半球面 $x^2+y^2+z^2=4,\ z \geqq 0$ において円柱面 $x^2+y^2=2x$ の内部にある部分の曲面積を求めよ．

（解答）　$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ であるから



$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \qquad z_y = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

より

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

となる．また，積分領域は

$$D = \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 2x\,\}$$

となり，求める曲面積 S は

$$S = \iint_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

である．ここで，極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，D は

$$E = \left\{\,(r,\theta)\ \middle|\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta\,\right\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ であるから

$$S = \iint_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \iint_E \frac{2}{\sqrt{4-r^2}}\cdot r\,dr\,d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\right)d\theta$$

であり

$$\int_0^{2\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr = \Big[-\sqrt{4-r^2}\Big]_{r=0}^{r=2\cos\theta} = 2-\sqrt{4\sin^2\theta} = 2-2|\sin\theta|$$

なので

$$S = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2-2|\sin\theta|)\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)\,d\theta = 8\Big[\theta+\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} = 8\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = 4(\pi-2)$$

である．

（解答終）

曲面積の計算においては，その公式のため根号を含む積分を実行する必要があることが多い．その際には $\sqrt{x^2}=|x|$ であることに気を付けること．なお，上の例題では曲面と円柱の両方が x 軸に関して対称であることに着目して

$$D' = \{\,(x,y) \mid y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 2x\,\}$$

とおいて

$$S = 2\iint_{D'} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

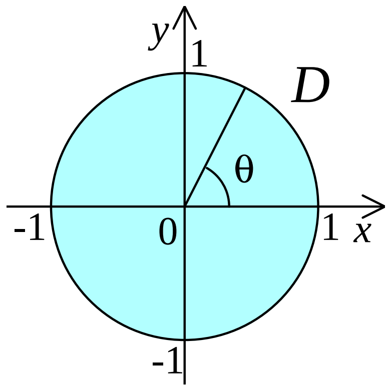
としてもよい．このときは極座標変換により

$$E' = \left\{\,(r,\theta)\ \middle|\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta\,\right\}$$

と対応する．ただし，曲面の方程式が簡単ならば，わざわざ対称性に注目しなくても計算はそれほど複雑にはならない．立体の概形も描かず対称性についても説明せず，実際はそうではないのに安易に「第 1 象限の部分を 4 倍すればいいので～」として誤った式を立てた答案などをこれまでに見てきたので，対称性を利用しない解答ができるようになってから楽をすることを考えた方がよい．

例題 5.13.　球体 $x^2+y^2+z^2 \leqq 2$ と回転放物体 $z \geqq x^2+y^2$ の共通部分の立体の体積と表面積を求めよ．

（解答）　共通部分において $z \geqq 0$ なので球面は $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ であり，これが回転放物面 $z=x^2+y^2$ より上にあるから



$$x^2+y^2 \leqq \sqrt{4-x^2-y^2} \iff (x^2+y^2+2)(x^2+y^2-1) \leqq 0$$
$$\iff x^2+y^2 \leqq 1$$

なので，積分領域は

$$D=\{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\,\}$$

となる．よって，求める体積 V は

$$V=\iint_D \{\sqrt{2-x^2-y^2}-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy$$

である．ここで，極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，D は

$$E=\{\,(r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\,\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ であるから

$$V=\iint_E(\sqrt{2-r^2}-r^2)\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r\sqrt{2-r^2}-r^3)\,dr=2\pi\left[-\frac{1}{3}\,(2-r^2)^{3/2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\,\pi$$

である．

次に，D 上の回転放物面 $z=x^2+y^2$ の曲面積を S_1，半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ の曲面積を S_2 とおくと，求める表面積 S は $S=S_1+S_2$ である．$z=x^2+y^2$ のときは $z_x=2x,\ z_y=2y$ より

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

なので

$$S_1=\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

であり，極座標変換により

$$S_1=\iint_E \sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,dr=2\pi\left[\frac{1}{12}\,(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^1=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\,\pi$$

となる．一方，$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ のときは $z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2-y^2}},\ z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$ より

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{2-x^2-y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$$

なので

$$S_2=\iint_D \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

であり，極座標変換により

$$S_2=\iint_E \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-r^2}}\cdot r\,dr\,d\theta=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{2-r^2}}\,dr=2\sqrt{2}\,\pi\left[-\sqrt{2-r^2}\,\right]_0^1=(4-2\sqrt{2}\,)\pi$$

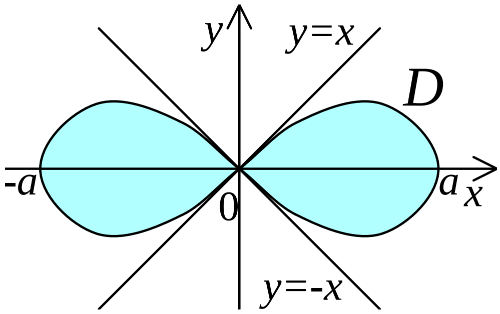
となる．ゆえに，$S=S_1+S_2=\dfrac{23+5\sqrt{5}-12\sqrt{2}}{6}\,\pi$ である．

（解答終）

例題 5.14.　$a>0$ とする．回転放物面 $x^2+y^2=2az$ が曲面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ により切り取られる部分の曲面積を求めよ．

（解答）　$z=\dfrac{1}{2a}(x^2+y^2)$ であるから，$z_x=\dfrac{x}{a},\ z_y=\dfrac{y}{a}$ より

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}$$



となる．また，積分領域を求めるために曲線

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

を極座標表示すれば，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ より

$$r^4=a^2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=a^2r^2\cos 2\theta \qquad \therefore\ r^2=a^2\cos 2\theta$$

となる．これより，$\cos 2\theta \geqq 0$ でなければならないから，θ の範囲は $-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ である．

よって，積分領域は右上図のように

$$D=\{\,(x,y)\mid (x^2+y^2)^2\leqq a^2(x^2-y^2)\,\}$$

となるが，回転放物面 $x^2+y^2=2az$ および柱体 $(x^2+y^2)^2\leqq a^2(x^2-y^2)$ がともに x 軸と y 軸に関して対称だから，$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ の部分の曲面積を求めて 4 倍すればよいので

$$D'=\{\,(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ (x^2+y^2)^2\leqq a^2(x^2-y^2)\,\}$$

とおけば，求める曲面積 S は

$$S=4\iint_{D'}\frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}\,dx\,dy$$

である．ここで，極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，D' は

$$E=\left\{\,(r,\theta)\ \middle|\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ 0\leqq r\leqq a\sqrt{\cos 2\theta}\,\right\}$$

に対応し，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ であるから

$$S=4\iint_E\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{a}\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{4}{a}\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}r\sqrt{a^2+r^2}\,dr\right)d\theta$$

となる．$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}r\sqrt{a^2+r^2}\,dr=\left[\frac{1}{3}(a^2+r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$=\frac{1}{3}\{(a^2+a^2\cos 2\theta)^{3/2}-a^3\}=\frac{1}{3}\{(2a^2\cos^2\theta)^{3/2}-a^3\}=\frac{a^3}{3}(2\sqrt{2}\cos^3\theta-1)$$

なので

$$S=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/4}(2\sqrt{2}\cos^3\theta-1)\,d\theta=\frac{8\sqrt{2}\,a^2}{3}\int_0^{\pi/4}\cos^3\theta\,d\theta-\frac{a^2}{3}\pi$$

となり，さらに

$$\int_0^{\pi/4}\cos^3\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\cos\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta=\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/4}=\frac{5}{6\sqrt{2}}$$

であるから，$S=\dfrac{20-3\pi}{9}a^2$ である．

（解答終）

5.3　回転体の側面積

回転体の側面積は次のようにしても求められる．

定理 5.15. （回転体の側面積）
関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で C^1 級とする．このとき，曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転面の面積 S は

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\, dx$$

で与えられる．

証明.　この回転面を表す方程式は

$$y^2+z^2=f(x)^2$$

であるから，曲面 $z=\sqrt{f(x)^2-y^2}$ の領域

$$D=\{\,(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ -f(x) \leqq y \leqq f(x)\,\}$$

上の部分の曲面積を 2 倍すればよい．ここで

$$z_x = \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}, \qquad z_y = -\frac{y}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}$$

より

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+\frac{f(x)^2f'(x)^2}{f(x)^2-y^2}+\frac{y^2}{f(x)^2-y^2}} = \frac{f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}$$

なので

$$\begin{aligned}
S &= 2\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy = 2\int_a^b \left(\int_{-f(x)}^{f(x)} \frac{f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\,dy \right) dx \\
&= 2\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} \left[\mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{f(x)} \right]_{y=-f(x)}^{y=f(x)} dx \\
&= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx
\end{aligned}$$

が成り立つ．　□

例題 5.16.　$y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ のグラフを x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の表面積を求めよ．

（解答）　$y'=\cos x$ より，求める表面積 S は

$$S = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}\ dx$$

となる．ここで，$t=\cos x$ とおけば

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1+t^2}\cdot(-dt) = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt \\
&= 4\pi \left[\frac{1}{2}\left\{ t\sqrt{1+t^2} + \log(t+\sqrt{1+t^2}\,) \right\} \right]_0^1 = 2\pi\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2}\,)\}
\end{aligned}$$

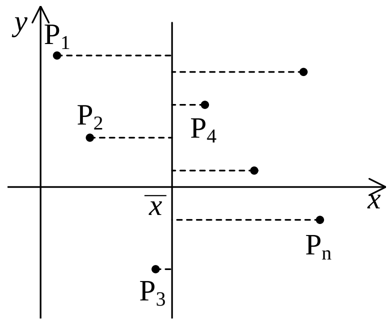
である．

（解答終）

5.4　図形の重心と回転体の体積

これまでに高校数学で三角形の重心は中線の交点であることを学習した．また，直感的に円板の重心は円の中心であることも納得できると思う．ただし，応用上は設計の際に出てくる図形がそのような単純なものばかりとは限らない．対称性をもたないかもしれないし，対称性があったとしても半円の重心を求めろと言われても困ってしまう．また，円板でも一様な密度でなければ（例えば銅でできた半円と鉄でできた半円を合わせた場合など）もちろん重心が円の中心から外れてしまう．そこで，ここでは図形の重心を厳密に定義し，それを 2 重積分で計算できることを示す．

まずは xy 平面内に n 個の質点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$ がある場合を考える．点 P_i の座標を $\mathrm{P}_i(x_i, y_i)$ とし，P_i の質量を m_i とする．このとき，これらの点がつりあう点 $(\overline{x}, \overline{y})$ をこの**質点系の重心**という．具体的には x 軸方向のモーメントと y 軸方向のモーメントについて立式すれば



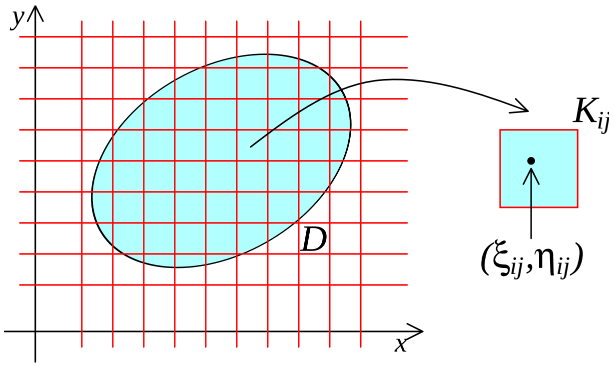
$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \overline{x}) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i - \overline{y}) = 0$$

であるから

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \overline{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$$

となる．

平面上に有界閉領域 D があり，各点 (x, y) に密度 $\rho(x, y)$ が与えられているとする．このとき，右図のように D を x 軸に平行な直線と y 軸に平行な直線により細かく分割する．この分割 Δ に対して，各小長方形領域 K_{ij} から代表点 (ξ_{ij}, η_{ij}) を 1 つ選ぶ．ここで，分割が十分細かければ小長方形 K_{ij} の密度は一様に $\rho(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ であるとみなせるので，K_{ij} の質量 m_{ij} は代表点での密度と小長方形の面積をかけて $m_{ij} \fallingdotseq \rho(\xi_{ij}, \eta_{ij})|K_{ij}|$ と近似できる．そこで，K_{ij} は広さをもった微小な長方形であるが，選んだ代表点 (ξ_{ij}, η_{ij}) に質量 m_{ij} の質点があると思って重心を計算すれば



$$\overline{x}_\Delta = \frac{\sum\limits_{i,j} m_{ij}\xi_{ij}}{\sum\limits_{i,j} m_{ij}} = \frac{\sum\limits_{i,j} \rho(\xi_{ij}, \eta_{ij})\xi_{ij}|K_{ij}|}{\sum\limits_{i,j} \rho(\xi_{ij}, \eta_{ij})|K_{ij}|}, \qquad \overline{y}_\Delta = \frac{\sum\limits_{i,j} m_{ij}\eta_{ij}}{\sum\limits_{i,j} m_{ij}} = \frac{\sum\limits_{i,j} \rho(\xi_{ij}, \eta_{ij})\eta_{ij}|K_{ij}|}{\sum\limits_{i,j} \rho(\xi_{ij}, \eta_{ij})|K_{ij}|}$$

となる．このように分割 Δ（と代表点）を決めるごとに近似的な重心 $(\overline{x}_\Delta, \overline{y}_\Delta)$ が得られる．これはリーマン和の形なので，分割を $|\Delta| \to 0$ と細かくしていけば，2 重積分の定義より

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \overline{x}_\Delta = \frac{\displaystyle\iint_D \rho(x, y)x\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D \rho(x, y)\,dx\,dy}, \qquad \lim_{|\Delta| \to 0} \overline{y}_\Delta = \frac{\displaystyle\iint_D \rho(x, y)y\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D \rho(x, y)\,dx\,dy}$$

が成り立つ．分割を一様に細かくしていけば微小な長方形と仮想的な質点のずれが小さくなっていくから，次のように用語を定義するのが妥当である．

定義 5.17. （平面図形の重心）
密度が $\rho(x,y)$ である平面図形 D に対して，

$$M = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$$

を D の**質量**という．また

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy, \qquad y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

とおき，点 (x_G, y_G) を D の**重心**という．

重心の定義式を書き換えれば

$$\iint_D (x-x_G)\rho(x,y)\,dx\,dy = 0, \qquad \iint_D (y-y_G)\rho(x,y)\,dx\,dy = 0$$

とも表せる．よって，図形 D の「すべての点に関してモーメントがつりあっているような点」のことであると理解すればよい．このように質点（大きさをもたない）に関する概念を剛体（大きさをもつ）に拡張するには，有限和を積分で置き換えれば上手くいくことは多い．その理由は積分の定義がリーマン和の極限であるからである．また，密度が一定な場合には $\rho(x,y)$ が定数であるから約分できて

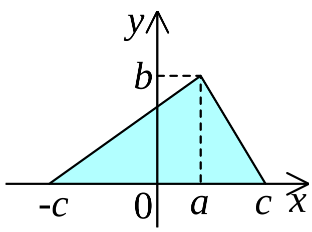
$$x_G = \frac{1}{|D|}\iint_D x\,dx\,dy, \qquad y_G = \frac{1}{|D|}\iint_D y\,dx\,dy$$

と簡単な式となる．

定義 5.17 に従って，密度が一定である三角形 D の重心を計算してみる．座標軸を $b>0,\ c>0$ として 3 頂点が (a,b), $(c,0)$, $(-c,0)$ となるようにとる．

このとき，D の面積は

$$|D| = \frac{1}{2}\cdot 2c\cdot b = bc$$



である．よって

$$\begin{aligned}
x_G = \frac{1}{|D|}\iint_D x\,dx\,dy &= \frac{1}{bc}\int_0^b \left(\int_{\frac{a+c}{b}y-c}^{\frac{a-c}{b}y+c} x\,dx\right)dy \\
&= \frac{1}{bc}\int_0^b \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a-c}{b}\,y+c\right)^2 - \left(\frac{a+c}{b}\,y-c\right)^2\right\}dy \\
&= \frac{2a}{b^3}\int_0^b (-y^2+by)\,dy = \frac{2a}{b^3}\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{by^2}{2}\right]_0^b = \frac{a}{3} \\
y_G = \frac{1}{|D|}\iint_D y\,dx\,dy &= \frac{1}{bc}\int_0^b \left(\int_{\frac{a+c}{b}y-c}^{\frac{a-c}{b}y+c} y\,dx\right)dy \\
&= \frac{1}{bc}\int_0^b \left(\frac{-2c}{b}\,y+2c\right)y\,dy \\
&= \frac{2}{b^2}\int_0^b (-y^2+by)\,dy = \frac{2a}{b^3}\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{by^2}{2}\right]_0^b = \frac{b}{3}
\end{aligned}$$

となるので，重心の座標は $\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{b}{3}\right)$ となる．ゆえに，確かに三角形の中線を頂点の方から見て $2:1$ に内分する点が重心となっている．

定義 5.17 に従って，密度が一定である円板の重心を計算すれば，対称性からすぐに円の中心が重心であることがわかる．

例題 5.18.　密度が一定であるとき，次の平面図形 D の重心を求めよ．

(1) 半径が a の半円

(2) 半径が a で中心角が 2α の扇形

(3) x 軸と y 軸および曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ で囲まれる図形

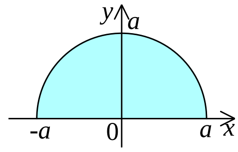
（解答）

(1)　D の面積は $|D|=\dfrac{\pi a^2}{2}$ である．

右図のように座標を設定すれば，図形の対称性より $x_G=0$ である．また

$$y_G=\frac{1}{|D|}\iint_D y\,dx\,dy=\frac{2}{\pi a^2}\int_{-a}^{a}\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}y\,dy\right)dx$$

$$=\frac{2}{\pi a^2}\int_{-a}^{a}\frac{a^2-x^2}{2}\,dx=\frac{2}{\pi a^2}\int_0^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4a}{3\pi}$$

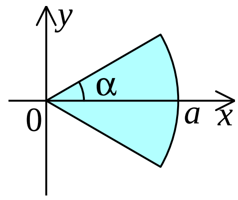


となるので，重心の座標は $\left(0,\dfrac{4a}{3\pi}\right)$ となる．

(2)　D の面積は $|D|=\dfrac{1}{2}a^2(2\alpha)=a^2\alpha$ である．

右図のように座標を設定すれば，図形の対称性より $y_G=0$ である．また，極座標変換により D は

$$E=\{\,(r,\theta)\mid 0\leqq r\leqq a,\ -\alpha\leqq\theta\leqq\alpha\,\}$$



に対応するから

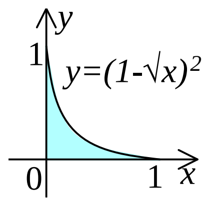
$$x_G=\frac{1}{|D|}\iint_D x\,dx\,dy=\frac{1}{a^2\alpha}\iint_E(r\cos\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{a^2\alpha}\int_0^a r^2\,dr\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,d\theta=\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$$

となるので，重心の座標は $\left(\dfrac{2a\sin\alpha}{3\alpha},0\right)$ となる．

(3)　D の面積は，曲線の方程式が $y=(1-\sqrt{x})^2$ なので

$$|D|=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2\,dx=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)\,dx=\left[x-\frac{4}{3}\,x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$



である．よって

$$x_G=\frac{1}{|D|}\iint_D x\,dx\,dy=6\int_0^1\left(\int_0^{(1-\sqrt{x})^2}x\,dy\right)dx$$

$$=6\int_0^1(x-2x^{3/2}+x^2)\,dx=6\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{5}\,x^{5/2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

図形 D は直線 $y=x$ に関して対称だから，求める重心の座標は $\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5}\right)$ となる．

（解答終）

重心の応用例として，回転体の体積を求める次の公式が有名である．

定理 5.19. （パップス・ギュルダンの定理）

平面内に図形 D と D を通らない直線 l があるとき，D を l のまわりで 1 回転させた回転体の体積を V，D の重心から回転軸 l までの距離を r とすれば

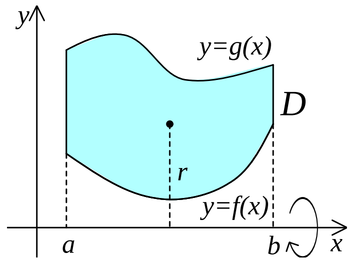
$$V = 2\pi r|D|$$

が成り立つ．

図形全体を回転・平行移動することにより回転軸は x 軸（または y 軸）とすることができる．そこで，特に D が y 方向の縦線集合，つまりある連続関数 $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ を用いて

$$D = \{\,(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ f(x) \leqq y \leqq g(x)\,\}$$

と表される場合に，D の x 軸まわりの回転体の体積について，パップス・ギュルダンの定理を証明することにする．



証明. 回転体の体積公式より

$$V = \pi\int_a^b \{g(x)^2 - f(x)^2\}\,dx = \pi\int_a^b \left[y^2\right]_{y=f(x)}^{y=g(x)} dx = \pi\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} 2y\,dy\right) dx = 2\pi\iint_D y\,dx\,dy$$

となる．ここで，重心の定義式より

$$y_G = \frac{1}{|D|}\iint_D y\,dx\,dy \qquad \therefore\ \iint_D y\,dx\,dy = y_G|D|$$

であり，重心と x 軸（回転軸）との距離 r はこの $\overline{y}$ に等しいから

$$V = 2\pi\iint_D y\,dx\,dy = 2\pi y_G|D| = 2\pi r|D|$$

□

パップス・ギュルダンの定理より次のバウムクーヘン分割と呼ばれる回転体の体積の公式が得られる．

定理 5.20. （バウムクーヘン分割）

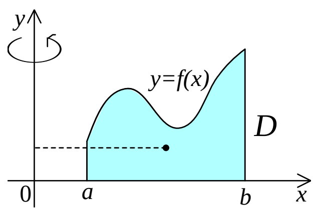
$0 \leqq a < b$ とし，関数 $f(x)$ は $[a,b]$ 上で連続で，$f(x,y) \geqq 0$ とする．このとき，曲線 $y=f(x)$ および x 軸と直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた部分 D を y 軸のまわりで 1 回転させてできる回転体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

で与えられる．

証明. 回転する図形 D の重心と y 軸（回転軸）の距離は重心の x 座標 x_G である．よって，パップス・ギュルダンの定理と重心の定義より

$$\begin{aligned} V &= 2\pi x_G|D| = 2\pi\iint_D x\,dx\,dy \\ &= 2\pi\int_a^b \left(\int_0^{f(x)} x\,dy\right) dx = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx \end{aligned}$$



□

これらの定理により，重心の位置がわかっている図形の回転体は体積が簡単に求められる．このような議論ができることも，重心を厳密に数式で定義した恩恵である．

ごく薄い立体や密度と厚みが一定な立体は平面図形だと思って計算すればよいこともあるが，そうとは限らない一般の立体の重心については次のように定義される．平面図形の重心の場合と同様に，3 重積分の定義と照らし合わせてその妥当性を考察してみよ．

定義 5.21. （空間図形の重心）

密度が $\rho(x,y,z)$ である空間図形 D に対して，

$$M = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

を D の**質量**という．また

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint_D x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iiint_D y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_D z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

とおき，点 (x_G, y_G, z_G) を D の**重心**という．

密度が一定な場合には $\rho(x,y,z)$ が定数であるから約分できるので，$|D|$ を D の体積として

$$x_G = \frac{1}{|D|}\iiint_D x\,dx\,dy\,dz, \qquad y_G = \frac{1}{|D|}\iiint_D y\,dx\,dy\,dz, \qquad z_G = \frac{1}{|D|}\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$$

と簡単な式で表せる．応用上はこのような設定の場合が多い．

具体的な立体の重心は次のように計算できる．

例題 5.22. 密度が一定であるとき，次の空間図形 D の重心を求めよ．

(1) 半径が a の半球　　(2) 底面の半径が a で高さが h の直円錐

（解答）

(1) $D = \{\, (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq a^2,\ z \geqq 0 \,\}$ と座標を設定する．

まず，図形の対称性より $x_G = y_G = 0$ である．また，D の体積は $|D| = \dfrac{2\pi a^3}{3}$ であるから

$$D = \{\, (x,y,z) \mid 0 \leqq z \leqq a,\ (x,y) \in D_z \,\}, \qquad D_z = \{\, (x,y) \mid x^2+y^2 \leqq a^2 - z^2 \,\}$$

と表して 3 重積分を累次化すれば

$$\begin{aligned} z_G = \frac{1}{|D|} \iiint_D z\,dx\,dy\,dz &= \frac{3}{2\pi a^3} \int_0^a \left(\iint_{D_z} z\,dx\,dy \right) dz \\ &= \frac{3}{2\pi a^3} \int_0^a z|D_z|\,dz \\ &= \frac{3}{2\pi a^3} \int_0^a \pi z(a^2 - z^2)\,dz = \frac{3}{2a^3} \left[\frac{a^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^a = \frac{3a}{8} \end{aligned}$$

となるので，重心の座標は $\left(0, 0, \dfrac{3a}{8}\right)$ となる．

(2) D の底面の中心を原点とし，頂点が $(0,0,h)$ となるように座標を設定する．

まず，図形の対称性より $x_G = y_G = 0$ である．また，D の体積は $|D| = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$ であるから

$$D = \{\, (x,y,z) \mid 0 \leqq z \leqq a,\ (x,y) \in D_z \,\}, \qquad D_z = \left\{ (x,y) \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 a^2 \right\}$$

と表して 3 重積分を累次化すれば

$$\begin{aligned} z_G = \frac{1}{|D|} \iiint_D z\,dx\,dy\,dz &= \frac{3}{\pi a^2 h} \int_0^h \left(\iint_{D_z} z\,dx\,dy \right) dz \\ &= \frac{3}{\pi a^2 h} \int_0^h z|D_z|\,dz \\ &= \frac{3}{\pi a^2 h} \int_0^h \pi z \frac{(h-z)^2 a^2}{h^2}\,dz \\ &= \frac{3}{h^3} \int_0^h (z^3 - 2hz^2 + h^2 z)\,dz = \frac{3}{h^3} \left[\frac{z^4}{4} - \frac{2h}{3} z^3 + \frac{h^2}{2} z^2 \right]_0^h = \frac{h}{4} \end{aligned}$$

となるので，重心の座標は $\left(0, 0, \dfrac{h}{4}\right)$ となる．

（解答終）

6 積分記号下の微積分

6.1 被積分関数にパラメータを含む定積分の微分積分

ここでは，領域 $K = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ 上の連続関数 $f(x, t)$ が与えられたときに

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

が成り立つ条件について説明する．なお，微分は平均変化率の極限，積分はリーマン和の極限であるから，これらの 2 つの極限操作を交換することは無条件にはできないことには注意すること．

上で考える問題は $F(t) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dx$ とおくときに，その導関数が $F'(t) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ となるかということである．まず $F(t)$ が微分可能であるためには，その前提として連続でなければならない．

定理 6.1. 関数 $f(x, t)$ は領域 $K = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ 上で連続であるとする．このとき

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

は $[\alpha, \beta]$ 上の連続関数である．

証明. $f(x, t)$ は有界閉集合 K 上の連続関数であるから一様連続である．よって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta_\varepsilon = \delta\left(\dfrac{\varepsilon}{b-a}\right) > 0$ が存在して

$$(x_j, t_j) \in K, \quad \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (t_1 - t_2)^2} < \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |\,f(x_1, t_1) - f(x_2, t_2)\,| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

が成り立つ．ゆえに，$t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $|\,t_1 - t_2\,| < \delta_\varepsilon$ ならば

$$|\,f(x, t_1) - f(x, t_2)\,| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (x \in [a, b])$$

であるから

$$|\,F(t_1) - F(t_2)\,| = \left|\int_a^b \{f(x,t_1) - f(x,t_2)\}\,dx\right| \leqq \int_a^b |\,f(x,t_1) - f(x,t_2)\,|\,dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，$F(t)$ は $[\alpha, \beta]$ 上の一様連続な関数である． □

定理 6.2. （積分記号下の微分法）

関数 $f(x,t)$ は領域 $K=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上の連続関数で，さらに偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ も K 上で連続であるとする．このとき，関数

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx$$

は $[\alpha,\beta]$ 上で微分可能で

$$F'(t)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \qquad (t\in[\alpha,\beta])$$

が成り立つ．

証明. 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ は長方形領域 K 上で連続なので重積分可能であり，累次化が自由にできる．よって，$t\in[\alpha,\beta]$ に対して

$$\begin{aligned}F(t)-F(\alpha)&=\int_a^b\{f(x,t)-f(x,\alpha)\}\,dx\\&=\int_a^b\left(\int_\alpha^t\frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\,ds\right)dx=\int_\alpha^t\left(\int_a^b\frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\,dx\right)ds\end{aligned}$$

となる．ここで，定理 6.1 より $\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ は t について $[\alpha,\beta]$ 上で連続であるから，第 5 章定理 3.10 より

$$F(t)=F(\alpha)+\int_\alpha^t\left(\int_a^b\frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\,dx\right)ds$$

は微分可能で，$F'(t)=\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ が成り立つ． □

6.2　被積分関数にパラメータを含む広義積分の一様収束性と微分積分

次に領域 $D = [a, \infty) \times [\alpha, \beta]$ 上の連続関数 $f(x, t)$ が与えられたときに

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^\infty f(x,t)\,dx \right) dt = \int_a^\infty \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt \right) dx, \qquad \frac{d}{dt}\int_a^\infty f(x,t)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

が成り立つ条件について説明する．広義積分も極限を用いて定義されるから，このような操作の交換も無条件では成り立たず，有界閉区間の場合よりも条件は複雑となる．ポイントとなるのは次に述べる一様収束性である．

定義 6.3. （パラメータに関する一様収束性）

$f(x, t)$ を領域 $D = [a, \infty) \times [\alpha, \beta]$ 上の関数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $L = L(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$b \geqq L(\varepsilon), \quad t \in [\alpha, \beta] \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_a^\infty f(x,t)\,dx - \int_a^b f(x,t)\,dx \right| < \varepsilon$$

が成り立つとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ は t について一様収束するという．

具体的な問題について上の定義に従って一様収束性を確認するのは面倒なことが多い．そこで，確認しやすい十分条件を挙げておく．関数項級数の一様収束性を示すのに，優級数を見つけるというワイエルシュトラスの M 判定法があったが，それと同様に次が成り立つ．

定理 6.4. （広義積分が一様収束するための十分条件）

$f(x, t)$ を領域 $D = [a, \infty) \times [\alpha, \beta]$ 上の連続関数とする．次の 2 条件

$$|f(x,t)| \leqq g(x) \quad ((x,t) \in D), \qquad \int_a^\infty g(x)\,dx : \text{収束}$$

をみたす $[a, \infty)$ 上の関数 $g(x)$ が存在するならば，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ は t について一様収束する．

証明.　任意の $\varepsilon > 0$ をとる．広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b g(x)\,dx$ は収束するから，ある $L(\varepsilon) > 0$ で

$$b \geqq L(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_a^\infty g(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

となるものが存在する．よって，$b \geqq L(\varepsilon)$ ならば

$$\int_b^\infty g(x)\,dx < \varepsilon$$

が成り立つ．

比較判定法により，各 $t \in [\alpha, \beta]$ に対して，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ は収束する．さらに，$b \geqq L(\varepsilon)$ ならば，任意の $t \in [\alpha, \beta]$ に対して

$$\left| \int_a^\infty f(x,t)\,dx - \int_a^b f(x,t)\,dx \right| = \left| \int_b^\infty f(x,t)\,dx \right| \leqq \int_b^\infty |f(x,t)|\,dx \leqq \int_b^\infty g(x)\,dx < \varepsilon$$

となるから，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ は t について一様収束する．　□

この定理の条件をみたす関数 $g(x)$ は優関数と呼ばれることもある．

広義積分が一様収束する際の微積分について考えたいが，その前提として連続性を示しておく．

定理 6.5. （一様収束する広義積分で定められた関数の連続性）

関数 $f(x,t)$ は領域 $D=[a,\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上で連続であるとする．このとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ が t について一様収束するならば

$$F(t)=\int_a^\infty f(x,t)\,dx$$

は $[\alpha,\beta]$ 上の連続関数である．

証明. 任意の $\varepsilon>0$ をとる．広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ が t について一様収束しているから，ある $L\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)>0$ が存在して

$$b\geqq L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right),\quad t\in[\alpha,\beta]\quad\Longrightarrow\quad\left|F(t)-\int_a^b f(x,t)\,dx\right|=\left|\int_a^\infty f(x,t)\,dx-\int_a^b f(x,t)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．特に $b=L\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$ とおき固定すると，定理 6.1 より関数 $F_b(t)=\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dx$ は $[\alpha,\beta]$ 上で一様連続であるから，上で決めた $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon)>0$ が存在して

$$t_1,t_2\in[\alpha,\beta],\quad|t_1-t_2|<\delta(\varepsilon)\quad\Longrightarrow\quad|F_b(t_1)-F_b(t_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．よって，$|t_1-t_2|<\delta(\varepsilon)$ ならば

$$|F(t_1)-F(t_2)|\leqq|F(t_1)-F_b(t_1)|+|F_b(t_1)-F_b(t_2)|+|F_b(t_2)-F(t_2)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

となるから，$F(t)$ は $[\alpha,\beta]$ 上で一様連続である． □

定理 6.6. （一様収束する広義積分下の積分法）

関数 $f(x,t)$ は領域 $D=[a,\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上で連続であるとする．このとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ が t について一様収束するならば，関数 $F(t)=\displaystyle\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ は $[\alpha,\beta]$ 上で積分可能で

$$\int_\alpha^\beta F(t)\,dt=\int_a^\infty\left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt\right)dx$$

が成り立つ．

証明. 任意の $\varepsilon>0$ をとる．広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ が t について一様収束するから，$F(t)$ は定理 6.5 より $[\alpha,\beta]$ 上で連続なので積分可能であり，ある $L_\varepsilon=L\left(\dfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\right)>0$ が存在して

$$b\geqq L_\varepsilon,\quad t\in[\alpha,\beta]\quad\Longrightarrow\quad\left|F(t)-\int_a^b f(x,t)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$$

が成り立つ．よって，$b\geqq L_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt-\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt\right)dx\right|&=\left|\int_\alpha^\beta\left(F(t)-\int_a^b f(x,t)\,dx\right)dt\right|\\&\leqq\int_\alpha^\beta\left|F(t)-\int_a^b f(x,t)\,dx\right|dt<\int_\alpha^\beta\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\,dt=\varepsilon\end{aligned}$$

となるから，求める等式が成り立つ． □

定理 6.7. （一様収束する広義積分下の微分法）

関数 $f(x,t)$ は領域 $D=[a,\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上で連続で，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ も D 上で連続であるとする．このとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ が t について一様収束するならば，関数

$$F(t)=\int_a^\infty f(x,t)\,dx$$

は $[\alpha,\beta]$ 上で微分可能で

$$F'(t)=\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \qquad (t\in[\alpha,\beta])$$

が成り立つ．

証明． 広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ が t について一様収束するから，定理 6.6 より積分順序の変更ができるので

$$F(t)-F(\alpha)=\int_a^\infty \{f(x,t)-f(x,\alpha)\}\,dx=\int_a^\infty\left(\int_\alpha^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\,ds\right)dx=\int_\alpha^t\left(\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\,dx\right)ds$$

となる．ここで，定理 6.5 より $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ は $[\alpha,\beta]$ 上で連続であるから，第 5 章定理 3.10 より

$$F(t)=F(\alpha)+\int_\alpha^t\left(\int_a^\infty f_t(x,s)\,dx\right)ds$$

は微分可能で，$F'(t)=\displaystyle\int_a^\infty f_t(x,t)\,dx$ が成り立つ． □

積分区間が無限区間であるタイプの広義積分以外にも，有限区間で被積分関数が発散するタイプの広義積分についても同様の定理が成り立つ．

6.3　パラメータを含む積分を利用した計算例

パラメータを含む積分をうまく利用すると次のように計算できる．

例題 6.8.　次の値を求めよ．ただし，$a > 0$ は定数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^a \log x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$

（解答）

(1)　$t > 0$ として $f(x,t) = x^t$ とおく．$f_t(x,t) = x^t \log x$ について，第 5 章命題 6.35 より $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^t \log x = 0$ であるから，$f_t(x,t)$ は $[0,1]\times(0,\infty)$ 上で連続とみなせる．よって

$$\int_0^1 x^t\,dx = \left[\frac{x^{t+1}}{t+1}\right]_0^1 = \frac{1}{t+1}$$

の両辺を t で微分すれば，$f_t(x,t)$ の連続性から定積分における微分と積分の順序交換ができて

$$\int_0^1 x^t \log x\,dx = -\frac{1}{(t+1)^2}$$

が成り立つ．この式に $t = a$ を代入すれば，求める積分値は

$$\int_0^1 x^a \log x\,dx = -\frac{1}{(a+1)^2}$$

である．

(2)　$t > 0$ として $f(x,t) = \dfrac{1}{t^2+x^2}$ とおくと，$f_t(x,t) = \dfrac{-2t}{(t^2+x^2)^2}$ は $[0,1]\times(0,\infty)$ 上で連続である．よって

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{t}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{t}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{t}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{1}{t}$$

の両辺を t で微分すれば，$f_t(x,t)$ の連続性から定積分における微分と積分の順序交換ができて

$$\int_0^1 \frac{-2t}{(t^2+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right) = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{1}{t} - \frac{1}{t(1+t^2)}$$

が成り立つ．この式に $t = 1$ を代入すれば

$$\int_0^1 \frac{-2}{(1+x^2)^2}\,dx = -\,\mathrm{Tan}^{-1}\,1 - \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

が得られる．ゆえに，求める積分値は

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

である．

（解答終）

もちろんこれらの積分は複雑ではないので，部分積分や置換積分により直接計算することは困難ではない．ただ，このような工夫が非常に有効なこともあるので，知っておいて損はないと思う．

例題 6.9.　$a>0$ に対して，次の広義積分を考える．

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx$$

(1) この広義積分が収束することを示せ．以下，この広義積分を a の関数と見て $F(a)$ とおく．

(2) $F'(a)=-2aF(a)$ が成り立つことを示せ．

(3) $F(a)$ を求めよ．

（解答）　$f(x,a)=e^{-x^2}\cos 2ax$ とおく．

(1)　$a>0$ を固定すると，被積分関数について，

$$|f(x,a)|\leqq e^{-x^2}\qquad (x\geqq 0)$$

となる．広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ は収束するから，比較判定法より設問の広義積分は収束する．

(2)　$f(x,a)$ の偏導関数 $f_a(x,a)=-2xe^{-x^2}\sin 2ax$ について

$$|f_a(x,a)|\leqq 2xe^{-x^2}\quad (x\geqq 0,\ a>0),\qquad \int_0^\infty 2xe^{-x^2}\,dx：収束$$

であるから，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f_a(x,a)\,dx$ は a について一様収束している．よって，微分と広義積分の順序交換ができて

$$F'(a)=\frac{d}{da}\int_0^\infty f(x,a)\,dx=\int_0^\infty f_a(x,a)\,dx=\int_0^\infty(-2xe^{-x^2}\sin 2ax)\,dx$$

が成り立つ．ここで，右辺の広義積分を計算すると，$t>0$ として

$$\begin{aligned}\int_0^t(-2xe^{-x^2}\sin 2ax)\,dx&=\Big[e^{-x^2}\sin 2ax\Big]_0^t-2a\int_0^t e^{-x^2}\cos 2ax\,dx\\&=e^{-t^2}\sin 2at-2a\int_0^t e^{-x^2}\cos 2ax\,dx\end{aligned}$$

であるから，$|e^{-t^2}\sin 2at|\leqq e^{-t^2}\to 0\ \ (t\to\infty)$ より

$$F'(a)=\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t^2}\sin 2at-2a\int_0^t e^{-x^2}\cos 2ax\,dx\right)=0-2a\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx=-2aF(a)$$

となる．

(3)　ガウス積分の値より，$F(0)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である．また，(2) より

$$\frac{F'(a)}{F(a)}=-2a$$

であるから，この両辺を積分すれば，C を定数として

$$\log|F(a)|=-a^2+C\qquad \therefore\ F(a)=C'e^{-a^2}\quad (C'=\pm e^C)$$

となる．$F(a)$ はその定義式より $a=0$ を含めて連続であるから

$$F(0)=C'=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

なので，$F(a)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-a^2}$ となる．

（解答終）

例題 6.10.　$a > 0$ に対して

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{xe^x}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+a^2)$$

となることを示せ.

（解答）　$I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{xe^x}\,dx$ とおく．まず

$$\frac{1-\cos ax}{xe^x} = \left[\frac{-\cos tx}{xe^x}\right]_{t=0}^{t=a} = \int_0^a \frac{\sin tx}{e^x}\,dt$$

であるから，$I = \displaystyle\int_0^\infty \left(\int_0^a e^{-x}\sin tx\,dt\right)dx$ となる．ここで

$$|e^{-x}\sin tx| \leqq e^{-x} \quad (x \geqq 0,\ t \in \mathbb{R}), \qquad \int_0^\infty e^{-x}\,dx：収束$$

であるから，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin tx\,dx$ は t について一様収束している．よって

$$I = \int_0^\infty \left(\int_0^a e^{-x}\sin tx\,dt\right)dx = \int_0^a \left(\int_0^\infty e^{-x}\sin tx\,dx\right)dt$$

となる．ここで

$$\int_0^s e^{-x}\sin tx\,dx = \left[\frac{-e^{-x}}{1+t^2}(\sin tx + t\cos tx)\right]_{x=0}^{x=s} = \frac{t}{1+t^2} - \frac{e^{-s}}{1+t^2}(\sin st + t\cos st)$$

と

$$\left|\frac{e^{-s}}{1+t^2}(\sin st + t\cos st)\right| \leqq \frac{e^{-s}}{1+t^2}(1+t) \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (s \to \infty)$$

より

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin tx\,dx = \lim_{s\to\infty}\left\{\frac{t}{1+t^2} - \frac{e^{-s}}{1+t^2}(\sin st + t\cos st)\right\} = \frac{t}{1+t^2}$$

であるから

$$I = \int_0^a \frac{t}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_0^a = \frac{1}{2}\log(1+a^2)$$

（解答終）

発展問題 6.1.　関数 $F(t)$ と $G(t)$ を

$$F(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2, \qquad G(t) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\,dx$$

で定める．次の事実を順に示すことで $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ を求めよ.

(1)　$F'(t) + G'(t) = 0$　　(2)　$F(t) + G(t) = \dfrac{\pi}{4}$　　(3)　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

発展問題 6.2.　関数 $F(t)$ を

$$F(t) = \int_0^1 \frac{\log(1+tx)}{1+x^2}\,dx$$

で定める．次の事実を順に示すことで $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ を求めよ.

(1)　$F'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}\left(\dfrac{\pi}{4}t - \log(1+t) + \dfrac{1}{2}\log 2\right)$　　(2)　$\displaystyle\int_0^1 F'(t)\,dt$ を考え，$\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2$