水の波は横波？ —— 水の波の反射と干渉

「水の波は横波とも縦波とも言えない」—— ひょっとしたら大学の理系の先生でもかなりの人が初耳と思われるようなことが，私の手元にある高等学校「物理基礎」の教科書には「参考」として書かれており，立ち読みしてきた受験参考書でも見かけられた。しかしここまで立ち入るのであれば，干渉を考えるとき音波と同じく「何の波か？」に言及する必要があると思うが，入試問題に対してそういう疑義が寄せられたことは聞いたことがない。

波を考えるとき水は**非圧縮性流体**（密度一定，$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$）として扱う。そのため速度の縦成分に加え横（鉛直）成分が現れる。振動によって寄せ集められた部分が，圧縮により密度が増大するわけにはいかず盛り上がる，これが粗密波の音波と違うところだ。結果の式を見る方がイメージしやすい。

波の進行方向に x，鉛直上向きに y（水面が $y=0$）をとるとして，速度の分布は以下の式で与えられる：　（**注．**表面張力が効く波長が数 cm 以下の**さざ波**は少し扱いが異なる。）

$$v_x(x,y,t)=\quad\eta_0\omega\left[\frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh}\right]\cos(\omega t-kx) \tag{1}$$

$$v_y(x,y,t)=-\eta_0\omega\left[\frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh}\right]\sin(\omega t-kx) \tag{2}$$

で与えられる。[1] 水底（$y=-h$）では $v_y=0$ である。波の速さは，重力加速度を g として

$$c=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh} \tag{3}$$

で与えられ，波長（波数）と水深による。(1)，(2) は点 (x,y) における流速（**速度場**）を表すが，波長 $2\pi/k$ に比べて振幅 η_0 が微小な場合には，(x,y) を水が静止していたときの位置（振動の中心位置，格子振動における格子点の番号）と見なしてよい。このとき変位は，速度を t で積分した

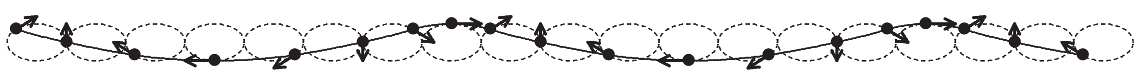
$$\xi(x,y,t)=\eta_0\left[\frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh}\right]\sin(\omega t-kx) \tag{4}$$

$$\eta(x,y,t)=\eta_0\left[\frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh}\right]\cos(\omega t-kx) \tag{5}$$

で表され，各点 (x,y) の周りで短軸 (y 軸) と長軸 (x 軸) の比が $\gamma=\tanh k(y+h)$ (<1) の時計回りの**楕円**軌道を描く。積分形 (5) で $y=0$ とおいた

$$\eta(x,0,t)=\eta_0\cos(\omega t-kx) \tag{6}$$

が表面の形を表す**水面波**，いわゆる「波（なみ）」である。（この振幅を予め η_0 として用いた。）η と v_x は**同位相**であり，表面においても水の流れは上下方向だけではなく水平方向の速度成分をもつ。



[1] **双曲線関数：** $\cosh x=(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})/2$，$\sinh x=(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})/2$，$\tanh x=\sinh x/\cosh x$　ラプラス方程式 $\nabla^2\Phi(x,y)=0$ を変数分離法，$\Phi(x,y)=X(x)Y(y)$，$X''=-k^2X$，$Y''=k^2Y$ で解くときに現れる。

壁における反射では，壁に垂直な速度の成分は固定端的，平行な成分は自由端的になる。波を考える状況では水の粘性（摩擦力）は無視される。特に，水深が浅い場合（**浅水波**：$c \simeq \sqrt{gh}$），$\gamma < 2\pi h/\lambda \ll 1$ で楕円は扁平であり，水の運動はほとんど水平方向（**縦波**）だけになる。[2]しかしながら普通は，媒質の主たる運動である縦波ではなく，いわば見かけ上の水面の形に注目し，**横波**の水面波と見なして，壁での反射は位相変化のない**自由端**反射として扱うようである。確かに入射波と反射波の重ね合わせで生じる定在波は，それで説明がつく。壁の位置では水の上下運動しかなく，水面波としても，速度の鉛直成分 v_y の波としても，腹となる。一方，節の位置では，今度は水平成分 v_x の振動の腹になる。つまり音波の圧力波と速度波の関係と同じである。

干渉を考えるため**位相差**を問う際には,「何の波の位相か」に言及する必要があることは言うまでもない。正面衝突に近い場合は，v_x と水面波（または v_y）で強め合う・弱め合うの関係が逆になる。東京大学の最後の設問は，まさにそうである。壁で反射して返ってくる波の「相対速度」は運動方向に対して垂直であり,（波が同心円上に出ていく，点状の）波源から出る波と正面からぶつかると考えるのが普通だろう。高校の教科書に「縦波でも横波でもない」と書かれている今日では,「逆位相になる条件を求めよ」では設問が不十分であるという誹りを免れないのだ。

さらに，縦波の v_x の場合，波が同じ方向ではなく異なる角度で進行してきてぶつかるときは，その角度が問題になる。2017 年度の音波の問題では，速度（または変位）の縦波で考える場合に，この問題点があることが指摘されたが，全く同じ事情である前年度の東京大学の水の波について，そういう指摘があったことは聞いていない。ある元学生さんから聞いた話では，むしろ音波の問題と比較して完璧であると Twitter 界で絶賛されているらしい。水面の波の形 —— 単に水の波動現象の一側面にすぎない —— を大昔から見慣れているが故に，速度波も圧力波も目に見えない音波と違い，あたかも自明で一意的であるかのような錯覚があるのかもしれない。

なお,「**縦波成分，横波成分**」という言い方には注意しなければならない。水のような流体の場合は横方向の変形に対する復元力が働かないから，地震波（弾性波）のような横波は存在しない。

水の波は可視化でき実験も容易にできるため，分かりやすいと思われるかもしれないが，以上のように実体である媒質の運動としては音波より**よほど複雑**である。まさに「水面下を見透すべし」であり，教科書や参考書でわざわざそのことに**言及する以上**は，音波と同じような厳密な扱いを要求してしかるべきである。しかしながら，正直なところ私も水の波に関してはほとんど「お手上げ」状態である。

電磁波（光）は旧稿に対する質問に答えるため補充し，少々複雑になったので別ファイルとした（2018.10）。→**[253]**

[2] 音波の場合の圧力差（音圧 p）が水面の高低差 η でもたらされると思えばいい。その結果，v_x と η は**同位相**で，水平振動の運動エネルギーは，高さ η の水の層がもつ（静止水面を基準とする）位置エネルギー $\rho g \eta^2/2$ と等しい。

2016 年度の東京大学の問題は，波の速さの形（$c = \sqrt{gh}$）からこの**浅水波**を想定していると考えてよい。浅水波とみなせるのは水の深さが波長にくらべて十分小さい場合であり，実際には波長程度の深さでも水の振動が殆ど水底まで届かなくなる**深水波**である。（**アニメーション**参照）