ローレンツ変換と光（電磁波）のドップラ効果

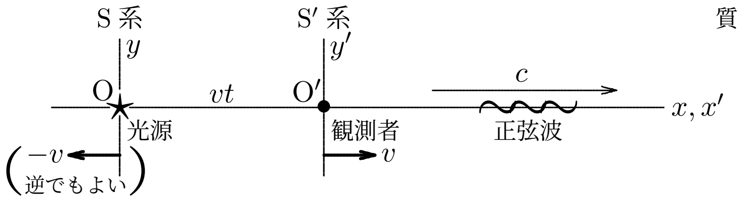
2003/4/1

光源が静止している慣性系 S と，光源に対して x 方向に速さ v で**等速度運動**する観測者が静止している慣性系 S$'$ の間の，**時間**と**座標**のローレンツ変換は，光速 c が共通 として以下で与えられる：

$$t=\frac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ ,\quad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ ,\quad (\ y=y'\ ,\quad z=z'\ ) \tag{1}$$

$$t'=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ ,\quad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ ,\ (\ y'=y\ ,\quad z'=z\ ) \tag{2}$$

質問あり図挿入　2010/2/1



光源に対して相対的に運動する観測者が観測する振動数の変化（ドップラ効果）は，同じ波を両方の系で見た時の**見え方**[1]を比較して求められる。系 S$'$ において x' 軸に沿って正の方向に伝わる正弦波 $\sin(\omega' t'-k'x')$ は，元の光源の系 S ではどう見えるか？ —— まず (2) を代入すれば位相が

$$\omega' t'-k'x'=\frac{\omega'+k'v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ t-\frac{k'+v\omega'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ x \qquad (=\omega t-kx) \tag{3}$$

となる。波の位相（山とか谷とか）はどちらの系から見ても不変な量（後述の**スカラ量**）だから，右辺が S 系での位相 $\omega t-kx$ であり，光の場合，光速 c を用いて $\omega'=ck'$ の関係があるから，ω と k は[2]

$$\omega=\frac{\omega'+k'v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{1+v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ \omega'\ ,\quad k=\frac{k'+v\omega'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{1+v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ k' \tag{4}$$

で与えられる。［**注．**系 S においても，ちゃんと $\omega=ck$ となっている。］あるいは逆に解いて

$$\omega'=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v/c}\ \omega\ ,\quad k'=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v/c}\ k \tag{5}$$

これが振動数 $f=\omega/2\pi$ の変化を与える。v は相対速度（遠ざかるときに正）であって，光源が運動する場合にも適用される。他にも等価な書き方ができるが，この形は相対論的効果が**解釈**しやすい。ω' の式の分子にある因子 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ が，いわゆる時計の遅れと見なせる。—— (2) の第 1 式により，S 系の点 $x=0$ に置かれた時計の経過時間 $t=\sqrt{1-v^2/c^2}\ (<1)$ が S$'$ 系での $t'=1$ に対応し，これを「S$'$ 系から見たら運動している S 系の**時計の刻みが遅れている**」と言う。つまり S$'$ 系にとっては，波源の振動の回数そのものが既に $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍に少なくなっている。したがって S$'$ 系の観測者が観測する光の振動数は，この相対論的な効果と,（遠ざかる）光源から伝播してくる波本来のドップラ効果（分母）の相乗効果になっている， ..... と読める。一方，静止した S$'$ 系から見れば運動している S 系の長さが縮むから.....（ん？これは波ではなく S 系で静止している物や物差しのことだから，無理して考えない方が無難のようだ。）光の波長については,「**振動数** $\times$ **波長** $=$ **光速** c 」がどちらの系にも共通な値になるということだけで十分だ。

相対速度の x 方向に対して斜めに進む波を観測する場合は，伝播方向の角度に**光行差**が生じるなど多少は複雑になり，ω と波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の変換性から計算することになる。相対速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ と

[1] **特殊相対性理論：**光はどの慣性系で見ても光速 c で伝わる電磁波であることが要請され，Maxwell 方程式の形が不変となるよう電場・磁場が変換される。このため見かけの振幅は変わるが位相には影響しないので，ここでは立ち入らない。

[2] 通常の音波の公式は，代わりに**ガリレイ変換** $t'=t,\ x'=x-vt$ を用いて同様にして導かれる。ただし，音波の場合は**静止した媒質**（空気）に対して音速 V が与えられるところが光とは異なる。音源が運動している場合は観測者の慣性系S$'$ で $\omega'=Vk'$，逆に観測者が運動している場合は音源の慣性系 S で $\omega=Vk$ としなければならない。

するとき，観測者の S′ 系において単位ベクトル $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{k}'/|\boldsymbol{k}'|$ の方向に進む波の角振動数（$\omega' = 2\pi f'$）は，(5) の分母の v の代わりにこの方向の 速度成分 を用いて

$$\omega' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (\boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{v})/c}\, \omega \tag{6}$$

となる。分子は前述の相対論的な時計の遅れであるが，光源の進行方向に垂直な方向（$\boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{v} = 0$）でも残ることから，**横ドップラ効果**と呼ばれている。

いわゆる「斜めドップラ効果」について

2007/5/1 追加

波数ベクトルを $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ とする。相対速度 $\boldsymbol{v}$ は x 方向としておいても一般性を失わない。S′ 系において局所的に $\sin(\omega' t' - \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{r}')$ となっている正弦波の位相は，前と同様にして (2) により

$$\omega' t' - \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{r}' = \frac{\omega' + k'_x v}{\sqrt{1-\beta^2}}\, t - \frac{k'_x + \beta\omega'/c}{\sqrt{1-\beta^2}}\, x - k'_y y - k'_z z \quad (= \omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) \tag{7}$$

となる（$\beta = v/c$ は相対論の慣用記号 ）。速度 $\boldsymbol{v}$ が x 方向であることから，

$$k'_x v = \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{v})\ |\boldsymbol{k}'| = (\boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{v})\ \omega'/c \qquad (\omega' = c|\boldsymbol{k}'|) \tag{8}$$

である。したがって

$$\omega = \frac{\omega' + k'_x v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1 + (\boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{v})/c}{\sqrt{1-\beta^2}}\, \omega' \tag{9}$$

となり，これを逆に解いて (6) が得られる。S′ 系での光の進行方向 $\boldsymbol{k}'$ と x' 軸がなす角を θ' とし，

$$\cos\theta' = \frac{k'_x}{|\boldsymbol{k}'|} = \frac{\boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{v}}{v} \tag{10}$$

を用いて

$$\omega' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta\cos\theta'}\, \omega\ , \quad |\boldsymbol{k}'| = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta\cos\theta'}\, |\boldsymbol{k}| \tag{11}$$

と書くこともある。さらに，$\omega'/c = |\boldsymbol{k}'|$ であることから波数ベクトルの x 成分の変換式は,

$$k_x = \frac{k'_x + \beta\omega'/c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{k'_x + \beta|\boldsymbol{k}'|}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\cos\theta' + \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\, |\boldsymbol{k}'| \tag{12}$$

となり，よく知られた**光行差**を与える相互の関係式（$\beta \leftrightarrow -\beta$）が得られる：

$$\cos\theta = \frac{k_x}{|\boldsymbol{k}|} = \frac{\cos\theta' + \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \frac{|\boldsymbol{k}'|}{|\boldsymbol{k}|} = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'} \tag{13}$$

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta} \qquad \left(\text{または}\quad \tan\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\cos\theta - \beta}\right) \tag{14}$$

波の進行方向は各瞬間の波面の法線方向（波数ベクトルの方向）である。点光源を出た**パルス**波面は球面状に拡がるが，その中心は S′ 系では 光った瞬間 の光源の位置，S 系では 不動の光源 の位置だから，両球面は互いに相異なる。公式 (14) は，この考え方[3]から幾何学的に求められる。（→ p.6）

これに対して**音波**では，球面の中心は音を発した瞬間の，静止した空気系 での音源の位置であって両系に共通である。したがって各瞬間の波面はどちらから見ても同一のものだから $\theta' = \theta$ であり，運動方向によって音が聞こえてくる方向の差異はなく，光行差に対応する現象はない。（脚注参照）

[3] 光行差は，観測者に「今」届いた波の進行方向が，それぞれの系でどう見えるかの比較のことであって，観測者にとって波源が「今」居るはずの方向 との比較ではない。（後者の意味では，音源が運動する音波の場合にも差は現れるので混同してはならない。）パルス波としたのは，この届いた波面とそれを発した波源との因果関係を明確にするためである。

四元ベクトル　位相の式 (7) から得られる変換式を変数の組 $(\omega/c,\ \boldsymbol{k})$ に対して

$$\omega/c = \frac{\omega'/c + \beta k'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\quad k_x = \frac{k'_x + \beta\omega'/c}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\quad k_y = k'_y\ ,\quad k_z = k'_z \tag{15}$$

と書けば，(1) で時間変数を ct，ct' としたものと同形になる。特殊相対性理論では一般に

$$a'_0 = \frac{a_0 - \beta a_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\quad a'_1 = \frac{a_1 - \beta a_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\quad a'_2 = a_2,\quad a'_3 = a_3 \tag{16}$$

と変換される 4 成分のベクトル (a_0, a_1, a_2, a_3) を**四元ベクトル**という。エネルギーと運動量 $(E/c,\ \boldsymbol{p})$，電荷密度と電流密度 $(c\rho,\ \boldsymbol{j})$，電磁ポテンシャル $(\phi/c,\ \boldsymbol{A})$ や，微分演算子 $(-\partial/c\partial t,\ \nabla)$ もその例である。

2 つの四元ベクトル $\mathrm{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ と $\mathrm{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ の内積（正確には**反変ベクトル**と**共変ベクトル**の積）が以下のように定義され，ローレンツ変換で不変な量（**スカラ量**）になる：

$$\mathrm{a}\cdot\mathrm{b} = -a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{17}$$

電磁波の位相は $\mathrm{k}=(\omega/c,\ \boldsymbol{k})$ と $\mathrm{r}=(ct,\ \boldsymbol{r})$ の内積であり，系 S' と系 S で共通なスカラ量である。

共変ベクトルと反変ベクトル　一般的な空間の座標変換 $\{x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots)\}$ で**基底**（基底ベクトルの**組**）が $\{\boldsymbol{e}_i\}\rightarrow\{\boldsymbol{e}'_i\}$ と変換されるとき，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ そのものは不変として

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_i \boldsymbol{e}_i \mathrm{d}x_i = \sum_i \boldsymbol{e}'_i \mathrm{d}x'_i \tag{18}$$

である。したがって，座標が拡がれば基底が縮むなど，一般に基底は座標と**逆の変換**を受けることにより変換を相殺する。そこで，基底と同じ変換に従うか，その反対かで**共変**，**反変**と名付けるのであるが，基底のことは保留しておき，座標変換から出発する方が分かりやすい。座標変換が局所的に

$$\mathrm{d}x'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\ \mathrm{d}x_j \tag{19}$$

で与えられるとして，これと同じ変換（紛らわしいが「座標と共変」な変換）

$$V'_i = \sum_j X_{ij} V_j\ ,\quad X_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \tag{20}$$

に従うベクトルを**反変ベクトル**という。普通のベクトルは大抵これである。これに対して変換

$$\Lambda'_i = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\ \Lambda_j \tag{21}$$

に従うベクトルを**共変ベクトル**という。自明に近い代表的な例は，偏微分の組 $\{\partial/\partial x_i\}$ である。空間（一般には曲面の局所的接平面）を決める**基底**は，(18) により位置ベクトル $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, \ldots)$ から定義され，

$$\boldsymbol{e}'_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_j}\ \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\ \boldsymbol{e}_j \tag{22}$$

を満たすから，確かに組 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ として共変の定義の規範になっている。

ここで（上で既に用いた）偏微分の推移則から

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\ \frac{\partial x'_k}{\partial y_j} \quad\Rightarrow\quad \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\ \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \tag{23}$$

が成り立つから，(20) と (21) の変換の係数は互いに**逆行列**の関係にあり，(21) は

$$\Lambda'_i = \sum_j \Lambda_j (X^{-1})_{ji} \quad \Big(= \sum_j (X^{-1})^T_{ij}\ \Lambda_j \quad \leftarrow\ T \text{ は転置}\Big) \tag{24}$$

と書く[4]ことができる。行列の言い方をすれば，反変ベクトルは**列ベクトル**（1 列行列），共変ベクトルは**行ベクトル**（1 行行列）の変換規則

$$\mathrm{V}' = \mathrm{XV} \ , \quad \Lambda' = \Lambda\mathrm{X}^{-1} \tag{25}$$

に従っている。（**逆の対応**も可能）この 2 種類のベクトルを区別するため，共変ベクトルの成分は $\{\Lambda_i\}$，反変ベクトルは $\{V^i\}$ と，（ここまでの部分や行列も含めて）添え字の位置で書き分ける約束になっている。（私はこの憂鬱な記号に出くわしたら，我流で「行ベクトル」「列ベクトル」と気楽に読むことにしている。）

以上により，共変ベクトルと反変ベクトルの積 $\Lambda_i V^i$ （ダブル添え字に対する和の記号 $\sum$ は慣例的には省略される）は，1 行行列 Λ と 1 列行列 V の（行列計算の）積に対応させることができて，

$$\Big(\ \sum_i \Lambda_i V^i = \ \Big) \quad \Lambda_i V^i = \Lambda\mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad \Lambda'\mathrm{V}' = \Lambda\mathrm{X}^{-1}\mathrm{XV} = \Lambda\mathrm{V} \tag{26}$$

これを**内積**といい，座標変換で不変な**スカラ量**である。同様に (18) も予定通り座標変換で不変である。基底の変換を「逆変換」ではなく「逆の変換」と書いたのは，逆行列で右から[5]変換されるためである。

ローレンツ変換は 4 次元座標の線形変換であり，**逆変換**は相対速度 v の符号を変えれば得られる。冒頭のローレンツ変換は，相対速度 $\boldsymbol{v}$ を x 方向に限定していたが，ここでは $\boldsymbol{v}$ の方向が一般の形を（後の共変形の結論が一般的であることを確かめておくために）最初だけ書いておく。t の代わりに ct を変数とするローレンツ変換，列ベクトルに 左から掛かる 変換行列 X，およびその逆行列 X^{-1} は，記号

$$\beta = \frac{v}{c} \ , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \quad \mathrm{G} = \mathrm{G}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

を用い，$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c \ \ (\beta_i = v_i/c)$ として，以下のように書くことができる：

$$ct' = \gamma(ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}) \ , \quad \boldsymbol{r}' = \gamma(\boldsymbol{r}_\parallel - \boldsymbol{\beta}ct) + \boldsymbol{r}_\perp \qquad \Big(\boldsymbol{r}_\parallel = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}/v^2 \ , \ \ \boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\parallel \Big) \tag{28}$$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1+(\gamma-1)\beta_1^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_1\beta_2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_1\beta_3/\beta^2 \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma-1)\beta_2\beta_1/\beta^2 & 1+(\gamma-1)\beta_2^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_2\beta_3/\beta^2 \\ -\gamma\beta_3 & (\gamma-1)\beta_3\beta_1/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_3\beta_2/\beta^2 & 1+(\gamma-1)\beta_3^2/\beta^2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X}^{-1} = \mathrm{G}^{-1}\mathrm{X}^T\mathrm{G} \tag{29}$$

ただし，ここでは $\mathrm{X}^T = \mathrm{X}$（対称行列）である。行列 G は，左から掛かれば 1 行目の，右から掛かれば 1 列目の符号，すなわち相対速度 $\{\beta_i\}$ の符号を変える作用をもつ。

列ベクトル $\mathrm{V} = (q^0, q^1, q^2, q^3)^T$ がこのローレンツ変換に従う反変ベクトル，

$$\mathrm{V}' = \mathrm{XV} \tag{30}$$

とするとき，転置行ベクトル V'^T の 先頭だけ 符号を変えた $\mathrm{V}'^T\mathrm{G}$ は，

$$\mathrm{V}'^T\mathrm{G} = (\mathrm{XV})^T\mathrm{G} = \mathrm{V}^T\mathrm{X}^T\mathrm{G} = \mathrm{V}^T\mathrm{G}\mathrm{G}^{-1}\mathrm{X}^T\mathrm{G} = (\mathrm{V}^T\mathrm{G})\mathrm{X}^{-1} \tag{31}$$

を満たす。つまり第 0 成分だけ符号を変えて $(q_0 = -q^0, \ q_1 = q^1, \ q_2 = q^2, \ q_3 = q^3)$ とした $\mathrm{V}^T\mathrm{G}$ が，逆の変換に従う共変ベクトルであることが分かる[6]。以上より，2 つの反変ベクトル V_1 と V_2 の内積を「 $\mathrm{V}_1{}^T\mathrm{GV}_2$ 」，すなわち (17) のように定義することでローレンツ変換に対して**不変量**になる。

[4] （ ）の中の書き方から分かるように，**ユークリッド空間**の直角座標の回転（直交変換）では $\mathrm{X}^{-1} = \mathrm{X}^T$ により基底と座標で変換は同じで，共変・反変の区別は意味を持たない。後ほど出てくる記号で言えば計量テンソル G が**単位行列**である。

[5] 基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を列ベクトルとして縦に書いて，$i = 1, 2, 3, \ldots$ と横に並べた行列 E は，$\mathrm{E}' = \mathrm{EX}^{-1}$ と変換される。

[6] 逆に，典型的な共変ベクトルであった $\{\partial/\partial x_i\} = (\partial/c\partial t, \nabla)$ に対して，$(-\partial/c\partial t, \nabla)$ が反変ベクトルである。波動現象においては，$\partial/\partial t$ が $i\omega$ に，∇ が $-i\boldsymbol{k}$ に対応するから，$\mathrm{k} = (\omega/c, \ \boldsymbol{k})$ も反変ベクトルである。（→ p.3）

これに対して ict を変数にする複素ベクトルの流儀では，同じ意味での（簡単化した）変換行列は

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}\gamma & -i\gamma\beta & 0 & 0\\ i\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{X}^{-1}=\begin{pmatrix}\gamma & i\gamma\beta & 0 & 0\\ -i\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{32}$$

である（**標準形：**$\beta_1=\beta,\ \beta_2=\beta_3=0$）。この場合，$\mathrm{X}^{-1}=\mathrm{X}^T$（G が単位行列）だから，(30) の転置が

$$\mathrm{V}'^T=\mathrm{V}^T\mathrm{X}^T=\mathrm{V}^T\mathrm{X}^{-1} \tag{33}$$

となる。したがって転置しただけの行ベクトル V^T が共変ベクトルであり，内積は「 $\mathrm{V}_1^T\mathrm{V}_2$ 」である。

変換がユニタリの場合は $\mathrm{X}^{-1}=\mathrm{X}^\dagger$ だから，(30) のエルミート共役（転置と複素共役）をとって

$$\mathrm{V}'^\dagger=\mathrm{V}^\dagger\mathrm{X}^\dagger=\mathrm{V}^\dagger\mathrm{X}^{-1} \tag{34}$$

となるから，$\mathrm{V}^\dagger$ が共変ベクトルであり，V_1 と V_2 の内積は見慣れた「 $\mathrm{V}_1^\dagger\mathrm{V}_2$ 」の形で与えられる。

複素ベクトル空間のユニタリ変換（実ベクトル空間の直交変換を含む）では，同一ベクトルの内積は**非負**（正または 0）であるが，一般にはそうとは限らない。

余白ができたので，ついでに付録　2010/2/1

音波　非相対論的な**ガリレイ変換**（時間が不変）でよいが，<u>静止した空気</u>に対して音速 V が定義される[7]ことに注意がいる。ある瞬間に観測点 P に届いた音波が，静止した空気の座標系（一様な風があるなら風に乗った座標系[8]）S_0 において，**局所的な**位相 $\omega_{\mathrm{P}}t-\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{r}_0$ の波で表されたとする。

S_0 に対して速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する観測者の系 S' では $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{v}\,t$，また $|\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}|=\omega_{\mathrm{P}}/V$ だから，

$$\omega_{\mathrm{P}}t-\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{r}_0=\omega_{\mathrm{P}}t-\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}\cdot(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{v}t)=(\omega_{\mathrm{P}}-\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{v})t-\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{r}'\ \ (=\omega't-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}') \tag{35}$$

$$\omega'=\omega_{\mathrm{P}}-\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{v}=(1-v_\parallel/V)\,\omega_{\mathrm{P}}\ ,\quad \boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}} \tag{36}$$

ここで $v_\parallel$ は，波の進行方向（$\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}$ の方向）の**速度成分**（$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}/|\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}|$ として $v_\parallel=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}$）である。$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}$ は，音波では<u>「光行差」はない</u>ことを意味する。もちろん，$2\pi/|\boldsymbol{k}'|$（「局所波長」※）も変わらない。

S_0 に対して速度 $\boldsymbol{u}$ で運動する音源の系 S では，ガリレイ変換 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}\,t$ より，同様にして

$$\omega=\omega_{\mathrm{P}}-\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{u}=(1-u_\parallel/V)\,\omega_{\mathrm{P}}\ ,\quad(\ \boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}\ ) \tag{37}$$

後ろの式は上と同じ意味である。$\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}$ は音源の移動によって刻々変化する。$t=0$ に音源が原点を通過したとして，時刻 t に $\boldsymbol{r}_0$ に達する波面は，$|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{u}\,t'|=V(t-t')$ を満たす時刻 t' に点 $\boldsymbol{u}\,t'$ を通過した音源から出た波面であり，波数ベクトル $\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}(t)$ は，方向が $\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{u}\,t'$ に平行で大きさは ω_{P}/V である。

以上より ω_{P} を消去すれば，ドップラー公式が簡単な代数計算で迷うことなく求められる：

$$\omega'=\frac{V-v_\parallel}{V-u_\parallel}\,\omega\ ,\quad \boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}(t)\ ,\quad |\boldsymbol{k}'|=\frac{\omega}{V-u_\parallel} \tag{38}$$

※ ガリレイ変換では<u>長さは不変</u>だから，位相の勾配や波長も変換で不変である。ただし $\boldsymbol{k}'$ は大きさも方向も**刻々**変化するから，波長が正確に定義できるのは，$\boldsymbol{k}'$ の方向が不変で平面波とみなせる真正面か真後ろである。それ以外では，近似的には $|\boldsymbol{u}|\ll V$，または音源と観測者の間の距離が波長に比べて十分長ければよい。

なお，音源が動く場合の「斜めドップラー効果」に現れる**角度**（あるいは上の $u_\parallel$）は，高校の教科書で音源と観測者を結ぶ直線と音源の速度の方向との間の角度であるかのような図が描かれていることがある。正確には上の結論で分かるように，観測者に届いた波面を放出した瞬間の，<u>過去の音源と観測者を結ぶ直線</u>（波面の法線方向 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}/|\boldsymbol{k}_{\mathrm{P}}|$ ）と音源の速度の間の角度である。航空機が上空を通過する問題で,「真上に見えるとき」は錯覚を起こしやすい。たとえ音源が十分遠方であっても，配置は相似だから角度の関係は変わらない。$|\boldsymbol{u}|\ll V$ の場合はこの差を気にすることはないが，音波のドップラー効果ではこの条件は必ずしも前提にしていない。

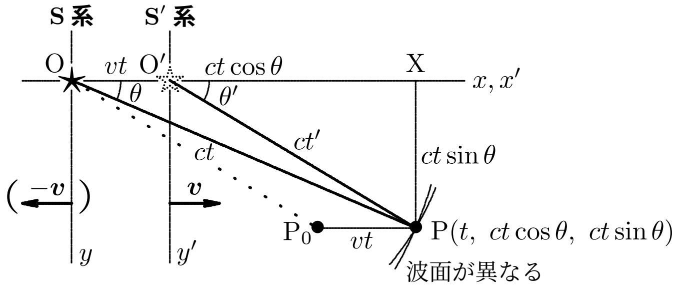
---

[7] 光と違って，波動方程式（位相速度 V）はガリレイ変換で不変ではなく，この系でだけ成り立っている。

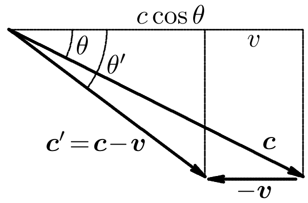
[8] 地面に対する風の速度を $\boldsymbol{w}$ として，以下の $\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w},\,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}$ とする。

光行差について　　　　　　　　　　　　　質問があり補足 2010/2/1

時刻 $t=0$ に原点 O で星が光り，光は光速 c で宇宙空間（S 系）を真っすぐに進んで，時刻 t に，たまたま通りかかった地球上の観測者の位置 P 点に到達したとする。地球上の人は光った瞬間の星の位置 O′（地球にとって過去の星の位置。$t=0,\ x=0$ は $t'=0,\ x'=0$，また，ローレンツ変換でも，$x=vt$ が常に $x'=0$ である。）から S′ 系において，やはり光速 c で真っすぐに進んで来た光を見る。



参考：古典力学的な相対速度の考え



時刻 t の P 点の座標，$x=ct\cos\theta,\ y=ct\sin\theta$ をローレンツ変換式 (2) に代入すれば

$$t'=\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ t\ ,\quad x'=\frac{\cos\theta-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ct\ ,\quad y'=y=ct\sin\theta \tag{39}$$

となる。第 2 式は，S 系から見たときの，速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する S′ 系の x' 方向の「長さの縮み」

$$\overline{\mathrm{O'X}}=ct\cos\theta-vt=\sqrt{1-\beta^2}\ x' \tag{40}$$

を表している。これから直ちに (14) と同じ光行差の公式

$$\cos\theta'=\frac{x'}{ct'}=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}\ ,\quad \tan\theta'=\frac{y'}{x'}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\cos\theta-\beta} \tag{41}$$

が得られる。非相対論的（$v\ll c$）として，β について 1 次までで近似すれば

$$\cos\theta'\simeq\cos\theta-\beta\sin^2\theta \tag{42}$$

となる。地球の公転速度が半年で反対向きになるから，星の見える方向の**半年差**は $\Delta\theta'\simeq 2\beta\sin\theta$ である。地球の公転速度は光速の約 1 万分の 1（~ 30 km/s），角度に換算して $\beta\simeq 20.5''$ である。（ちなみに自転による地面の速度は，赤道上でおよそ 460 m/s，公転速度の約 1.5 %である。）

なお (41) の後ろの式で分子の $\sqrt{1-\beta^2}$ を除いたものは，宇宙空間に対して速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する地球から見た光の 古典力学的 な相対速度 $\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{v}$ の方向に対応する（上の**右図**）。恒星の光行差は，光の**粒子説**（ニュートン）の立場から地球に降り注ぐ光の**相対速度**として説明され，地動説の駄目押し的な論拠となった。あと一歩，相対論的な速度 $\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$ の変換式（合成則）を光の速度に適用すれば，

$$c'_x=\frac{c_x-v}{1-vc_x/c^2}\ ,\quad c'_y=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-vc_x/c^2}\ c_y \qquad \left(\text{この場合，}\ {c'_x}^2+{c'_y}^2=c^2\right) \tag{43}$$

となり，確かに (41) が得られる。

しかしながら光を波と考え，音波における静止した空気の代わりに宇宙の**絶対静止エーテル**中をどの方向にも光速 c で伝わるとするなら，静止した音源から届く音波と同じで 各瞬間 の波数ベクトル（=位相の**勾配**，波面の法線方向）は地球の運動にはよらない[9]から，恒星の見える方向の**季節差は観測されない**はずである。その意味で座標系による波の進行方向の差としての光行差は，たとえ非相対論的（$v\ll c$）な場合でも，絶対静止エーテルを否定した**光速度不変の原理**に関わる相対論的現象なのである。[10]

[9] 観測者が運動する場合，音波の古典力学的「相対速度」が波面（位相）の移動速度と一致しないことは，完全な平面波の中を観測者が波面に平行に運動する場合を想像すれば分かりやすい。

[10] 恒星の位置は地球の回転運動によって刻々変化するが，この**時間的変化**と光行差を混同してはならない。なお遠方の恒星から届く光はほぼ平行光線（平面波）と見なせるから，直線運動に近い地球の公転では星の方向は殆ど時間変化しない（1 日に約 1 度，10 分間でやっと光行差程度）。星座が一夜で目に見えて移動するのは，光行差の原因とは逆で主として地球の自転のためである。恒星の位置に関しては，光行差のほかに各恒星までの距離の違いによる**年周視差**と呼ばれる現象もある。