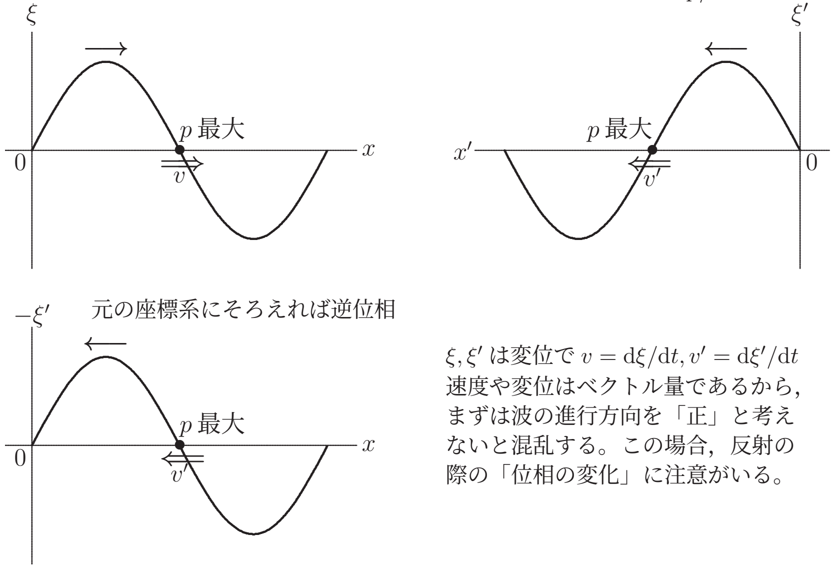
高等学校物理「音波」における混乱の要因

「圧力と媒質速度は同位相」としながら「強め合う・弱め合う」の関係が逆になったり,「固定端反射」という用語が「固定した壁」として一人歩きしている。圧力と媒質速度の位相関係については，高校物理のレベルでは下の図で十分なのであるが，反射の問題を考えるためには波動方程式に立ち入っておく方が理解が早い。高校物理で使われている縦波の「変位」は，平衡位置のない空気のような流体では，考えてみると奇妙な概念なのであるが，流体が静止していたときの位置からの変位，いわゆる流体粒子の座標変位として無反省に使うことにする。

音圧と速度は同位相。（この比例係数がインピーダンス $Z = p/v$）



ξ, ξ' は変位で $v = \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t, v' = \mathrm{d}\xi'/\mathrm{d}t$
速度や変位はベクトル量であるから,
まずは波の進行方向を「正」と考えないと混乱する。この場合，反射の際の「位相の変化」に注意がいる。

波動方程式　音波の場合には，変位ではなく**圧力**と**速度**が基本量になる。圧力を $P+p$（p が音圧），密度を $\rho = \rho_0 + \delta\rho$，媒質の速度を，**波の進行方向を正**と決め，$v$ とする。静止流体の場合，p, $\delta\rho$, v がともに 微小量 となる。人間の耳で聞こえる音では圧力や密度の変化は平衡値の $10^{-10} \sim 10^{-4}$ 程度であり，ほんのわずかである。体積弾性率（断熱圧縮率の逆数）[1]を

$$K = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = \rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \ , \quad \text{したがって} \quad \frac{\delta\rho}{\rho_0} \simeq \frac{p}{K} \tag{1}$$

とするとき，**連続の式**[2]（「質量の保存則」）から 2 次以上の 微小量を無視 して

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\rho v \simeq -\rho_0\frac{\partial v}{\partial x} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho}{\partial t}=\right)\ \frac{1}{K}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

となり，**運動方程式**（「運動量の保存則」）から同様の関係式が得られる：

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)v - \frac{\partial p}{\partial x} \quad\Rightarrow\quad \rho_0\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3}$$

電磁波の場合と同様にして (2) と (3) を連立させれば，p と v について全く同じ形の波動方程式

$$\left(\frac{\rho_0}{K}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)p = 0\ , \quad \left(\frac{\rho_0}{K}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)v = 0 \tag{4}$$

[1] 気体の場合，固体のような変位に対する復元力というよりは，主として密度変化を元へもどそうとする**エントロピー的な力**である。

[2] 物理量 q が保存量のとき，ある定まった体積中に含まれる q の時間的変化率は，q の流束 $q\boldsymbol{v}$ の表面での出入りの差だけで与えられる。運動量の場合は，これに力の項が加わり，今の場合の力は圧力差（圧力勾配）である。

が導かれ，音速は $c = \sqrt{K/\rho_0}$ となる。とりあえず p と v の位相差を ϕ として

$$p = p_0 \sin(\omega t - kx)\ ,\quad v = v_0 \sin(\omega t - kx + \phi) \tag{5}$$

これを (2) に代入すれば，p, v は波の進行方向に速度を正（すなわち $k > 0$）とする限り**同位相**（$\phi = 0$）で，振幅の間には

$$\omega p_0 = kKv_0\ ,\quad p_0 = \frac{kK}{\omega}v_0 = \frac{K}{c}v_0 = (c\rho_0)\ v_0 \tag{6}$$

の関係が成り立っていることがわかる。この係数 $c\rho_0$ $(= \sqrt{\rho_0 K})$ を，**媒質の音響インピーダンス**といい，Z で表す。通常の空気で $Z \sim 430$ Pa/(m/s) である。音圧 p，速度 v を電磁波の**電場**と**磁場**に対応させれば，$K^{-1} \Leftrightarrow \epsilon$，$\rho_0 \Leftrightarrow \mu$ で，$\sqrt{\rho_0 K}$ が電磁インピーダンス $\sqrt{\mu/\epsilon}$，音速 $\sqrt{K/\rho_0}$ が光速 $1/\sqrt{\epsilon\mu}$ に対応する。

音の強さとエネルギー　音の強さはエネルギー流束密度で表され，$I = pv = p^2/Z$ である：

速度の方向に断面積 A，長さ l の微小な柱状部分（$V = Al$）を考えれば，両端での変位の差，すなわち「**伸び**」$\Delta\xi$ $(= l\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}x)$ と圧力変化 ΔP $(= p)$ との間には，$A\Delta\xi = \Delta V = -(V/K)p$ の関係がある。この体積部分を「**弾性体**」（ばね）と見なせば，変形 $\Delta\xi$ をもたらすには外力

$$F(\Delta\xi) = -pA = \frac{VK}{l^2}\Delta\xi \qquad \left(\Delta\xi = -\frac{l}{K}p\right) \tag{7}$$

を加える必要があり，VK/l^2 が「**弾性定数**（ばね定数)」である。したがって，この体積部分には

$$\text{（外力のした仕事＝）}\ \int_0^{\Delta\xi} F(x)\mathrm{d}x = \frac{VK}{2l^2}(\Delta\xi)^2 = \frac{V}{2K}p^2 \tag{8}$$

の「**弾性エネルギー**」が貯えられることになり，運動エネルギーとあわせて**エネルギー密度**は

$$u = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{p^2}{2K} \quad \left(= \frac{pv}{c}\right) \qquad \left(\text{cf.}\ \ u_{\text{EM}} = \frac{\mu H^2}{2} + \frac{\epsilon E^2}{2}\right) \tag{9}$$

となる。以上と，(2)，(3) を用いれば，保存量であるエネルギーの連続方程式が導かれる：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho_0 v\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{p}{K}\frac{\partial p}{\partial t} = -v\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}pv \quad \left(= -\frac{\partial}{\partial x}uc\right) \tag{10}$$

したがって pv $(= uc)$ がエネルギー流束密度 I であり，エネルギーは音速 c で伝えられる。

運動量は (3) で無視した高次の項を含めて

$$\rho v = (\rho_0 + \delta\rho)v = \rho_0 v + \frac{\rho_0}{K}pv = \rho_0 v + \frac{pv}{c^2} \tag{11}$$

と表せる。第一項の $\rho_0 v$ も位相（波形）の移動に伴って伝わっていくが，振動するため時間平均すれば 0 であり，正味で恒常的に運ばれるのは第二項である。この運動量 $g = pv/c^2$ $(= u/c)$ は，波の進行方向に向かって正の量（ベクトル量）である。u と同じ形の連続方程式

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}gc \tag{12}$$

に従うことが示され，やはり音速 c で運ばれる。（**注．**格子振動の粗密波を量子化した**フォノン**のエネルギーと運動量の関係はこれに対応する。）

反射と透過　以上で見てきたように，波動方程式を考える上では，速度の正の方向を波の進行方向にとっておくのが合理的である。例えば壁で反射するとき，速度（変位）は壁の位置で 0 であることから速度の向きが反転するが（固定端的），速度の正の方向を波の進行方向にとるなら位相（向き）は変わっておらず，速度と同位相である圧力波も位相を変えない（自由端的）。

これをインピーダンスの関係から導いておこう。異なる媒質の境界での反射・透過を考える際には，速度や変位の方向は**実験室座標系に固定**して考える方が，無用な混乱を生じない。媒質１と２の境界面（yz-面）に垂直に x の負の方向から入射する（入射角がある場合も，角度が小さければ本質的には同じなので省略）として，入射波，反射波，透過波の音圧と速度をそれぞれ (p, v)，(p', v')，(p'', v'') とする。境界面での圧力および媒質速度の連続性から[3]

$$p + p' = p'' \ , \quad v + v' = v'' \tag{13}$$

媒質１，２の特性インピーダンスを Z_1，Z_2 とするとき，反射波では速度の正の方向が先ほどと逆であることを考慮して

$$v = p/Z_1 \ , \quad v' = -p'/Z_1 \ , \quad v'' = p''/Z_2 \tag{14}$$

これを代入して連立方程式を解けば，音圧波と速度波の振幅の透過率，反射率はそれぞれ

$$T_p = \frac{p''}{p} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \ , \quad R_p = \frac{p'}{p} = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad (T_p - R_p = 1) \tag{15}$$

$$T_v = \frac{v''}{v} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \ , \quad R_v = \frac{v'}{v} = \ \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad (T_v - R_v = 1) \tag{16}$$

となる。

反射の際の位相の変化　空気とガラスや金属など固体の間では，音速も密度も固体の方が大きく，インピーダンスも固体の方が大である。例えば $Z_1 < Z_2$ のとき，音圧（密度）では $R_p > 0$ で反射波の位相は変わらない（自由端的）。これに対して速度波では $R_v < 0$ で位相（向き）が反転する（固定端的）。

このように,「圧力波と速度波は同位相」であるにもかかわらず，反射の際の位相変化は逆になることは注意を要する。この差異が，逆方向に進む波の重ね合わせで生じる**定在波**の場合に明確に顕れる — 腹と節が逆になる — ことは，高校の教科書にも書かれている。

空気のインピーダンスの温度依存性　温度の異なる空気１と２で圧力が共通（力学的平衡：風が起きない状態）の場合，弾性率 K はほぼ同じとみなせる（理想気体では $K = \gamma P$）。ボイルの法則 $\rho \propto T^{-1}$（ここでは T は温度）により

$$c \propto \sqrt{T} \ , \quad Z \propto 1/\sqrt{T} \tag{17}$$

となり,「高温側で音速は大，インピーダンスは小」である。したがって，観測系に固定した座標をとったときの速度の位相変化は,「音速が大の方へ入射するときは開放され，反射波の位相が変わらず，強め合う自由端」と言ってもよいだろう。一方，スカラ量の音圧や密度変化では位相が反転して弱め合う「固定端」になる。（**注．**音速との関係では上の固体の場合とは逆になっている。）

[3] 振幅ではなく振動部分を含んだ関係式であるが，インピーダンスが実数であることから，結果的には位相変化 0 または π を含んだ振幅の関係式とみなせる。

波が「強め合う」「弱め合う」　これは観測系に符号をそろえないと訳が分からなくなるのも事実であり，反射の際の位相の変化も観測系で言及する方が分かりやすい。その代わりに「何の波に対する反射条件か」を明示しておかないと混乱する。このあたりの事情をすっきり整理せずに「固定端」「自由端」の用語を用いてベクトル波の干渉を扱っていることが混乱の原因である。（**注．**横波の電磁波の問題では，偏光や $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ ２つのベクトル量がポインティングベクトル $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ として絡み合って出てくるため，波の進行方向と振動方向の取り方に神経質な扱い（右手系を維持）がされている。）

進行波　言うまでもないが，同じ振動数・波長の２つの波が**同じ方向**に進む場合は,「強め合う」「弱め合う」というのは**すべての位置**においての関係になる。波の干渉としてはこちらの方が基本である。逆方向の波の重ね合わせでできる定在波のように，強め合ったり弱め合ったりする「腹」や「節」の場所ができるのではなく，波の**振幅そのもの**が，同位相であれば足し算になり，逆位相であれば引き算になる。この場合，圧力と速度は同位相であるから，どちらであっても「強め合う」「弱め合う」の関係は同じである。問題になった **2017 年大阪大学入試問題**の「音叉」のように，音叉に対して壁とは反対側で干渉を観測する場合がそうである。大学が公表した「解説」に詳しく述べられているように，マイクロフォンが音圧に感応するか速度に感応するかは考慮する必要がないというわけだ。ただ，出題ミスの原因として，音叉の振動モードを普通の逆方向振動（四重極音源）としていたにもかかわらず，途中から（断りもなく）同方向振動（二重極音源）を前提にしていたという，信じがたい弁明を行い物議を醸し出している。[4]

音波は縦波？　これも混乱の原因の一つであるように思う。縦波，横波というのはベクトル的物理量の概念であって，スカラ量である音圧や密度変化には適用されない。にもかかわらず，中には安易に「縦波は疎密波」という言い方さえ見受けられる。

少なくとも音波の「反射条件」と「強め合う・弱め合う」の関係を議論するときは，音波を縦波（ベクトル量の速度波）とみなすか，疎密波（スカラ量の音圧波，密度変位の波）とみなすか，どちらか一方に暗黙うちにも 見地が首尾一貫しておれば問題は生じない。高校教育（大学入試）レベルでは，そのことを陽に言及することは避けた方がよいが，音源や測定装置の特性との関わりで この見地を変更しなければならないとき だけ，そのことを断わればよい。音源や測定装置（耳の鼓膜を含む）の特性は高度な工学的問題であり，何も説明せずに常識的判断を要求するのは高校物理としては難しすぎる。進行波の場合はともかく，定在波ができているときに,「どの位置で音が強く聞こえるか，つまり鼓膜は音圧を感じるのか速度を感じるのか」とあらためて問われると，圧力変化によって力を受けてペコペコ振動するのだろうと思うが，自信が揺らぐ。

「固定端」「自由端」　この用語そのものも誤解を生んでいるのではなかろうか？高校物理の教科書では,「固定端」というときには文字どおり端（壁）が不動で，横波であれ縦波であれ，境界条件として「変位＝０」の図で説明されている。高校物理のレベルではこれ以外にうまい説明は思いつかないが，実際は「振動している物理量＝０」になるのが固定端境界条件である。要するに，注目している物理量の波動方程式を解くときの「境界条件」である。それでは音波の場合の「不動の固定端」は実際どういう場合かと問われると，なかなか思いつかない。（気柱の開口端はもっと複雑な境界条件になるようだ。モデルとしては，小球をばねでつないだ縦波型の連成振動

[4] 私は，問１も「用意された選択肢に正解がない」と考えている。音叉の板が**開ききった瞬間**には速度が０であり，周辺の圧力や疎密の変化も０である。後日，質問者に対して大学は**無謀な回答**をしたが，さすがに公開はしていない。

系で，端を固定しないでおけば，端では密度，または小球間の距離の変位の変化は，ほぼ0になる。）圧力または密度の変化を縦軸にとった波の図を描くとき，振動が0になるのがこの場合には固定端的な反射になる。

一部が透過する**不完全反射**の場合も,「固定端反射」では用語は誤解を生む。この場合は変動がないのではなく,「入射波と反射波の位相関係」に適用されているのであり，せめて「固定端的な反射条件」と言うべきではないだろうか。

問題になった **2017 年度の京都大学入試問題**（III）は，音波の理論から見ればなかなか考えさせる題材であった。誘導に沿って，運動している車の中の運転手に聞こえてくる音の相対速度，振動数，波長を順を追って求めていけば，設問 (3)，(4) は高校教科書レベルから見てもさほど難問ではない。用意された設問の意図を深く考えずに無闇に食いつくと迷路に入り込んでしまいかねない，入学試験問題としてはよく工夫された良問である。最後の２択の「**せ**」に対する条件の説明不足により，出題ミスとして葬り去られたことはまことに残念に思う。高校教科書では気柱の定在波など音波の干渉を変位で説明していることが多いだけに，あと一言「耳は圧力変化（音圧）を感じる」ということを付け加えさえすれば，音源と運転手の位置関係は問題にならず，また「固定端反射とみなせる」という**誤情報**も不要で文句なしであった。

音源については，高校レベルでは特に断らない限り双極音源や四重極音源などではなく,（必要な角度範囲内において）等方的な単極音源が前提になっていることは受験常識のうちであろう。例えば斜めドップラ効果の説明に，わざわざ音源の性質を断ったりしない。この部分も断りがなかったことで,「問題そのものが成立していない」とする主張もあるが，(3) で「全方位に伝わる」と書かれていることで十分である。

不必要に厳密に問題設定するのは，かえって受験生を煩わせること，あるいは丁寧すぎて答えが殆ど自明になる場合もあり，出題の際に常に悩んできたことである。例えば，最後の「固定端反射とみなせる」がそうである。私もこれに引っかかってしまったが，わざわざ書くとなると「何に対する固定端反射か」まで言わないと誤解のもとになる。単純な壁であれば**何も断らない方がよかった**ものを，欲張って一部が室内にも透過する不完全反射まで設問にしたため,「固定端とみなせる」と断らざるを得なくなってしまったと言えよう。わざわざ言及するなら「固定壁」と言うべきであった。

旧稿（＝ 2/2 以前）では，報道で元職場の出題ミスを知ったとき，なんとか問題を蘇生させたい気持ちのあまり,「贔屓の引き倒し」の過ちを冒していた。この問題の状況では,「速度（変位）の波と考えると，音源と運転手を結ぶ方向と，車の進行方向に垂直[5]に返ってくる反射波の方向との，2 次元（場合によっては 3 次元）ベクトル的な関係まで考えなくてはならない。もはや単純に強め合う・弱め合うではすまなくなり，高等学校物理の音波としては全く無意味な計算問題になってしまう」という指摘だけが正しい。これは大学の「解説」に述べられているとおりである。

せっかくインピーダンスまで担ぎ出したのだから，恥のかきついでにもう少し解説しておこう。最後の設問を「圧力波の固定端的反射」であるとしたのは勇み足である。冒頭に書かれた室内外の温度の関係から，インピーダンスの異なる空気の境界での反射が真っ先に頭に浮かんだのであ

[5] 運転手には，あたかもガラスに映った車から速さ $c\cos\theta$ でやってくる振動数 f の音のように聞こえる。設問の誘導に従って，運動している車にとっての相対的な音速，振動数，そして波長を順番に求めていけば，車が静止している場合と同様の考え方で**問す**の答が素直に得られる。

るが，その際に壁（ガラス）の厚さが無視できるとき壁の影響はないとしていた。確かに計算上はそうなるのであるが，実際には「壁の厚さ l と空気中での波長 λ の比」が，(1 ではなくて)「空気とガラスの密度の比（およそ 2000 分の 1)」よりも十分小さくなければならないようだ。1kHz 程度の音波の場合，1mm の厚さでも無理である。そうなると，今度は耳で聞き取れるほどの谺（こだま）が返ってくるかどうかが怪しくなってくる。[6]

もう一つの過ちは「壁は固定壁ではなくて，ぶるぶる震えている」である。インピーダンスの関係（ガラスは空気の約 3 万倍）からは，ガラスの外側の表面で反射するとき，圧力の波の反射波は入射波とほぼ同じで強め合い（$R_p \simeq 1$），透過波では約 2 倍（$T_p \simeq 2$）になる。一方で，速度の波の透過波は透過圧力波の $1/Z$ 倍であり，空気中での振幅に比べればほとんど振動していないとみなせる。固体の体積弾性率が気体に比べて大きいからと言ってもよい。ここで初めて，２次選抜試験レベルの問題としては言わずもがなの,「壁での反射条件は固定端反射とみなす」とわざわざ断ったことの意味が生きてくる。私のように問 (1) により「固定壁ではなくて振動する壁では？」と不審に思った素直でない人に対して,「それでも壁は動かないと思っていい」と安心させるのが本来の意図であったはずだ。

設問 (3) の考え方　余談であるが設問 (3) はお世辞にも分かりやすい文章とは言えないようだ。車が y 軸上のある位置で，ある時刻に短い音（パルス波）を全方位に出したとする。y 軸上の随所で，その位置に応じた所定の時刻に，壁で反射した谺（こだま）が聞こえるはずである。速さ U で進んでいく車がこの谺をうまく捉えることができるのは，速さ U と音速 c で決まる特定の位置を通過する瞬間だけである。(3) ではこの位置を決める反射角度 θ を求めさせているのである。実際には車は音を出し続けており，常にこの角度で反射してくる谺を聞き続けることになる。

動いている車から見れば，相対速度の関係から谺は進行方向に垂直にやってくることになる。あとは，この相対的な音速と，２回ドップラ効果を受けた振動数とから波長を計算し，車が止まっているときと同じようにして弱め合う条件を求めればよい。ただし，この場合は定在波が出来るわけではない。音源の位置で直接音と谺が強め合ったり弱め合ったりするだけである。

予備校の解答例が**軒並み**に，波面が壁で反射してもどってくるまでの時間を求め，その間に音源が振動する回数が（整数＋ 1/2）になる条件を求めているので不思議に思っていたが，前年度の東京大学で水の波について類似の問題が出題されており，その解き方（誘導）がそうなっていたことによると思われる。確かにこの問だけを解くには，その方が簡単であるが，そこに至るまでの思考の流れからすると唐突であることは否めない。

「水の波」と**「電磁波（光）」**は旧稿に対する質問に答えるため補充し，少々複雑になったので別ファイルとした（2018.10)。

---

[6] 壁の手前と向こう側の空気のインピーダンスを Z_1，Z_2，壁（ガラス）のインピーダンスを Z とする。$\phi = 2\pi l/\lambda' = (2\pi c/c')\ l/\lambda$（$\lambda'$，$c'$ はガラス中での波長と音速）として，

$$\mathcal{R}_p = \frac{[1+(Z_1/Z)^2]\ [1-(Z_2/Z)^2]\ (Z\sin\phi)^2 - ({Z_1}^2-{Z_2}^2) - iZ_1\ [1-(Z_2/Z)^2]\ (Z\sin 2\phi)}{[1-(Z_1/Z)^2]\ [1-(Z_2/Z)^2]\ (Z\sin\phi)^2 + (Z_1+Z_2)^2}$$

となる。（**注．** 複素反射率：$\mathcal{R}_p = R_p \mathrm{e}^{i\alpha}$ と書くとき，R_p が振幅の比，α が位相差を表す。）$\phi = 0$ のときは確かに壁がないに等しい結果になる。$Z\sin\phi \gg Z_1, Z_2$ のときは $\mathcal{R}_p \simeq 1$ である。また，$Z = Z_2$ とすれば壁がないときの反射率になり，$Z = Z_1$ のときは，境界面より l だけ手前の位置における入射波と反射波の位相関係になるから，多分，計算は間違っていないと思う。音響工学の本なら出ているであろうが，手元にないので確信はない。