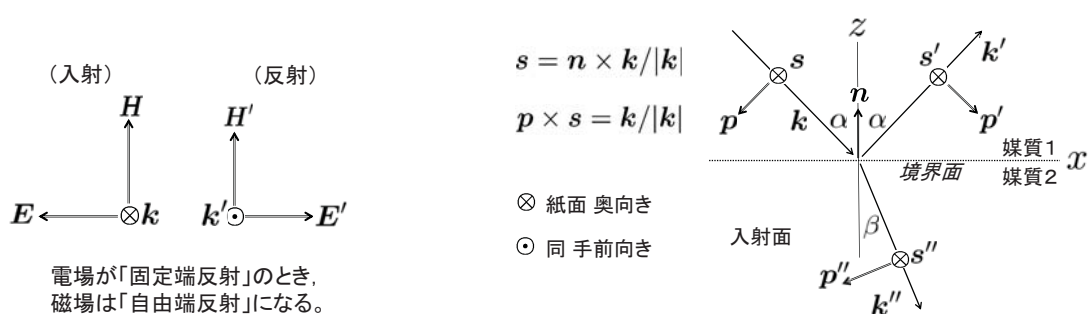


## 電磁波（光）の反射

電磁波の場合も、音波の圧力波・速度波の関係と同じ事情がある。同じ角振動数 $\omega$ で振動する電場ベクトル $E$ と磁場ベクトル $H$ は同位相で、波数ベクトル $k$ に垂直な面内で互いに直交し、 $(E, H, k)$ で右手系を成している。このため、例えば垂直入射を考えると、電場が反射で向きを変える（固定端的）なら、逆に磁場は向きを変えない（自由端的）ことになる<sup>1</sup>。

にもかかわらず高校の教科書では、未だに素知らぬ顔で「屈折率の大きい媒質との境界での反射では位相が反転する（固定端的）」という書き方がされている。これは、高校物理で反射の際の位相変化が問題になるのは、薄膜やニュートンリングなど、近接した2枚の反射面からの反射光の干渉のように、同方向に進む波の場合だからである。この場合は、上のことは忘れて電場（または磁場）の波の反射条件を考えれば十分である。さすがに光の定在波までは扱われていない。大学でも普通は教えていないと思う。（工学系では共振器・導波管を扱っているかもしれない。）



普通は上の右図のように、入射面内に $p$  偏光ベクトル $p$ 、入射面に垂直で境界面に平行に $s$  偏光ベクトル $s$  をとり、常に進行方向に向かって $p \times s = k/|k|$  で右手系を成すように座標をとる。位相（電場の向き）もこの進行方向に乗った座標系で考えるから、「反射で位相が反転する」「反転しない」という言い方をするときには注意がいる。干渉を考えるときは、もちろん実験室系で電場の正の向きを揃えて考えないといけない。

もう一つは屈折率との関係である。反射の際に $s$  ベクトルは変わらないが、屈折率の大きい媒質との境界面 ( $\alpha > \beta$ ) に入射するときは、 $s$  成分は電場の向きが反転するという意味で位相が反転する。 $p$  ベクトルは、波数ベクトル $k$  の変化に伴って方向が変わるが成分の符号は変わらず、その意味での位相は変わらない ( $\alpha < \beta$  のときは逆)：

$$\frac{E'_s}{E_s} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \left( = \frac{H'_p}{H_p} \right), \quad \frac{E'_p}{E_p} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \left( = \frac{H'_s}{H_s} \right) \quad (1)$$

実験室系で見た場合、境界面に垂直な電場の成分は向きが変わらないが、平行な成分は向きが変わる。したがって、垂直入射に近い場合は、 $s, p$  成分とも実験室系で電場の向きが逆転すると見なせるから、「位相が反転する」という言い方が可能である。一方、入射角が大きくなると、位相変化は(1)に従って一般に偏光方向に依存することになる<sup>2</sup>。ただ、入射角が大きくなると反射光の $p$  成分は急速に小さくなり、ブリュースタ角<sup>3</sup>と言われる角度では0になる。このため、ある程

<sup>1</sup> 入射波と反射波のように逆方向に進む波の重ね合わせでできる定在波では、腹の位置が $1/4$ 波長ずれる。

<sup>2</sup> 偏光方向そのものが変化するという方が的確である。

<sup>3</sup> (1)の第二式の分母で $\alpha + \beta = \pi/2$ となる角度。媒質2の屈折率を $n$ とすると、 $\tan \alpha = n$ で与えられる。ガラスや水面からの自然光の反射が直線偏光的になる理由である。 $p$  偏光では、これを超えると位相変化が逆になる。

度入射角が大きくなると、今度はs偏光が反射光の主要成分になることから、電場に注目すればという注釈付きで、やはり(近似的に)「位相が反転する」と言ってもよいかもしれない。

以上のように、光の反射の際の位相変化には、「固定端反射」「自由端反射」と一概に言い切れない事情がある。しかしながら式(1)を見れば分かるように、薄膜のように屈折率の関係が逆の2つの境界面からの反射光の干渉を考えると、「入射角や偏光方向にはよらず、電場・磁場ともに2つの面での反射の際の位相変化は逆になる」ということだけは確かである。そこで便宜上、「屈折率の大きい媒質との境界面では位相が $\pi$ ずれ、逆の場合は変わらない」としておいても、干渉条件を導くのに支障はない。これが教科書的方便である。したがって、具体的に電場または磁場について、片方の面での位相変化のみを単独で問うことは避けるべきである。

私の手元にある教科書では電磁波はずっと後で出てくるが、現行の教科書はやたら詳しくて( $E, H, k$ )の右手系のこと書かれており、呑み込みのいい高校生ならこの時点で冒頭のような疑問をもって不思議ではない。教育現場の先生方には、そういうときに的確に答えられるように、正確な理解をしておいてほしいものである。その上で、教科書の光の反射のところ書かれている屈折率と位相変化の関係は、「実は電場の波で成り立っている(磁場では逆)」ということを個々の教員の裁量で教えても、電磁波を扱う現行の指導要領の範囲で無理はないはずである。

波動光学の分野では(おそらく電磁波の発見以前からの伝統で)電場の波が前提になってきたと考えてよいが、教科書に書かれている反射の際の位相変化の規則についてはいくつか注意がいる:

- (1) p偏光では、振幅の符号変化の幾何学的な解釈に注意が必要である。特に、入射角が大きいと入射・反射・透過波で電場の方向が平行ではなく、幾何学的な意味は希薄になる。
- (2) p偏光では、入射角がブリュースタ角に近づくると反射率は急速に小さくなり、ブリュースタ角より大きくなると位相変化(符号変化)は逆になる。
- (3) いわゆる全反射では、反射波の位相変化は0または $\pi$ (符号変化のみ)とは限らず、入射角に依存した量の位相変化を伴い(後述)、金属表面における完全反射とは性質が異なる。

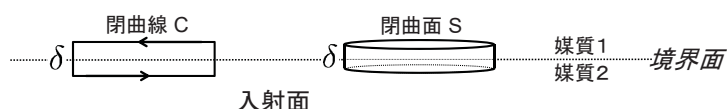
(反射率・透過率の導き方)

インピーダンスと光速 電磁波では電場と磁場の振幅の間には、誘電率を $\epsilon$ 、透磁率を $\mu$ として

$$\frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\mu H^2, \text{ すなわち } \frac{|E|}{|H|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (\text{光速}) \quad (2)$$

の関係があり、 $Z$ を媒質の特性インピーダンスという。真空では $Z_0 = 376.6 \Omega$ である。電場と磁場の成分の符号関係については、右手系に則って決めなければならないことはいうまでもない。なお、物質定数と位相変化の関係に関して音波との対応は、最後に付録として簡単に説明してある。

境界条件 絶縁体と絶縁体の境界面をまたぐ高さ $\delta$ の長方形Cを考えると、閉曲線Cに沿って電場(磁場)を一周積分したものはCを貫く磁束(電束)の時間的変化率に等しいが、 $\delta \rightarrow 0$ の極限では0となる。したがって、電場 $E$ 、磁場 $H$ の境界面に平行な成分は境界面で連続である。



さらに、境界面を挟む薄い円筒面  $S$  を考え、閉曲面  $S$  にガウスの定理を適用すれば、 $D (= \epsilon E)$  と  $B (= \mu H)$  の境界面に垂直な成分が連続であることが示される。これを合わせて用いれば、反射角が入射角に等しいことや、屈折角に対するスネルの法則

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} = \frac{c_1}{c_2} = n \quad (\text{相対屈折率}) \quad (3)$$

も導くことができるが、両方とも波の一般的な考察からすでに分かっていることとする。

垂直入射の場合 境界面に垂直に入射・反射・透過する場合は、s 偏光、p 偏光の区別はなく、実験室系（観測系）で座標を揃えておく方が分かりやすい。電場・磁場の波は進行方向に垂直な横波であるから、入射波、反射波、透過波の電場・磁場を  $(E, H)$ ,  $(E', H')$ ,  $(E'', H'')$  とするとき、先ほどの境界面に平行な電場・磁場の成分の連続性より<sup>4</sup>

$$E + E' = E'', \quad H + H' = H'' \quad (4)$$

また、インピーダンスの関係は、今の座標の取り方では反射波では符号が異なることを考慮して

$$E = Z_1 H, \quad E' = -Z_1 H', \quad E'' = Z_2 H'' \quad (5)$$

以上を連立させて  $E'$ ,  $E''$  を未知数として解けば、以下が得られる：

$$\frac{E'}{E} = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \simeq -\frac{n-1}{n+1}, \quad \frac{E''}{E} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \simeq \frac{2}{n+1} \quad (6)$$

$$\frac{H'}{H} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \simeq \frac{n-1}{n+1}, \quad \frac{H''}{H} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \simeq \frac{2n}{n+1} \quad (7)$$

最後の屈折率を用いた近似式は、後で出てくる透磁率の項を参照してほしい。予想通り、電場と磁場で反射波の位相変化は逆になっている。媒質 2 から媒質 1 に入射する場合は、上式で  $Z_1$  と  $Z_2$  の役割を入れ替える、あるいは相対屈折率  $n$  を  $1/n$  に置き換えればよい。このとき反射波の符号関係（位相変化）は逆になるが、振幅の反射率（振幅の絶対値の比）は変わらない。

この結果はエネルギー流の連続性（エネルギー保存則）を満している（逆にインピーダンスの関係の代わりにこれを用いて上の結論を導くこともできる。ただし、 $c_2 = c_1/n$ ）：

$$c_1 \left( \frac{\epsilon_1 E^2}{2} - \frac{\epsilon_1 E'^2}{2} \right) = c_2 \left( \frac{\epsilon_2 E''^2}{2} \right), \quad c_1 \left( \frac{\mu_1 H^2}{2} - \frac{\mu_1 H'^2}{2} \right) = c_2 \left( \frac{\mu_2 H''^2}{2} \right) \quad (8)$$

電場・磁場を合わせた全エネルギー流は、Poynting ベクトルと呼ばれる、 $S = E \times H$ , ( $|S| = EH$ ) で表される。 $S$  は波数ベクトル  $k$  と向きが同じである。反射率  $R$ , 透過率  $T$  は普通、このエネルギー流の比で定義される：

$$R = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \simeq \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2, \quad T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \simeq \frac{4n}{(n+1)^2}, \quad R + T = 1 \quad (9)$$

$n$  を  $1/n$  で置き換えても  $R$ ,  $T$  は変わらず、境界面のどちらから入射しても同じ（対称）である。<sup>5</sup>

<sup>4</sup> 振幅ではなく振動部分を含んだ電場・磁場の関係式であるが、インピーダンスが実数であることから、結果的には位相変化は 0 または  $\pi$  のみとなり、これによる符号変化を含んだ振幅の関係式とみなすことができる。

<sup>5</sup> 黒体はすべての波長の電磁波を完全に吸収、逆に完全に放射もでき、その意味では真空と同じ ( $n = 1$ ) である。

入射角がある場合は、偏光方向を慎重に扱わなければならない。この場合は、最初に書いたように波の進行方向に合わせた座標系をとる方が扱いやすい。

s 偏光の場合 電場・磁場の境界面に平行な成分の連続性は

$$E_s + E'_s = E''_s, \quad (H_p - H'_p) \cos \alpha = H''_p \cos \beta \quad (10)$$

となるが、第二式はインピーダンス (2) を用いれば

$$\frac{1}{Z_1}(E_s - E'_s) \cos \alpha = \frac{1}{Z_2}E''_s \cos \beta \quad (11)$$

と書くことができる。以上を未知数  $E'_s, E''_s$  についての連立方程式として解けばよい：

$$\frac{E'_s}{E_s} = \frac{Z_2 \cos \alpha - Z_1 \cos \beta}{Z_2 \cos \alpha + Z_1 \cos \beta}, \quad \frac{E''_s}{E_s} = \frac{2Z_2 \cos \alpha}{Z_2 \cos \alpha + Z_1 \cos \beta} \quad (12)$$

p 偏光の場合 同様にして以下の結果が得られる：

$$\frac{E'_p}{E_p} = \frac{Z_1 \cos \alpha - Z_2 \cos \beta}{Z_1 \cos \alpha + Z_2 \cos \beta}, \quad \frac{E''_p}{E_p} = \frac{2Z_2 \cos \alpha}{Z_1 \cos \alpha + Z_2 \cos \beta} \quad (13)$$

透磁率 強磁性体のような特別な場合を除いて、空気や水、ガラスなどの媒質では、透磁率  $\mu$  は有効数字 6 桁程度の精度で真空の透磁率  $\mu_0$  に等しく、インピーダンス比は

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 \mu_2}} \simeq \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \simeq \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} \simeq n \quad (14)$$

と見なすことができる。これと、スネルの法則 (3) を用いて書き直せば各式は以下となる：

$$\frac{E'_s}{E_s} = \frac{\cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (15)$$

$$\frac{E''_s}{E_s} = \frac{2 \cos \alpha}{\cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (16)$$

$$\frac{E'_p}{E_p} = \frac{n^2 \cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \quad (17)$$

$$\frac{E''_p}{E_p} = \frac{2n \cos \alpha}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \quad (18)$$

各行の第二式は垂直入射 ( $\alpha = \beta = 0$ ) のとき有用である。この場合、反射波の p 偏光成分では、座標の取り方が違うため先ほどの結果とは符号が異なるが、位相の関係は同じである。

全反射  $n < 1$  で入射角が  $\sin \alpha > n$  のときは、スネルの法則を満たす透過角  $\beta$  の解がないため全反射が起き、上の結果は適用できない。透過波がないのだから、反射条件は自明に近いほど簡単だと思えるかもしれないが、実は意外に難しい。位相変化が結果的に 0 または  $\pi$  であることを前提にした今の簡便な処方 ( $\rightarrow$ p.3, 脚注 4) では、電場・磁場の境界条件を満たす解は見つからない。ここまでの計算と比較して格段に複雑なので、結論の意外性だけ理解しておけばよい。

任意の位相変化を想定し，入射波・反射波・透過波を（磁場についても同様）

$$E e^{i(k_x x - k_z z) - i\omega t}, \quad E' e^{i(k'_x x + k'_z z) - i\omega t + i\delta'}, \quad E'' e^{i(k''_x x - k''_z z) - i\omega t + i\delta''} \quad (19)$$

とにおいて，スネルの法則を前提にせずに電場・磁場の境界条件をフルに用いれば，反射波については「反射の法則」 $k'_x = k_x$ ,  $k'_z = k_z$ ，ならびに(15)，(17)の代わりに複素振幅比

$$\frac{E'_s}{E_s} = \frac{\cos \alpha - i\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\cos \alpha + i\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}} \quad (= e^{i\delta'_s}), \quad \frac{E'_p}{E_p} = \frac{n^2 \cos \alpha - i\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{n^2 \cos \alpha + i\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}} \quad (= e^{i\delta'_p}) \quad (20)$$

が得られる。振幅比の絶対値はs偏光，p偏光ともに1であるが，このように入射角 $\alpha$ に依存する位相変化を伴う。透過波は完全に0ではなく，まず波数ベクトルの解として

$$k''_x = k_x = k \sin \alpha (> k''), \quad \left( k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}, \quad k'' = nk \right) \quad (21)$$

$$k''_z = \sqrt{k''^2 - k_x^2} = ik\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2} \quad (22)$$

が得られる。波数の $z$ 成分が純虚数のため急速に減衰し，波長程度の薄い表面層を（入射光束の幅の範囲で），表面に沿って進む特殊な波となる。通常の電磁波ではない。それ以上は内部に侵入せず透過しないので，入射波と反射波の間だけでエネルギー保存則が成り立つ。この波の電場（磁場）の方向は境界 $z = 0$ での接続性から決まるが，p成分では必ずしも横波とはならない。

導体境界の場合 伝導電子による交流電流が発生し，ジュール熱損失で減衰するため，ある程度の深さまでしか侵入できない（表皮効果）。 $\epsilon\omega \ll \sigma$ （直流電気伝導度）のとき侵入の深さの目安は

$$l \sim \sqrt{2/\omega\sigma\mu} \quad (23)$$

である。普通の金属導体，例えばAgの場合， $\sigma \sim 6.0 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ， $\mu \simeq \mu_0 \sim 1.25 \times 10^{-6} \text{H/m}$ として，波長10 cmのマイクロ波で $l \sim 1 \mu\text{m}$ となり，ほとんど侵入せず完全反射される。これは光の波長域でもほぼ同様であるが，複素電気伝導度の虚数部を無視できなくなる（自由電子のプラズマ振動）とともに，光のエネルギーでは束縛電子による吸収機構も働くようになる。実際，AgやAlでは可視光のほぼ全域で反射率は1に近いが，CuやAuでは赤から黄色の波長域以外では1より小さくなる。さらに，紫外線より短い波長になるといずれも透明に近づく。完全反射と見なせる場合は

$$E'_s = -E_s, \quad E'_p = E_p, \quad (E''_s = E''_p = 0) \quad (24)$$

$$H'_s = H_s, \quad H'_p = -H_p, \quad (H''_s = H''_p = 0) \quad (25)$$

となる。これにより磁場の境界面に平行な成分が不連続になる。これは，導体内部の磁場を打ち消すような表面電流が流れると考えればよい。さらに，垂直入射でない場合には電場の垂直成分が境界面で不連続になるが，これも導体表面に誘導される表面電荷のためである。なお，上式で分かるように鏡による反射では偏光方向による反射率の違いはなく，プリユースタ角もない。<sup>6</sup>

<sup>6</sup> 偏光フィルムがあれば，ガラスによる反射と鏡による反射の違いを明白に確かめることができる。

表皮効果 真空中から導体表面に垂直入射する場合を考える。導体内部で電磁波は $+z$ 方向に進むとして、電流密度を考慮したマクスウェル方程式の必要部分は以下の2式である：

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x + \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (26)$$

(注．電気伝導度 $\sigma$ や誘電率 $\epsilon$ は比較的遅い振動では定数としておいてよいが、光の振動数近くになると、伝導電子の運動に立ち入らなければならず、 $\omega$ に依存する複素量になる。)

上式より $H_y$ を消去して

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \sigma\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (27)$$

$E_x = E_0 e^{i\omega t - i\kappa z}$ とおけば

$$-\kappa^2 = i\omega\sigma\mu - \omega^2\epsilon\mu = i\omega\sigma\mu(1 + i\omega\epsilon/\sigma) \quad (28)$$

となり、波数は一般に複素数で、屈折率 $n = c_0/c = \kappa/k_0$  ( $k_0 = \omega/c_0$ )も複素数となる。

$\omega \ll \sigma/\epsilon$  ( $\sim 10^{19} \text{ s}^{-1}$ )のとき<sup>7</sup>、(28)は $\kappa^2 \simeq -i\omega\sigma\mu$ となり、 $\kappa = k - i\gamma$  ( $k, \gamma > 0$ )とおけば

$$k = \gamma = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}, \quad E_x(z, t) = E_0 e^{-\gamma z} e^{i(\omega t - kz)} \quad (29)$$

が得られ、 $l = \gamma^{-1}$ が侵入の深さの目安となる。例えば真空中で波長10 cmのマイクロ波では $l \sim 1 \mu\text{m}$ となり、波長 $2\pi/k$ も同程度である。これは屈折率の絶対値が $|n| \gg 1$ であることを意味し、ほとんど完全反射になる。侵入した波は1波長分も進むか進まないかで減衰してしまう。

磁場は、(26)の第2式を用いれば以下の関係が得られる：

$$H_y(z, t) = \frac{\kappa}{\mu\omega} E_0 e^{i\omega t - i\kappa z} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \frac{e^{-i\pi/4}}{Z} E_x(z, t), \quad \left( Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \right) \quad (30)$$

電場とは同位相でないだけでなく、電場と磁場の振幅の比は、ここで用いた近似条件ではインピーダンス $Z$ と比べて極端に小さい。その意味では侵入した波は電磁波とは言えない。境界面での連続性から $H_0 = (E - E')/Z_0$ ,  $E_0 = E + E'$ と考えてよいから、反射波では、振幅と位相に $\sqrt{\omega\epsilon/\sigma}$ 程度の微小な変化はあるが、 $E' \simeq -E$ ,  $H' \simeq H$ と見なせる。

交流電場中の伝導電子の運動 イオン原子とのランダムな衝突を雑踏中の摩擦力と見なして、運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \mathbf{v} - e\mathbf{E}(t) \quad (31)$$

に従うとする。 $\tau$ は平均衝突間時間であるが、強制電場のないときの解が $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0)e^{-t/\tau}$ となることから緩和時間である。 $\mathbf{E}(t) \propto e^{i\omega t}$ とすれば

$$(im\omega + m/\tau)\mathbf{v} = -e\mathbf{E}, \quad \text{よって } \mathbf{v}(t) = -\frac{e\tau}{m(1 + i\tau\omega)} \mathbf{E}(t) \quad (32)$$

が得られる。電流密度は、伝導電子の単位体積あたりの密度を $N$ として $\mathbf{j} = -Ne\mathbf{v}$ であるから、直流電気伝導度を $\sigma = Ne^2\tau/m$ として、複素電気伝導度

$$\mathbf{j}(t) = \sigma(\omega)\mathbf{E}(t), \quad \sigma(\omega) = \frac{\sigma}{1 + i\tau\omega} = |\sigma(\omega)|e^{-i\eta} \quad (33)$$

<sup>7</sup> (26)の第1式の右辺第2項(電束電流 $\partial D/\partial t$ )を無視することになり、定常電流の場合と同じなので準定常近似という。

となり、電場の振動より位相が $\eta (= \tan^{-1}\tau\omega)$ だけ遅れる。通常の交流電源の数十 Hz から GHz の電波あたりでも、ほとんど $\tau\omega \simeq 0$ とみなせ、緩和が速くて位相の遅れはない（準定常的）。しかしながら、60 Hz の交流でも表皮効果の深さは数 cm 程度になり、決して無視はできない。

反射・透過の現象は、誘電体<sup>8</sup>との対応から $j = -Ne\dot{x}$ を分極電流 $\dot{P}$ と考え、複素誘電率

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{\sigma(\omega)}{i\omega} = \epsilon_0 - \frac{i\sigma}{\omega(1+i\tau\omega)} \quad (34)$$

を導入して、複素屈折率 $n = \sqrt{\mu\epsilon(\omega)/\mu_0\epsilon_0}$ で考える方が分かりやすい。

Ag や Cu など普通の金属では、 $N \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$ 、 $\sigma \sim 10^7 \text{ } \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ として、 $\tau \sim 10^{-13} \text{ s}$ である。

- (1)  $\omega \ll \tau^{-1}$ では $\sigma(\omega) \simeq \sigma$ 、かつ誘電率の虚数部が支配的になり $\epsilon(\omega) \simeq -i\sigma/\omega$ 、したがって屈折率は

$$n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon(\omega)}{\mu_0\epsilon_0}} \simeq \sqrt{-\frac{i\sigma\mu}{\epsilon_0\mu_0\omega}} = \frac{\sqrt{-i\omega\sigma\mu}}{\omega/c_0} = \frac{k - i\gamma}{k_0}, \quad k = \gamma = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} \quad (35)$$

となり、先ほどの扱いでよい。以後は「 $\mu \simeq \mu_0$ 、 $n = \sqrt{\epsilon(\omega)/\epsilon_0}$ 」とする。

光の波長域（ $\omega \sim 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$ ）では $\tau\omega \gg 1$ で、分母の虚数部が支配的となるから、 $\sigma(\omega) \simeq \sigma/i\tau\omega$ と見なせ、複素誘電率、および屈折率は

$$\epsilon(\omega) \simeq \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right), \quad n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (36)$$

の形に書くことができる。ここで

$$\omega_p = \sqrt{\sigma/\epsilon_0\tau} = \sqrt{Ne^2/\epsilon_0m} \quad (\simeq 2\pi \times 9.0\sqrt{N} \text{ [MKS]}) \quad (37)$$

をプラズマ振動数（金属イオン格子中の自由電子の自発的な集団運動の角振動数）といい、普通の導体金属では $\omega_p \sim 10^{16} \text{ rad s}^{-1}$ （～紫外線域）である。

- (2)  $\tau^{-1} \ll \omega \ll \omega_p$ のときは $\epsilon(\omega) < 0$ で、屈折率と波数が純虚数になり、 $l = -ik^{-1} = c_0/\omega_p \sim (\omega/\omega_p)\lambda$ （ $\lambda$ は入射波の波長）で、やはりほとんど侵入せず完全反射される。
- (3)  $\omega \rightarrow \omega_p$ では $n \rightarrow 0$ となり、導体内に進行波ではない一様なプラズマ振動が起きる。
- (4)  $\omega > \omega_p$ のときは屈折率は実数で透明になり、入射波の一部はスネルの法則に従って透過するようになる。 $n < 1$ のため入射角次第では全反射が起きる。なお、 $n < 1$ では光速（位相速度）が $c > c_0$ となるが、群速度は $d\omega/dk = c_0^2/c < c_0$ となっている<sup>9</sup>。
- (5)  $\omega \gg \omega_p$ では $n \simeq 1$ で反射率0となり、ほぼ完全に透過する。もちろん、小さくても抵抗に起因する屈折率の虚数部があるので、いずれは減衰する。

<sup>8</sup> 誘電体では自由電子ではなく束縛電子の変位を扱うことになるので、運動方程式(31)の右辺に復元力、 $-m\omega_0^2x$ が加わり、いわゆる強制振動系の運動方程式になる。金属の場合も伝導電子以外に、束縛電子にこれを適用することで、金属の種類による反射率の変化（金属光沢の色の違い）を古典論の範囲で説明することがあるようだ。

<sup>9</sup>  $n = c_0/c = c_0k/\omega$ 、 $c_0k = n\omega = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$ 、 $c_0 dk/d\omega = \omega/\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} = 1/n$ 、よって $d\omega/dk = c_0n = c_0^2/c$ 。

(付録) 音波との対比 まず平行板コンデンサ(面積  $S$ , 極板間の距離  $d$ ) とソレノイド(インダクタンス  $L$ ) から成る  $LC$  振動回路を, ばね振子と対比しながら電磁場で考えてみる。コンデンサに電圧  $V$  (「力」) がかけると, 両極板に電荷  $\pm Q$  が生じる。「力」に比例するこの電荷が, この場合の「変位」であり, 変位をもたらすには仕事を要する。この電荷  $Q$  が時間的に変化するとき回路をつなぐ導線に  $J = dQ/dt$  の電流が流れるが, コンデンサの極板の間の空間にも, 見かけの上で単位断面積当たり  $d(Q/S)/dt$  の一様な電流<sup>10</sup> が流れ, 流れが連続につながっているとみなす。つまり, 力が加わったばねの中の各点で変位により歪みが生じているのと同様に, コンデンサの極板間の空間の各点にも  $Q/S$  の (電荷ではなく) 「歪み」が生じていると考えて, これを  $D$  と表す。この「比喩的な歪み」  $D$  を引き起こしている断面積あたりの力(応力)<sup>11</sup> が電場  $E$  であり, 音波の場合に媒質の密度変化を引き起こす音圧(平衡値からの圧力変化)  $p$  に対応する。コンデンサの容量の式  $C = \epsilon_0 S/d$  から容易にわかるように, この歪みと電場 ( $E = V/d$ ) の間には,  $E = D/\epsilon_0$  の比例関係があり,  $\epsilon_0^{-1}$  が「弾性率」  $K$  の役割を果たしている。さらに, コンデンサに蓄えられる静電エネルギー  $U = QV/2 = CV^2/2$  を極板間の空間に蓄えられる「弾性」エネルギーと考えれば, 単位体積当たり  $U/Sd = DE/2 = D^2/2\epsilon_0 = \epsilon_0 E^2/2$  となることがわかる。以上の対比関係は, ガラスや水などの媒質(誘電体)にも適用され,  $\epsilon_0$  を  $\epsilon$  に変えるだけでよい。

一方, ソレノイドを流れる電流  $J = dQ/dt$  は, ばね振子の「変位」  $Q$  の時間変化率「速度」に対応する。自己誘導起電力によりこの「速度」の時間変化を妨げる慣性がインダクタンスであり,  $L$  が「質量」の役割を果たしている。この場合の「運動エネルギー」  $LJ^2/2$  が, やはりソレノイドの中の空間に蓄えられていると考えれば, ソレノイドの中に電流  $J$  に比例する一様な磁場  $H$  が生じているとして, エネルギー密度は  $\mu_0 H^2/2$  で表される(計算省略)。

以上で見てきた対応関係は, 電磁波の場合にも成り立つ。変位を引き起こす圧力差と電場が, 変位の時間的な変化率である速度が磁場に, つまり音波の場合の圧力波と速度波が電磁波の電場と磁場の波に対応し, 電場と磁場は同位相になる。時間反転に対して対称な圧力と電場が, 反対称な速度と磁場が対応すると見てもよい。垂直入射の場合, 圧力や速度が境界面で連続であったように, 境界面に平行な電場と磁場が連続になる。また, 誘電率  $\epsilon$  の逆数が弾性率  $K$  に対応することから, 電磁波の場合は真空が最も「硬い」(光速が最大)ことになる。正確にはインピーダンスを用いて議論しなければならないが, 直観的には「やわらかい媒質 ( $\epsilon > \epsilon_0$ ) に入射するときは, 圧力波の位相が反転するのに対応して, 電場の位相が反転する」と覚えておけばよい。同様に速度波に対応する磁場の位相は変化しない。逆に「硬い」真空中に出るときは音波が壁にあたるときと同じで, 位相変化は上と逆になる。(ただし「硬」「軟」の直感的印象は逆であることに注意。)

波の進行方向を  $z$ , 電場を  $x$ , 磁場を  $y$  としてマクスウェル方程式は以下で与えられる:

$$\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad \left( c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}, \quad Z = \sqrt{\mu/\epsilon} \right) \quad (38)$$

これが音波の圧力・速度の方程式対と媒質定数に対応する:

$$\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad \left( c = \sqrt{K/\rho_0}, \quad Z = \sqrt{\rho_0 K} \right) \quad (39)$$

<sup>10</sup> 電束電流, または変位電流といい,  $D$  は電束密度, あるいは電気変位ベクトルと呼ばれる。

<sup>11</sup> 誘導された電荷を比喩的に「変位」とみなす場合にこれを引き起こした「力」という意味であって, 電荷や極板に働いている実際の静電力のことではない。これも電場なのであるが, この実際の力を「空間が及ぼす力」(応力)と見なす場合にはマクスウェル応力と呼ばれる全く別の理論体系になる。いささか無責任ではあるが, ここの比喩的な話は最後の結論だけ納得した後は, 忘れてしまう方が賢明である。