

『双子のパラドックス』 — 非対称性の解釈

ある地点で引き返す兄の世界線は折れ線になり、終始単一の慣性系にいた弟の世界線より見かけは長い、時空平面の幾何学では必ず短くなる。これは世界線の長さの定義

$$dt' = \sqrt{dt^2 - dx^2} = \sqrt{1 - v^2} dt \quad (\text{光速を } c = 1 \text{ とする。以下同様})$$

による。これが帰還時に兄の方が若いことの説明であるが、パラドックス、つまり兄と弟の非対称性について何も説明しておらず¹、いかにも愛想ない。まるで狐につままれたみたいで、これだけでは仕掛けが見えてこない。普通は、兄はUターンをする際に非常に大きな加速度運動をするため、この間に時間(兄の時計)がほとんど停止するから、あるいは逆に弟の時計が急激に進むからだと解釈される。時間の遅れの量は確かに特殊相対論だけで計算できるが、それは特殊相対論だけで説明できることを意味しない。(脚注参照)

往路のローレンツ変換 — $t = 0, x = 0$ で $t' = 0, x' = 0$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}(t - vx), \quad x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}(x - vt)$$

(引き返し点) 弟: $x = L, t = t_0 = v^{-1}L \rightarrow$ 兄: $t' = t'_0 = \sqrt{1 - v^2} t_0, x' = 0$

ローレンツ不変量: $t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$

固有時: $s = \sqrt{t^2 - x^2} = \sqrt{t'^2 - x'^2}$

復路のローレンツ変換 — $t = t_0, x = L$ で $t'' = t'_0$, および $t = 2t_0, x = 0$ で $x'' = 0$

$$t'' - 2t'_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}(t - 2t_0 + vx), \quad x'' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}(x + v(t - 2t_0))$$

ローレンツ不変量: $(t - 2t_0)^2 - x^2 = (t'' - 2t'_0)^2 - x''^2$

固有時: $s = 2t_0 - \sqrt{(2t_0 - t)^2 - x^2} = 2t_0 - \sqrt{(2t'_0 - t'')^2 - x''^2}$

(固有時は弟の世界線 $x = 0$ 上で $s = t$ で連続になるように決める。)

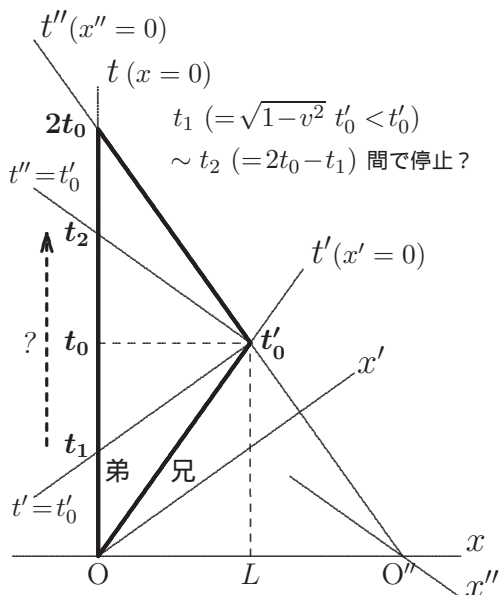


図1 引き返し点での兄の同時刻線

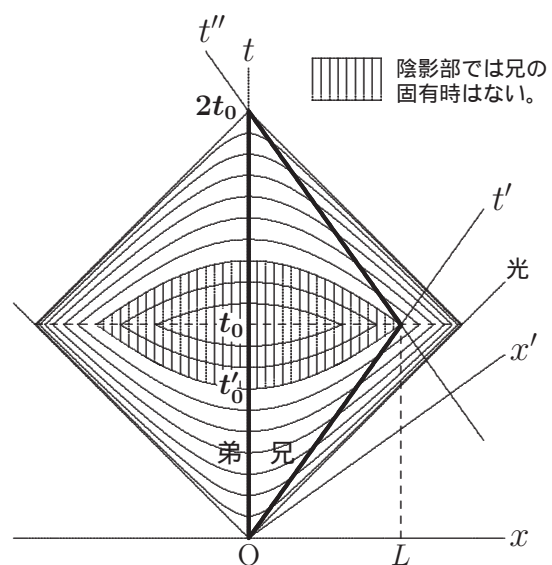


図2 等固有時線

¹ これは $O'' (t = 0, x = 2L)$ を通過した兄が真っすぐ帰還する場合も同じで、兄から見れば弟の方が若くなる。

兄の同時刻線 (x', x'' 座標軸に平行な線) の跳びを用いる説明がよく見かけられる。図 1 のように兄の引き返し時刻 t'_0 と同時刻とみなせる弟の時刻は、引き返しの直前と直後でそれぞれ図上の t_1, t_2 となり、この間に弟が「いっきに歳をとる」と説明される。確かに兄が引き返すことによって生じるこの跳びが、兄の時計の遅れの根元であるが、量的には正確ではない。時間差 $t_2 - t_1 = 2(t_0 - t'_0)$ は、帰還時の兄の時計の遅れ $2(t_0 - t'_0)$ よりも明らかに長すぎる²。そもそも異なる場所における事象を比較する際に、どちらか一方の時間を用いて議論することには無理があるのだ。果たして弟の時間帯 $t_1 \sim t_2$ の間にほんとうに兄の時計が止まっていたのかを確かめようと、今度はこの t_1 と t_2 を通る弟の同時刻線 (水平線) を引いてみると、兄の全く意味のない 2 つの時刻に行き着いてしまい、收拾がつかなくなる。同時刻線で見えてくるのは、たがいに對等な相対的關係、

$$t'_0 = \sqrt{1-v^2} t_0 (\text{兄 弟}), \quad t_1 = \sqrt{1-v^2} t'_0 (\text{弟 兄})$$

すなわち、「兄から見れば弟の時計も同じように遅れている」ということだけである。

兄の時計の絶対的な遅れは、ローレンツ不変量で定義される、両者で共通な固有時を用いることで第三者的な記述が可能になる。ただし、前ページで計算したように兄の行きと帰りでローレンツ変換が、したがってローレンツ不変量が異なるため、固有時の定義も兄の行きと帰りで切り替える必要がある。その結果、図 2 に示されているように、 $t'_0 < s < 2t_0 - t'_0$ の間では兄の固有時は存在しない。つまり図の陰影部は兄の世界には存在しない時空である。静止していた弟の時間軸上で固有時を連続とする限りでは、跳びがあることがわかる。この間に兄は急激な加速度運動をし、兄から見れば自分の位置での固有時は進まない (時間がかからない) が、離れた弟の位置では固有時が進む。つまり、この間に兄の時間が停止していたために、帰還したとき兄は $2(t_0 - t'_0)$ だけ若いのだと理解することができる。

メモ 1. 「兄の世界線は短い」、あるいは同じことであるが「運動している時計は遅れる」という言い方は、相対性ということを正確に理解していない場合には誤解を生むから、可能なかぎり避けるべきであると思う。ごちゃごちゃ議論しているのは啓蒙書 (多分「ど素人」という意味だろう) だけだと書いてある本さえあるのだが、「一を聞いて十を理解した 気になる 人」と虚仮にされても、やはり気になるどころだ。

兄の系でも弟の系でもそれぞれの固有時に従って自然現象が進む。例えば原子や分子の固有振動数はどちらの系でも全く同じである。したがって同じ動作原理の時計なら正確に同じように時を刻み、二人は同じ速さで歳をとっていく。これがアインシュタインの相対性原理の基本である。

メモ 2. 加速度運動 (あるいは重力場の中) で「時計が遅れる」という言い方も (これは私だけかもしれないが) 「時計が遅れる分だけ、よけいに時間がかかる」という錯覚を招きがちである。正確には、「時間がかからない」の方がいいかもしれない。最も極端な場合、一瞬にして U ターンする際に無限大の加速度により時計が停止するというのは、文字通り時間がかからないという意味である。双子のパラドックスの話では兄の方だけに引き返す部分があることが本質的であるにもかかわらず、その際の加速度運動、ひいては一般相対論のことを意識しなくてすむ (一般相対論の計算を知らなくてもすむ) のはこのためである。この無限小時間の間に U ターンするとしても、「加速度 × かかった時間」は有限 (～減速前後の速さの程度) だから、離れた位置の時間には有限な差をもたらす。兄が出発するとき、および帰還したとき、やはり一瞬にして加速 (減速) しなければならないが、これは弟と同じ位置であるため、一般相対論によれば 弟にとっても時間はかからない。引き返す時だけでなく、この際の加速度も理由に加える解説が見かけられるが、これは間違いである。

² 兄から見れば弟も遅れており、この遅れを取りもどす分 $t'_0 - t_1$ を含んでいるためと説明される。一般相対論を用いて兄の系から見た弟の固有時を計算してもこの結果が得られるようだ。