（平面波の表現について）

物理量 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ が，ϕ_0，ω を定数，$\boldsymbol{k}$ を定ベクトルとして

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \phi_0\ \mathrm{e}^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{1}$$

で表されるとき，**平面波**という。実際の物理量は実数部（または虚数部）で表され

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \phi_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

であるから，ϕ_0 が振幅である。位相一定の波面は

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \text{一定} \tag{3}$$

で与えられるから，これをみたす点 $\boldsymbol{r}$ の集合，すなわちベクトル $\boldsymbol{k}$ に直交する平面であり，ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向が波の進行方向を表す。波の振動数 ν，周期 T，波長 λ，速さ c は

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\ ,\quad \lambda = \frac{2\pi}{|\boldsymbol{k}|}\ ,\quad c = \nu\lambda = \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|} \tag{4}$$

で与えられる。角振動数 $\omega = 2\pi/T$ に対して，$|\boldsymbol{k}| = 2\pi/\lambda$ を**波数**という。

複素数による表現が便利であるのは，微分が

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{r},t) = i\omega\phi(\boldsymbol{r},t) \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(\boldsymbol{r},t) = -ik_x\phi(\boldsymbol{r},t) \quad \text{etc. より} \quad \nabla\phi(\boldsymbol{r},t) = -i\boldsymbol{k}\phi(\boldsymbol{r},t) \tag{6}$$

となり，微分演算を以下の代数演算で置き換えればすむことである：

$$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega\ ,\quad \nabla \to -i\boldsymbol{k}\ \text{（スカラー積，ベクトル積ともに適用される）} \tag{7}$$

これを用いれば，平面波は**波動方程式**

$$\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = \nabla^2\phi\ ,\quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{8}$$

の特解であることがすぐにわかる。一般解は平面波の重ね合わせ（フーリエ級数）で表すことができる。

物理量がベクトル量であるときは，平面波は

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{a}_0\ \mathrm{e}^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{9}$$

と書かれ，この場合，振幅ベクトル $\boldsymbol{a}_0$ と波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の直交関係によって

$$\text{（横波）}\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}_0 = 0\ \ \text{したがって}\ \nabla\cdot\boldsymbol{a} = 0 \tag{10}$$

$$\text{（縦波）}\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}_0 = 0\ \ \text{したがって}\ \nabla\times\boldsymbol{a} = 0 \tag{11}$$

に分解される。$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0$ が成り立つ電磁場では，横波成分しか存在しない。