電磁場中を運動する荷電粒子のラグランジアン

（古典的な）運動方程式を導く仮想仕事の原理（ダランベールの原理）は，

$$\left(m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - q\boldsymbol{E} - q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} = 0 \tag{1}$$

ここで

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{v}\ ,\quad \text{ただし}\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{v} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\delta r = -\left(\nabla\phi + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} = -\delta\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\delta\boldsymbol{r} \qquad \left(\textbf{注.}\ \nabla = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\ \right) \tag{3}$$

脚注のベクトル公式[1]を用いると

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = v_i\nabla A_i - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} \tag{4}$$

したがって

$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{A} - [(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}]\cdot\delta\boldsymbol{r} \tag{5}$$

以上より (1) は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}) - m\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{v} + q\delta\phi + q\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} - q\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{A} = 0 \tag{6}$$

ここで

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

であることを用いて整理すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A})\cdot\delta\boldsymbol{r}] + \delta\left(-\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + q\phi - q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right) = 0 \tag{8}$$

両端 t_1，t_2 で $\delta\boldsymbol{r} = 0$ として積分すると

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(-\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + q\phi - q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{9}$$

したがって，ラグランジアンと正準運動量，およびハミルトニアンは以下で与えられる：

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - q\phi(\boldsymbol{r},t) + q\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\ ,\quad \boldsymbol{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}} + q\boldsymbol{A} \tag{10}$$

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + q\phi = \frac{1}{2m}[\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)]^2 + q\phi(\boldsymbol{r},t) \tag{11}$$

ハミルトン方程式の $\dot{\boldsymbol{r}} = \partial\mathcal{H}/\partial\boldsymbol{p}$ が成り立つことは自明。$\dot{\boldsymbol{p}}$ については，$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{r}$ と独立とみなして

$$-\nabla\mathcal{H} = \frac{q}{m}\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}) - \frac{q^2}{2m}\nabla\boldsymbol{A}^2 - q\nabla\phi = \frac{q}{m}[(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{p}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})] - \frac{q^2}{2m}\nabla\boldsymbol{A}^2 - q\nabla\phi \tag{12}$$

$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A}$ を代入し，脚注の公式（ $(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla\boldsymbol{A}^2/2$ ）を用いて

$$-\nabla\mathcal{H} = q\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) - q\nabla\phi \tag{13}$$

となる。一方，(7) を用いれば以下となる：

$$\dot{\boldsymbol{p}} = m\dot{\boldsymbol{v}} + q\dot{A} = -q\left(\nabla\phi + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = -q\nabla\phi + q\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) \tag{14}$$

---

[1] ベクトル公式 $\nabla(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$ で，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{r}$ によらない定数とすればよい。

オイラー-ラグランジの変分原理の例 —— 最速降下ハーフパイプの設計

変分原理は運動方程式専用の道具ではない。積分で表される物理量の最大最小問題一般に用いられる。これはその例である。点 $\mathrm{O}(0,0)$ から速度 0 で出発して点 $\mathrm{A}(a,b)$ まで降下するのにかかる時間

$$T = \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{d}s}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \mathcal{L}(y,y')\mathrm{d}x \ , \quad \mathcal{L}(y,y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} \tag{15}$$

を最小にする曲線 $y = y(x)$ を求める。ただし，$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1+y'^2}\ \mathrm{d}x$，$y$ は下向きを正として $v^2 = 2gy$ である。ここで両端を固定（$\delta y = 0$）したときのオイラーの変分原理

$$\delta T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\ \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}\ \delta y'\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}\right)'\right] \delta y\ \mathrm{d}x = 0 \tag{16}$$

から[2] ラグランジ方程式を積分して求めてもよいが，結果としてこの形の変分原理では一般に

$$\mathcal{H} = y' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \mathcal{L} \ \left(= -\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right) \tag{17}$$

が「保存量」（$\mathrm{d}\mathcal{H}/\mathrm{d}x = 0$）になることを用いる方が簡単である。積分定数を $\mathcal{H} = -1/\sqrt{\ l\ }$ とし，

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\psi \tag{18}$$

と置けば，$\psi = \pi/2$ で $y = 0,\ y' = \infty$（最初は垂直降下で効率よく加速）であるとして，直ちに

$$y = \frac{l}{1+y'^2} = l\cos^2\psi = \frac{l}{2}(1+\cos 2\psi) \tag{19}$$

が得られる。また，x 座標は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\psi} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\psi}\Big/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{l\sin 2\psi}{\tan\psi} = -2l\cos^2\psi = -l(1+\cos 2\psi) \tag{20}$$

より，$\psi = \pi/2$ で $x = 0$ として，以下となる：

$$x = \frac{l}{2}(\pi - 2\psi - \sin 2\psi) \tag{21}$$

以上はサイクロイドの媒介変数表示を与えている。x を y の陽な関数として表すことはできるが，このままの方が分かりやすい。積分定数 l は点 $\mathrm{A}(a,b)$ を通るように決める。例えば 2 点が同じ高さの場合（$b = 0$）は，$\psi = -\pi/2$ で $y = 0$ となることから，$l = a/\pi$ である。

サイクロイド振子　サイクロイドは円輪が滑らずに転がるとき，円周上の 1 点が描く軌跡である。曲線に沿う座標を s とし，曲線を上下逆さにした最下点（$\psi = 0$）を原点として ψ が増加する方向に s を測れば

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\ \mathrm{d}x = 2l\cos\psi\ \mathrm{d}\psi, \quad \text{よって} \quad s = 2l\sin\psi \tag{22}$$

この曲線に沿う質量 m の質点の運動では，最下点を基準にした位置エネルギーは

$$U(s) = mg(l-y) = mgl\sin^2\psi = \frac{mg}{4l}s^2 \tag{23}$$

となり，調和振動子の力学的エネルギー

$$E = \frac{m}{2}\ \dot{s}^2 + \frac{mg}{4l}\ s^2 \tag{24}$$

が得られる。したがって振動の周期は振幅によらず，長さ $2l$ の単振子の微小振動と同じである。つまり質点を曲線上のどこから手放しても，最下点まで到達するのに要する時間は等しい。

[2] $\delta y' = \delta[\lim_{h\to 0} h^{-1}(y(x+h) - y(x))] = \lim_{h\to 0} h^{-1}\delta[y(x+h) - y(x)] = \lim_{h\to 0} h^{-1}[\delta y(x+h) - \delta y(x)] = (\delta y)'$

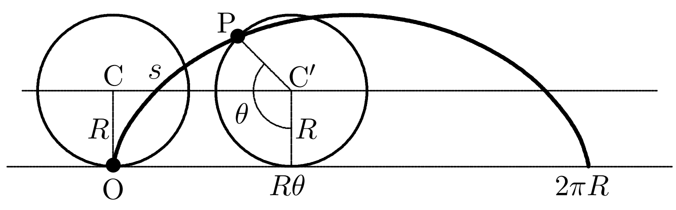
サイクロイド　円輪の半径を R，回転角を θ として，中心 C$'$ の位置は $(R\theta,\ R)$ だから，最初に原点 O にあった円周上の点 P の軌跡は

$$x = R(\theta - \sin\theta)\ ,\quad y = R(1 - \cos\theta) \tag{25}$$

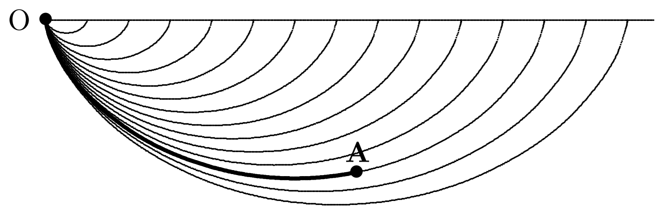
である。弧 OP の長さ s は，$\theta = 0$ で $s = 0$ として

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = R\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\ \mathrm{d}\theta = 2R\sin\frac{\theta}{2}\ \mathrm{d}\theta\ \to\ s = 4R\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) \tag{26}$$

$R = l/2,\ \theta = \pi - 2\psi$ と置けば前の結果になる。



最速降下線　終点 A(a, b) を通るように $l\ (= 2R)$ を選ぶ。［例えば A が O と同じ高さの場合，水平に近い曲線では速度が出ないし，長く垂れ下った曲線では距離が長く時間がかかりすぎ，中間に最適な曲線がある。］



サイクロイド振子　長さ $4R$ の糸で吊るされた単振子がサイクロイドにまとわりついて振動するとき，錘はサイクロイドを描く（**伸開線**）。振り子の直線部分の長さ r と傾き（点 P における接線の勾配）は

$$r = 4R - s = 4R - 4R\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) = 4R\cos\frac{\theta}{2}\ ,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \cot\frac{\theta}{2} \tag{27}$$

であるから，錘の軌跡は以下のように，最初に円輪の最高位置にあった点が描くサイクロイドになる：

$$x' = x + r\sin\frac{\theta}{2} = R(\theta - \sin\theta) + 4R\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = R(\theta + \sin\theta) \tag{28}$$

$$y' = y + r\cos\frac{\theta}{2} = R(1 - \cos\theta) + 4R\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2R + R(1 + \cos\theta) \tag{29}$$

図中の弧長 s' は $4R\sin(\theta/2)$ となり，$4R - y' = s'^2/8R$ が成り立っている（**位置エネルギー**）。