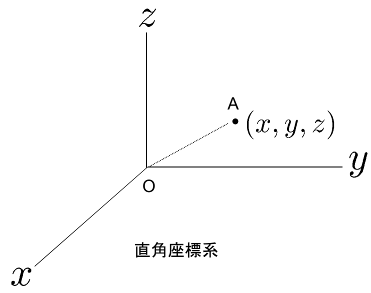
空間と物体の次元と形

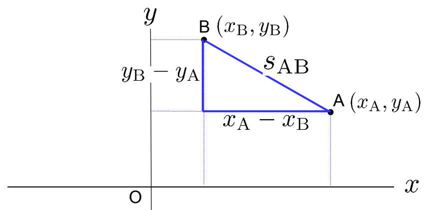
我々の生活している空間 ≒ （とりあえず）3次元ユークリッド空間

3次元空間: 位置が3つの座標変数 （*x*, *y*, *z*） で表される。



直角座標系

2点間の距離（2次元平面）

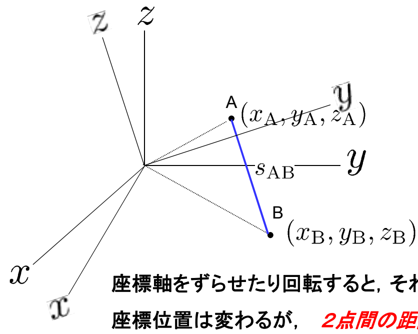


$$s_\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{A} - x_\mathrm{B})^2 + (y_\mathrm{A} - y_\mathrm{B})^2}$$

『ピタゴラスの定理』

ユークリッド空間: 2点間の距離がピタゴラスの定理で表される。

$$s_\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{A} - x_\mathrm{B})^2 + (y_\mathrm{A} - y_\mathrm{B})^2 + (z_\mathrm{A} - z_\mathrm{B})^2}$$



座標軸をずらせたり回転すると，それぞれの点の座標位置は変わるが， ***2点間の距離 は不変***

非ユークリッド空間 ＝ ピタゴラスの定理が成り立たない空間

2次元空間: 位置が**2つの座標**（変数）で特定される空間

平面 ： ピタゴラスの定理が成り立つ。
円周の長さと直径の比（円周率）は一定で，π。

球面 ： 例えば地球なら「緯度」と「経度」で位置が表される。
直角三角形のピタゴラスの定理は成り立たない。
円周率は π（＝3.141592..） ではない。
曲面一般にそうである。

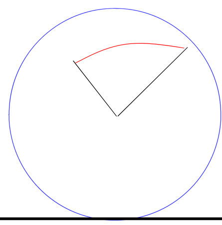
なめらかな曲面
局所的には平面であり，ピタゴラスの定理で2点間の距離が定義される。（もともとピタゴラスの定理は，古代エジプト文明で地球表面の土木工事から経験的に発見されたいたものである。）

曲面（球面）上での「距離」

局所的に定義できる直線（線分）をつないだ長さ（平面上の曲線でも同じ）

最短距離（測地線）というものが定義でき，平面上の**直線**に対応する。

地球（球面）: 与えられた2点と地球の中心の3点を含む平面と球面の交線
地球儀上で糸を張って得られる曲線



これにより，球面上での直角三角形や円が定義できる。
たとえば
円＝球面上の１点から等距離（＝半径）にある球面上の点の集合
（円周率はどうなるか？）

『 **4次元** ユークリッド空間』 (x, y, z, w)

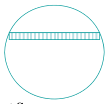
視覚的には理解できないが, ある程度のことは類推できる。

4次元 ~~3次元~~ の球は, どの方向から見ても 3次元の球 ~~円(2次元の球)~~に見える。

4次元 ~~3次元~~の 立方体は, ある方向から見たら 3次元の立方体 ~~正方形(2次元立方体)~~に見える。

1辺の長さがa の立方体の体積は $a^{\cancel{3}\,4}$

半径 a の球の体積は



$$\int_{-a}^{a} \pi (a^2 - z^2) \mathrm{d}z = \frac{4\pi}{3} a^3$$

輪切りにした円の面積

輪切りにした球の体積

$$\int_{-a}^{a} \frac{4\pi}{3} (\sqrt{a^2 - z^2})^{3/2} \mathrm{d}z = \frac{\pi^2}{2} a^4$$

宇宙 ＝ *4次元時空?* 空間 (*x, y, z*) ＋ 時間 *t*

自然現象(一般に事象)の記述 『いつ』『どこそこで』

事象A $(t_{\mathrm{A}},\ x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}})$

事象B $(t_{\mathrm{B}},\ x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}}, z_{\mathrm{B}})$

時間と空間は全く独立 で, 2つの事象の間の

距離 $s_{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}})^2 + (y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}})^2 + (z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}})^2}$

時間 $t_{\mathrm{AB}} = t_{\mathrm{A}} - t_{\mathrm{B}}$

は, どのような座標軸で測っても, どの時計で測っても, それぞれが別々に不変な量であり, 4次元空間での 『距離』 は意味をもたない。これなら, 4次元といっても関連のない 単純な 「**3＋1**」**次元** である。

じつは, 時間と空間は独立には存在し得ない関係にあり, 我々の宇宙空間は 「3＋1」の4次元ではなく, 結合した **4次元時空** である。

$x' = \quad (x - v_0 t)$, $t' = \quad (t - \frac{v_0}{c^2} x)$

逆変換(x, t を未知数として解いたもの)は

$x = \quad (x' + v_0 t')$, $t = \quad (t' + \frac{v_0}{c^2} x')$

で、 $v_0 \to -v_0$ 以外は全く同じ形になっている。(単純な一次式)

とすればよいとの結論を得て、万事、完全に解決した。

4次元時空

ローレンツ変換

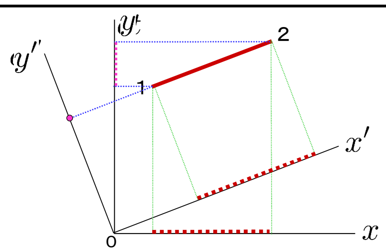
(4次元座標軸回転)

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} (x - v_0 t) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} \left(ct - \dfrac{v_0}{c} x\right) \end{cases}$$

これは4次元での座標変換(座標軸の回転)であり、以下の関係を満たす:

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - (ct_2' - ct_1')^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (ct_2 - ct_1)^2$$

つまり、2点間の 距離は不変 に保たれる。(4次元時空距離)

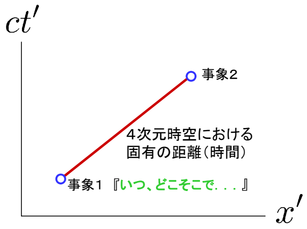


棒の**固有の長さ**は、どの座標系(立場)においても不変であるが、見る方向によって**見かけの長さ**は違ってくる。

ある方向から見れば、長さゼロ(1点)に見えることもある。

ある立場で同時刻(長さゼロ)が、別の立場では同時刻ではなくなる。

固有時間（固有距離）　このように、**時間と空間が関連した4次元時空**で不変に保たれる量が存在する。



我々の住む宇宙空間は、**局所的** には

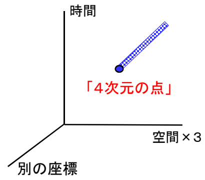
$$\sqrt{(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}})^2+(y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{B}})^2+(z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}})^2-c^2(t_{\mathrm{A}}-t_{\mathrm{B}})^2}$$

で 距離 が定義される，（*擬似*）ユークリッド・**4次元空間**　である。

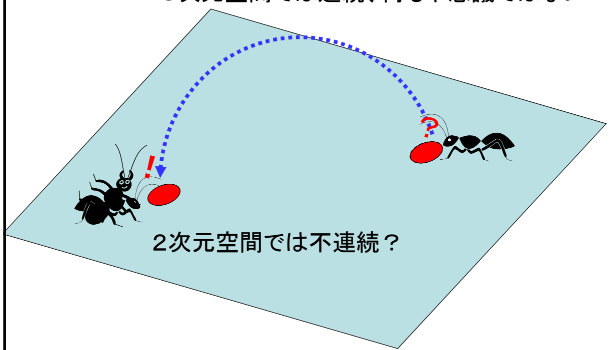
（**ミンコフスキー空間**　という。）

宇宙は10（11？）次元？

時空だけの方向で見れば4次元だが．．．

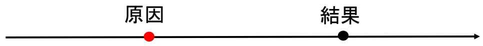


ワープ　　3次元空間では連続、何も不思議ではない

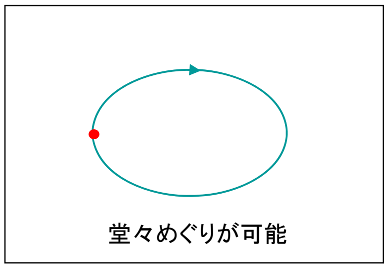


我々の空間でも隠れた次元があれば起こるかもしれない。

時間だけは1次元？



2次元以上だったら



曲がった空間

一般相対性理論

相対性原理を、慣性系に限らず一般の加速度系にまで拡張したもの。

重力場中では、空間や時間の　*歪み*　が生じ，
空間は曲がっている。

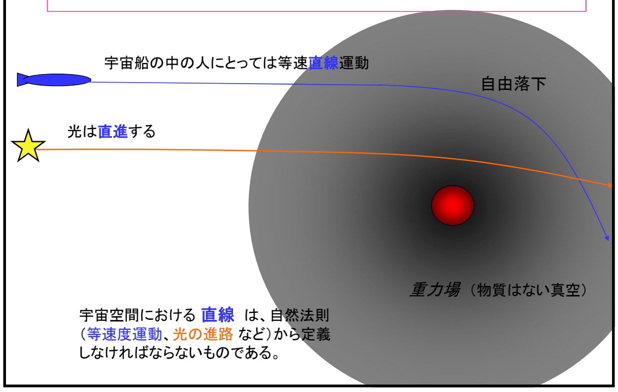
宇宙空間における『直線』

物体は，力が働かなければ等速　直線　運動を続ける。

光は，真空中を　直進　する。

予想 『強い重力の中では，光も曲げられる』

物質はまわりの空間に重力場を作り、重力場では空間（時空）が歪む。

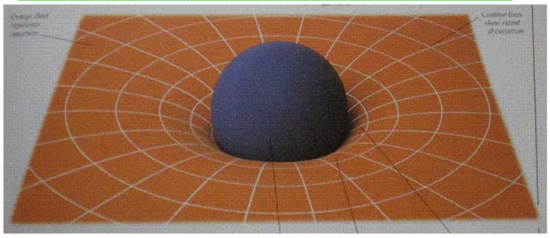


宇宙空間における **直線** は、自然法則
（等速度運動、光の進路 など）から定義
しなければならないものである。

光は非常に速いため、普通は物体のように落ちてきたり楕円軌道を描いたりすることはない。太陽のような恒星の重力場でも、ほんのわずかに光路が曲げられるだけである。

――― *ブラックホール* ―――

宇宙には巨大な質量が集中した **ブラックホール** とよばれるものがある。このまわりでは、非常に強い重力のため空間が激しく歪んでいる。すべての物質だけでなく、光 もいったん吸い込まれたら出て来られない。つまり光がすべて吸収されてしまうため「黒い穴」。



宇宙空間は

局所的 には **4次元ミンコフスキー時空** である。

大域的 には，重力したがって物質の質量によって

直線（あるいは距離，測地線）が決められる，

ゆがんだ非ユークリッド4次元空間であって、

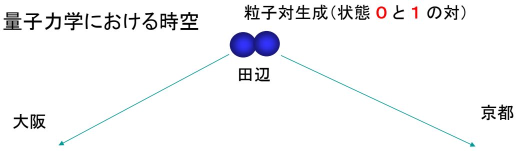
端もなければ中心（特別な点）もない。

これは，物質粒子の性質（あるいは力）のうち，質量（あるいは重力）だけに関係して理解されている次元である。

基本粒子の他の性質（あるいは力）の理解が進めば，宇宙は6次元あるいは10次元．．．．．で記述しなければならなくなるかもしれない。

量子力学における時空

粒子対生成（状態 0 と 1 の対）



測定により，0か1か，どちらかに決まる → ***瞬時*** にこちらも決まる

粒子対を介して，遠く離れた空間がつながっているとしか思えない。

最初から「大阪行きは0」「京都行きは1」（またはその逆）と決まっていたのが，測定によりわかったのではない。（これなら何も不思議ではない。）

測定するまでは，あくまでも 0 と 1 の両方の可能性を含んだ「**重ね合わせの状態**」であり，測定により，0 か 1 かどちらかの状態に収縮する。

遠く離れた2点が、強い相関をもっている！

基本粒子の世界や宇宙の構造までいくと、我々が住んでいる近辺（時空的に近辺）で理解した時間空間の概念では、およそ説明がつかない時空構造が出てくる可能性は、いくらでもあるのである。

地球が丸いことを知ったときどころではないのである。

遠く離れた2つのブラックホールが裏で空間的につながっていて、 ワープ が起きるとか．．．、パラレルワールドが存在するとか．．．、 一概には否定できないのである。

半端な次元と形

整数でない中途半端な次元:　フラクタル

空間の次元:　位置を決めるのに要する座標変数の数（数）

直線や曲線　＝　1次元空間

平面や曲面　＝　2次元空間

物体の次元　？

スケール（長さ）が $\boxed{L\text{倍}}$ になったとき（長さの単位が $\frac{1}{L}$ になったとき）、物体を構成する　点の量　（点集合の**測度**～**重さ**）　が

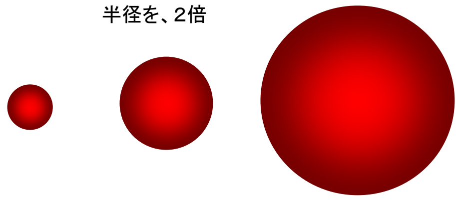
$$\boxed{L^d\ \text{倍}}$$

になるとき、 d 次元物体　という。

球や立方体

半径を、2倍

4倍



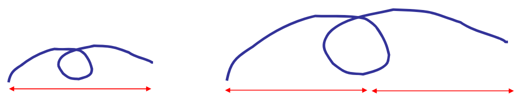
体積は 8＝2^3　倍　，　64＝4^3　倍…になる　＝　3次元物体

円や正方形

面積は 4＝2^2　倍　，　16＝4^2　倍…になる　＝　2次元物体

ヒモ

×2



スケールを2倍にすると，長さは2倍になる　＝　1　次元物体

（大きさのない）点　（大きさがないと見えないから、わざと大きさを持たせてある。）

×2

何倍しても大きさは　0　のまま，変わらない　＝　0　次元物体

しかし、世の中はそれほど単純じゃあない。

半端なヤツがごろごろしているのです。

まずは、先ほどの　指数関数

$$\boxed{L^d}$$

の　d　を、整数でない**連続な数**まで拡張しておきます。

指数関数　$\boxed{a^x}$

$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$2^{-1} = \frac{1}{2}$

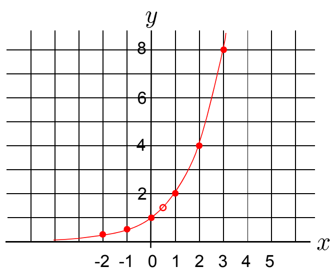
$2^0 = 1$　「何もしない」

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8$

・・・・・・

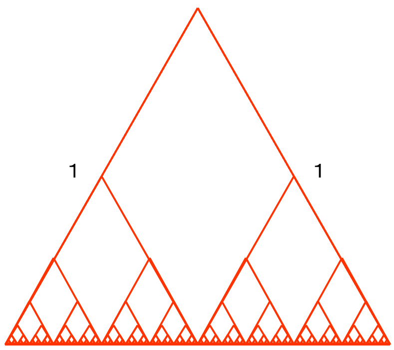


$(2^{0.5})^2 = 2^1$　← 定義 「2乗したら2になる」　参考: $(2^2)^3 = 2^{2\times 3} = 2^6$

$2^{0.5} = \sqrt{2} = 1.4142...$　1 と 2 の間

負の整数乗、さらには中間の連続な変数乗が定義できる。　$\boxed{y = 2^x}$

まずは、「直線の長さ」って、実にあてにならないという話

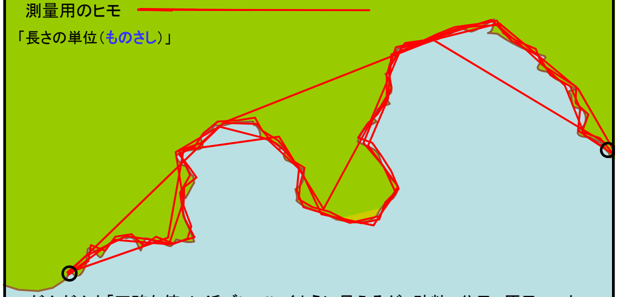


この直線の長さは1？　あるいは　2？

『海岸線の長さは決まるか？』 or 『海岸線は1次元曲線か？』

測量用のヒモ

「長さの単位(ものさし)」

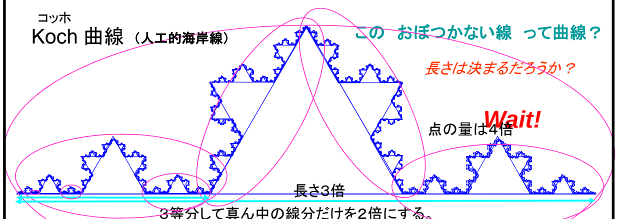


だんだんと「正確な値」に近づいていくように見えるが，砂粒，分子，原子，…と
スケールが限りなく小さくなるにつれて増え，結局，**長さを決めることはできない。**
したがって，海岸線は ***1次元物体*** ではない。じゃあ何次元だろうか？

コッホ
Koch 曲線 （人工的海岸線）

この おぼつかない線 って曲線？

長さは決まるだろうか？



3等分して真ん中の線分だけを2倍にする。

この操作を無限に繰り返して得られる「曲線」？

部分と全体が同じ ＝ 自己相似 （どこまで行っても同じ構造が現れる。）

3^2 ＝ 9倍なら面（2次元）
3倍なら普通の線（1次元）

長さを 3倍 に拡張すれば，重さ（点の量）は 4倍 になる。

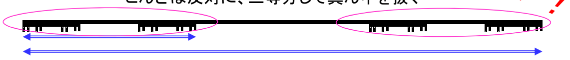
（「ものさし」を1／3にすれば、長さが 4単位 になる。）

→ 4（3と9の間）＝$3^{1.261\ldots}$したがって 1.261. . . 次元 （1と2の間）

フラクタル
『線（1次元）でも面（2次元）でもない中間次元の集合体』

この操作を無限に繰り返して得られる 線？ （カントール集合）

こんどは反対に、三等分して真ん中を抜く Wait!?!



先ほどと同じ意味で、部分と全体が相似である。

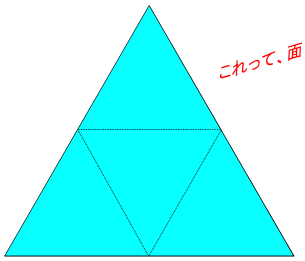
長さを 3倍 にすれば、重さ(点の量)は 2倍 になる。

（ものさしを 1／3 にすれば、長さは 2単位 になる。）

$2=3^{0.6309\ldots}$ したがって 0.6309. . . 次元 （0と1の間）

『 点（0次元） でも 線（1次元） でもない、その中間の集合体 』

正三角形の中抜きの無限繰り返し （シェルピンスキ・ギャスケット）

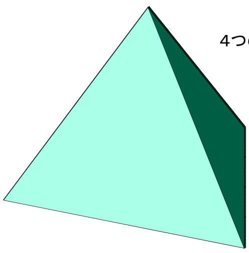


長さを2倍する(＝ものさしが1／2になる)と，重さ(三角形の数)が3 ~~4=~~2^2倍
になるなら、~~普通の平面図形~~。

$3=2^{1.584\ldots}$ 1. 584. . . 次元 （1と2の間）

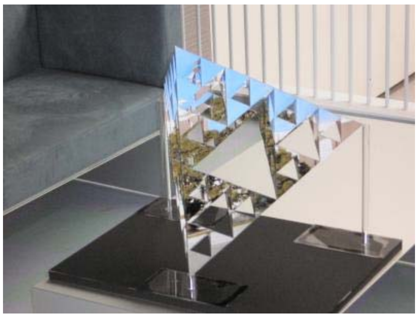
『 線（1次元） でも 面（2次元） でもない、その中間の集合体 』

同様に、正四面体の中抜き繰り返し物体

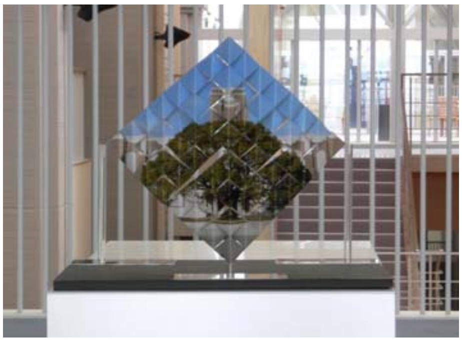


長さ2倍になると、点の量(重さ)が4倍になる。

$4=2^2$ 2次元 （平面と等価）



シェルピンスキイ・ギャスケット



ある方向から見ると、ちょうど過不足なく1枚の写真が見える。
まさに平面（写真）と同じ **2次元量** になっていることがわかる。

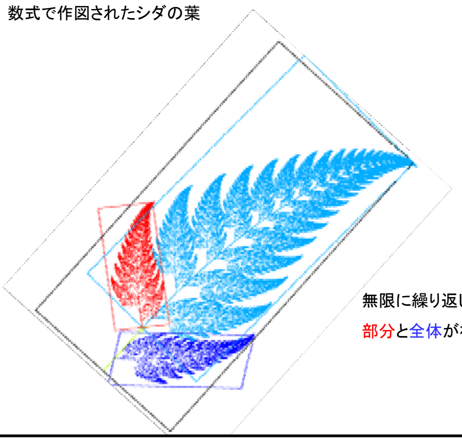
自然界には，これに近い半端次元物体（**フラクタル**）が多数存在する。

樹木の形　立体構造（3次元物体）をしているが、太陽光を効率よく受け取るために、葉っぱは『2次元的』に並んでいる。

川の流域、血管の分布形状、落雷の放電経路. . .

シダの葉、ブロッコリー、. . .

数式で作図されたシダの葉



無限に繰り返したものは、
部分と全体が相似

（Wikipedia）

似たような無限構造

$$1 + rx$$

和の結果を x に代入
無限にくり返す

結果は

$$\underbrace{1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + ...}_{x} = 1 + r\underbrace{(1 + r + r^2 + r^3 + ...)}_{x}$$

全体と部分が同じ

$$x = 1 + rx$$

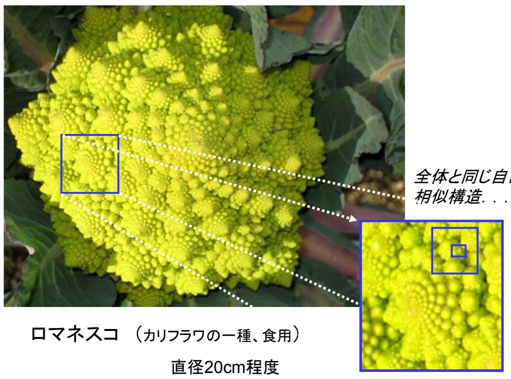
$$x = \frac{1}{1 - r}$$

自 己 相 似 ブロッコリ

（テーブルクロスの模様の拡大化に注目）

（2009/2/15　京都府立植物園にて）

驚きの自然造形 —— フラクタル・ベジタブル



全体と同じ自己相似構造. . .

ロマネスコ　（カリフラワの一種、食用）

直径20cm程度