流体中を運動する物体の『誘導質量』　　　2000/4/1（質問があり一部記述を修正）

大きさをもった物体が静止した流体の中を運動すれば，たとえ粘性のない**完全流体**であっても，必ず物体の周りに流れが生じて運動エネルギーをもつため，あたかも物体は余分な質量を担っているように見える。等速度運動であれば流れも定常であり，流体の運動エネルギーは一定であるため，どんな形の物体であっても完全流体中では抵抗力を受けない（**ダランベールのパラドックス**）が，加速度運動では流体の運動エネルギーを時間的に変化させるための仕事を要し，反作用として物体は流体から**慣性抵抗**を受ける。

密度一定，粘性なしの**非圧縮性完全流体**の**渦なし流**[1]の速度は，以下の 2 つの条件を満たす：

$$\textbf{非圧縮性}\quad \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \qquad \textbf{渦なし}\quad \nabla\times\boldsymbol{v}=0 \tag{1}$$

これは流体力学の最初に出てくる初歩の初歩の問題である。この**速度場**は電荷のない空間での**静電場**と共通な性質をもっていて，スカラ関数の勾配で表すことができるため，**ポテンシャル流**といい，

$$\boldsymbol{v}=-\nabla\Phi\ ,\quad \nabla^2\Phi=0 \tag{2}$$

と表される。（ここでは Φ は位置エネルギーの意味を持たない。）静電場との違いは，以下の 2 点であり，この違いさえ頭に置いておけば，静電場の豊富な知識を，ほぼそのまま援用することができる：

(a) 流れが時間的に変化する場合でも，各瞬間[2]において調和関数のポテンシャルで記述できる。

(b) 導体表面で静電場は表面に垂直であるのに対し，この速度場は，物体に乗っかった立場で見るとき，物体表面では <u>表面に垂直な成分が 0</u> である（法線方向には相対的に静止）。

半径 a の球が，z 方向に速さ u_0 で運動するとする。静電場と対比するには，球は静止していて，逆に流体が $-z$ 方向に一様な速さ u_0 で流れていると考えればよい。一様な電場中に置かれた導体球の問題では，導体表面に対極的に静電誘導される正負の電荷分布が導体外に作る電場を，球の中心に置かれたある大きさの**双極子場**と仮定すれば，導体球境界条件が満たされた。流体中を動く球の周りにできる速度場も，球の前面で押されて流れが発生し，球の後ろに生じる空隙に流れ込むことから，調和関数の**第一候補**は，流れの source と sink が対になった双極子場であると仮定できよう。もし境界条件 **(b)** を満たすように双極子の大きさを決めることができれば，それで問題は解けたことになる。

球の中心である原点に z 方向に向けて置かれた双極子 p が作るポテンシャル場は，球座標で表せば

$$\Phi(r,\theta,\varphi)=\frac{p\cos\theta}{r^2}\quad\to\quad v_r=\frac{2p\cos\theta}{r^3}\ ,\quad v_\theta=\frac{p\sin\theta}{r^3}\ ,\quad v_\varphi=0 \tag{3}$$

である。一方，$-z$ 方向の一様流の，球の表面に垂直な速度成分は $-u_0\cos\theta$ であるから，$p=a^3u_0/2$ と置けば，境界条件 **(b)** が満たされ解が決まる。したがって，速度 $\boldsymbol{u}_0(t)$ で運動する球の周りに出来る速度場[3]は，各瞬間の球の中心を原点，$\boldsymbol{u}_0(t)$ の方向を極軸とする球座標 $(r(t),\ \theta(t),\ \varphi(t))$ を用いると

$$v_r(r,\theta)=\frac{u_0a^3\cos\theta}{r^3}\ ,\quad v_\theta(r,\theta)=\frac{u_0a^3\sin\theta}{2r^3}\ ,\quad v_\varphi(r,\theta)=0 \tag{4}$$

となる。双極子の電場と同様，流れは球のごく近傍に限られている。流体の一様な密度を ρ とすれば，流体に生じる**全運動エネルギー**は，$\rho\boldsymbol{v}^2/2$ を球の外の空間（$r>a$）で積分することにより求められる：

$$E=\frac{\rho a^6{u_0}^2}{8}\iint\frac{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}{r^6}\ 2\pi r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{M{u_0}^2}{4}\ ,\quad M=\frac{4\pi\rho a^3}{3} \tag{5}$$

M は球と同じ体積の流体，すなわち球が押しのけた流体の質量である。

[1] 渦がない完全流体中で新たに渦が発生することはない。（渦は**粘性**により流れが物体表面に粘着することで発生する。）
[2] 非圧縮性流体は剛体と類似の**理想化**であって，変化は一瞬にして全域に伝わるため各瞬間で**定常流**として扱う。
[3] 一様流を除去したこの速度は <u>静止座標系に対する速度</u> であり，この流れのパターンが球の運動に連れて移動していく。

一方，各瞬間の流体の**全運動量**は，以下のように求められる。球対称性から x, y 方向の成分はキャンセルする。z 成分は，まず高さ z の xy-面を通過する全流量を求めればよい。先ほどの速度場を用いれば，$|z| < a$ のとき

$$J(z) = \rho \iint v_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho \int_{\sqrt{a^2-z^2}}^{\infty} (v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta)\ 2\pi x \mathrm{d}x = -\pi(a^2 - z^2)\rho u_0 \tag{6}$$

同様にして，$|z| \geq a$ では

$$J(z) = 0 \tag{7}$$

となる。これを z について積分すれば，球外の流れの全運動量は $-M\boldsymbol{u}_0$ となり，あたかも球が押しのけた分の**仮想の流体球**が速さ u_0 で物体球とは逆向き（下方）に移動していると見なせる。

以上より，流体中を速度 $\boldsymbol{u}_0$ で運動する球は，流体の運動エネルギー $M{u_0}^2/4$ に相当する分だけ余分な慣性質量 $M/2$ をもつと見なすことができる。これを**バーチュアル質量（誘導質量）**という。ただし運動量の結果から分かるように，正確には移動する球が質量 $M/2$ 相当の流体を実体として引きずっていく[4]のではなくて，**運動エネルギーの衣**を着て動くと理解すべきである。等速度運動の場合は，流体の運動エネルギーは一定に保たれるが，加速度運動するときは運動エネルギーが時間とともに変化するため，接触している球は流体に対して仕事をしなければならない。その仕事率（＝力・速度）は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{M{u_0}^2}{4} = \left(\frac{M\dot{\boldsymbol{u}}_0}{2}\right) \cdot \boldsymbol{u}_0 \tag{8}$$

で与えられるから，反作用として球は流体から $M\dot{\boldsymbol{u}}_0/2$ の**慣性抵抗**を受けることになる。

以上より，完全流体中の質量 m の球に重力と浮力が働く場合，運動方程式は

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{u}_0 = -mg + Mg \quad (+\textbf{その他の外力}) \tag{9}$$

となる。Mg は球が押しのけた流体の重さに起因する浮力である。普通，比較的遅い流れでは粘性抵抗は無視できる[5]が，浮力の効果を考慮しなければならないような運動では，同程度の大きさであるバーチュアル質量による慣性抵抗は決して無視することはできない。例えばバネに吊り下げた小球を水中で振動させる場面がそれである。また，浮力により水中を浮上する球状の物体では，気泡のように質量 m を実際上 0 と見なせる場合でも加速度は無限大とはならず，$\dot{u}_0 = 2g$（上向き）となる。

一般の形の物体では，話はこう簡単にはいかない。速度ポテンシャルは，メインには source と sink が対になった双極場であるが，物体の形に応じて 4 重極などさらに高次の補正をしなければ，境界条件 **(b)** を満たすことができない。その結果，一般には物体の加速度と慣性抵抗の方向は平行にはならず，2 つのベクトルの比例係数はテンソル（**誘導質量テンソル**）になる。特に対称性のよい場合，例えば円柱の場合はテンソルは対角型であって，運動の方向が円柱の中心軸の方向，または軸に垂直な方向である場合には加速度と抵抗力は平行になる。このときの誘導質量はやはり物体が押しのけた流体の質量 M に比例し，比例定数は，物体の形と運動の方向によって決まる大きさ 1 の程度の数値になる。この数値が十分小さくて抵抗を無視できるのは，物体の運動によって流体の流れが生じることがない，物体がきわめて細長くて**流線形**になっている場合に限る。

ここでは物体が並進運動する場合に限ったが，回転する場合も回転の速さが時間的に変化するときは定常流ではなくなるため，物体は抵抗（力のモーメント）を受ける。

初学者の知識としては，ここまでの内容で十分でしょう。

[4] もし流体を引きずっていくのであれば，静止系において少なくとも球の運動方向に $M\boldsymbol{u}_0/2$ 程度の全運動量があるはずである。実際には，球の周りの局所的な**変化**（流体の局所的な移動）が球に着いて行くだけである。その意味では，物理量の変化が伝わるだけで，媒質は運ばれない波動現象に似ていると言ってもよい。

[5] ゆっくりとした運動では，粘性抵抗は物体（または流れ）の速度に比例する（**ストークス抵抗**）。

（付録） 一般の形の物体の場合 物体が速度 $\boldsymbol{u}_0$ で運動するとき，表面には境界条件により $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S = \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S$ の流れの source が分布するから，これによって生じる速度場 $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}_0$ に線形依存する。そこで速度ポテンシャルを

$$\Phi = \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{h} = \sum_k u_{0k} h_k \qquad (k = x, y, z) \tag{10}$$

と書く。$\{h_k\}$ は物体の形と姿勢で決まる関数であり，$\boldsymbol{u}_0$ には依存しないから，その各成分が[6]

$$\nabla^2 h_k = 0 \tag{11}$$

を満たしている。流れの速度は $\boldsymbol{v} = -\sum_k u_{0k} \nabla h_k$ で与えられるから（以後では**和の記号は省略**），流体の運動エネルギーは

$$E = \frac{\rho}{2}\, u_{0j} u_{0k} \int (\nabla h_j)\cdot(\nabla h_k)\ \mathrm{d}V = \frac{\rho}{2}\, u_{0j} u_{0k} \int [\nabla\cdot(h_j \nabla h_k) - h_j \nabla^2 h_k]\ \mathrm{d}V \tag{12}$$

で与えられる。物体外の空間では (11) が成り立っており，[ ] の中の第 2 項は 0 である。無限遠方では流体は静止しているとして，第 1 項に対してガウスの公式を適用すれば，

$$E = -\frac{\rho}{2}\, u_{0j} u_{0k} \oint_{\mathrm{S}} h_j \nabla h_k \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S = \frac{\rho}{2}\, u_{0j} u_{0k} \oint_{\mathrm{S}} h_j n_k\ \mathrm{d}S \tag{13}$$

となる。S は物体表面を表し，$\boldsymbol{n}$ は表面から外向き の法線ベクトルである（このため負符号がつく）。ここで $-u_{0k} \nabla h_k = \boldsymbol{v}$ であり，物体表面における境界条件 **(b)** $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{n}$ を用いた。以上より

$$E = \frac{1}{2} M_{jk} u_{0j} u_{0k}\ , \quad M_{jk} = \rho \oint_{\mathrm{S}} h_j n_k\ \mathrm{d}S \tag{14}$$

と書くことができる。係数行列 $\{M_{jk}\}$ のことを**誘導質量テンソル**という。(12) の変形において $j,\ k$ の立場を入れ替えてもよく，そうして得られる結果が任意の $\boldsymbol{u}_0$ に対して (14) と同じになるためには，M_{jk} は**対称**でなければならない。[7]以上より，$\dot{E} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0$ で定義される力の反作用である慣性抵抗は，一般には物体の加速度の方向とは一致しないことがわかる：

$$F_j = M_{jk} \dot{u}_{0k} \tag{15}$$

半径 a の球の場合，$\boldsymbol{h} = a^3 \boldsymbol{r}/2r^3 = -\nabla(a^3/2r)$（点電荷のクーロン場：**脚注**参照）であるから，球の表面で $\boldsymbol{r}/r = \boldsymbol{n}$ であることを用いると

$$M_{jk} = \frac{\rho a}{2} \oint_{\mathrm{S}} n_j n_k\ \mathrm{d}S = \frac{2\pi\rho a^3}{3}\ \delta_{jk} = \frac{M}{2}\ \delta_{jk} \tag{16}$$

となり，既に求めたようにスカラ量である。

全運動量 物体の外側には，表面のすぐ外で境界条件により $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S = \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S = \pm\ u_0\ \mathrm{d}\Sigma$ を満たす湧き出しなしの流れが生じる。$\mathrm{d}\Sigma$ は $\mathrm{d}S$ の $\boldsymbol{u}_0$ 方向への射影で，符号は $\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{n}$ の正負に対応する。定ベクトル $\boldsymbol{u}_0$ の方向を $+z$ 方向とし，流れの z 成分については高さ z の位置における xy 平面（平面が物体を切断するときは，物体表面すぐ外側に沿って**迂回**する。）と $z = -\infty$ で囲まれた半無限領域にガウスの公式を適用すれば，（$x,\ y$ 成分も同様にして）各平面を貫く物体外の全流量は以下となる：

$$J_z(z) = -\rho u_0 \Sigma(z)\ , \quad J_x(x) = J_y(y) = 0 \tag{17}$$

ここで $\Sigma(z)$ は，z の高さにある xy-平面が物体を切断する場合の断面積である。したがって，物体の体積を V，$M = \rho V$ とすれば，球の場合と同様に流体の全運動量は $-M\boldsymbol{u}_0$ であることが分かる。

---

[6] 例えば，$u_{0x} = u_{0y} = 0$ のケースでは $\Phi = u_{0z} h_z$ だから，$\nabla^2 h_z = 0$ でなければならない。

[7] 例えば，$u_{0z} = 0$ のケースで 2 通りの結果を比較すれば，$M_{xy} = M_{yx}$ が得られる。このことから，積分公式

$$\int_{\mathrm{S}\,外} \nabla\times\boldsymbol{h}\ \mathrm{d}V = \oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{h}\times\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S \ \ (=0)$$

により $\nabla\times\boldsymbol{h} = 0$，したがって別のポテンシャル ϕ を用いて $\boldsymbol{h} = -\nabla\phi$，$\Phi = -(\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla)\phi$ の形になると期待され，球や円柱のような楕円体ではこれを示すことが出来る。速度場を静電場ではなく磁束密度とみなすことにより，Meissner 電流で磁束を完全に締め出す**超伝導体**境界条件で考察すれば直接的で分かりやすいが，一般の形の場合，すっきりといかない。

導体球問題　z 方向の一様な電場 E_0 によって誘導される電荷分布による電位を $\phi = p\cos\theta/4\pi r^2$ と仮定する。$\cos\theta = z/r$ として一様な電場による電位とあわせた $pz/4\pi r^3 - E_0 z$ は，$p = 4\pi a^3 E_0$ とすれば，球の表面 $r = a$ で等電位 0 となる。このとき誘導電荷による電場の外向きの法線成分は

$$-\left(\partial\phi/\partial r\right)_{r=a} = 2E_0\cos\theta \tag{18}$$

となる。内部では一様な電場 $-\boldsymbol{E}_0$ が作られて外場を打ち消しているから，表面電荷分布は，ガウスの法則により $3E_0\cos\theta$ となる。（簡単のため以後では静電定数は $\epsilon_0 = 1$ とする。）したがってこの形の電荷分布 $\sigma\cos\theta$ が内部で作り出す電場は，下向きに一様な $\sigma/3$ である。

今の流体中を運動する物体の問題は物体表面が等電位の導体境界条件とは異なるから，流れの場を電束密度 $\boldsymbol{D}$ に対応させて**誘電体**で考える必要がある。外から下向きに一様な流れの場 $-\boldsymbol{D}_0$ がかけられているとする。物体内部に対応する空間では，やはりこれを打ち消す上向きの一様な $\boldsymbol{D}_0$ ができていなければならない。このとき，真電荷が存在しない場合の電束ベクトルの法線成分の連続性により，「物体表面外側で流体速度の法線成分が 0」の境界条件が満たされる。（内部では必ずしも電場は 0 ではなく，表面は等電位面ではない。）球の場合，球内で一様な上向きの分極密度 $\boldsymbol{P}$ がこれを満たすとする。この分極は表面で $P\cos\theta$ の表面分極電荷を生じ，これが下向きに $-\boldsymbol{P}/3$ の一様な**反電場**を生じるから，あわせて $2\boldsymbol{P}/3 = \boldsymbol{D}_0$，すなわち $\boldsymbol{P} = 3\boldsymbol{D}_0/2$ となっておればよい。この結果，表面には $(3/2)D_0\cos\theta$ の分極電荷が分布するが，このうち 1/3 は内部で下向きの反電場を，外部では $D_0\cos\theta$ を満たす外向きの電場を作り，外部にある一様な流れの場 $-\boldsymbol{D}_0$ の法線成分とキャンセルし，流れの境界条件を満たす。

一般の形の物体の場合，こうはいかない。なんとか問題が解かれている**楕円体**の場合，分極が楕円の主軸方向のとき反電場も同じ方向に一様で，分極を P_i として $E_i = -N_i P_i$ となる。N_i を**反電場係数**と言う。[8]一般の方向では重ね合わせにより，N_i を主値とする対角テンソルを $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ として $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\mathcal{N}}\cdot\boldsymbol{P}$ と表され，反電場は一様であるが方向は分極 $\boldsymbol{P}$ の方向とは一致しない。したがって $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\mathcal{L}}\cdot\boldsymbol{P}$ となる。ただし，$\boldsymbol{\mathcal{L}} = 1 - \boldsymbol{\mathcal{N}}$ である。このとき 物体外 の速度ポテンシャルは以下のように与えられる：

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\text{S 内}} \boldsymbol{P}\cdot\nabla'\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V' = -\boldsymbol{D}_0\cdot\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{r})\ ,\quad \phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\text{S 内}}\frac{\mathrm{d}V'}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{19}$$

$\phi(\boldsymbol{r})$ は物体内に一様に分布した電荷が作るポテンシャルであり，物体内では反電場を与えるため

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(0) - \frac{1}{2}(N_x x^2 + N_y y^2 + N_z z^2)\ ,\quad \nabla^2\phi = -1 \tag{20}$$

となる（はずである）。［**注．**(19) は電場 $\boldsymbol{E}$ を与えるポテンシャルだから，物体内では速度 $\boldsymbol{D}$ を与えるものにするには，$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$ の比，$-\boldsymbol{\mathcal{L}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{N}}^{-1}$ 倍しておかなければならず，$\Phi(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{D}_0\cdot\boldsymbol{r}$ となる。］物体外で $\boldsymbol{h} = -\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\cdot\nabla\phi$ は必ずしも $\nabla\times\boldsymbol{h} = 0$ ではないが，ϕ による電場の楕円対称性により積分は 0 となる。

ϕ の連続性から (20) より物体表面で $h_i = N_i x_i/(1-N_i)$ となり，**誘導質量テンソル** (14) が求まる：

$$M_{ij} = \frac{\rho N_i}{1-N_i}\oint_{\mathrm{S}} x_i n_j\,\mathrm{d}S = \frac{\rho N_i}{1-N_i}\int_{\text{S 内}}\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}V = \frac{N_i}{1-N_i}\,\rho V\delta_{ij} \tag{21}$$

超伝導体モデル　誘電体よりも，速度場を磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対応させ，Meissner 効果で磁束を締め出す超伝導体の方が流体の境界条件の定式化はしやすい。下向きに一様な磁場 $-\boldsymbol{B}_0$ が架けられたとき，物体内部の空間でこれを打ち消す上向きの一様な磁束が出来るような Meissner 電流を求めればよい。表面に一様に $\boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{n}$ の電流が流れればよいように思われるが，そうはいかない。先ほどの誘電体モデルと同じく表面（ソレノイドの端）からの**反磁場**を考慮しなければならず，問題は等価である。

[8] 初等的な教科書では見かけないので，反電場係数（反磁場係数でも同じ）の結果だけ書いておこう。楕円体を $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$，$R(s) = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}$ として

$$N_x = \frac{abc}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+a^2)R(s)} \quad \text{etc.} \qquad \left(\text{後に出てくる (20) の}\ \ \phi(0) = \frac{abc}{4}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{R(s)}\right)$$

$N_x + N_y + N_z = 1$ を満たし，球では $N_x = N_y = N_z = 1/3$，細長い円柱では $N_x = N_y = 1/2$，$N_z = 0$，広い円盤では $N_x = N_y = 0$，$N_z = 1$ である。その他の一般的な場合は数値積分で求めるしかない。

一様に電荷が分布した楕円体内の電位 (20)　一般に連続分布では内部でも積分は発散[9]せず特異点はないので，Taylor 展開可能である。楕円体の場合，対称性により xy などの奇関数項はない。

(1) $\underline{\phi(0)\text{ の計算}}$：　球座標 (r', θ', φ') を用いて，まず r' について積分すれば

$$\phi(0) = \int_{\mathrm{S}\,内} \frac{r'^2 \sin\theta' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\theta' \mathrm{d}\varphi'}{4\pi r'} = \frac{1}{8\pi} \oint_{\mathrm{S}} r'^2 \sin\theta' \mathrm{d}\theta' \mathrm{d}\varphi' \tag{22}$$

となる。楕円体の表面 S，すなわち $x'^2/a^2 + y'^2/b^2 + z'^2/c^2 = 1$ は球座標では以下のように表せる：

$$Hr'^2 = 1\ ,\quad H = \frac{\sin^2\theta' \cos^2\varphi'}{a^2} + \frac{\sin^2\theta' \sin^2\varphi'}{b^2} + \frac{\cos^2\theta'}{c^2} \tag{23}$$

$$H = X^2 \cos^2\varphi' + Y^2 \sin^2\varphi'\ ,\quad X^2 = \frac{\sin^2\theta'}{a^2} + \frac{\cos^2\theta'}{c^2}\ ,\ Y^2 = \frac{\sin^2\theta'}{b^2} + \frac{\cos^2\theta'}{c^2} \tag{24}$$

と書き換え，定積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi'}{H} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi'}{X^2 \cos^2\varphi' + Y^2 \sin^2\varphi'} = \frac{2\pi}{XY} \tag{25}$$

を用いれば

$$\phi(0) = 2 \times \frac{abc}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{c \sin\theta' \mathrm{d}\theta'}{\cos^2\theta' \sqrt{(c^2 \tan^2\theta' + a^2)(c^2 \tan^2\theta' + b^2)}} \tag{26}$$

積分変数変換して $s = c^2 \tan^2\theta'$ とおけば，$c\ \mathrm{d}\theta'/\cos^2\theta' = \mathrm{d}s/2\sqrt{s}$，$\sin\theta' = \sqrt{s/(s+c^2)}$ により

$$\phi(0) = \frac{abc}{4} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{R(s)}\ ,\quad R(s) = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)} \tag{27}$$

(2) $\underline{\phi(0,0,z)\text{ の計算}}$：　点 $\mathrm{P}(0,0,z)$ を原点とする球座標で考える。(22) までは同じであるが，r' は

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{(z'+z)^2}{c^2} = 1\ ,\quad Hr'^2 + \frac{2z\cos\theta'}{c^2} r' + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\ |z| < c\ ) \tag{28}$$

で与えられる。この 2 次方程式[10]を解いて，さらに H を c を含んだ関数と見なすことにより

$$r'^2 = \frac{1}{H} + z^2 \left(\frac{2\cos^2\theta'}{c^4 H^2} - \frac{1}{c^2 H} \right) - \frac{2z\cos\theta'}{c^2 H} \sqrt{\frac{z^2 \cos^2\theta'}{c^4 H^2} + \frac{1}{H}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} = \frac{1}{H} + z^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{1}{cH} - \dots \tag{29}$$

平方根を含む第 3 項は，θ' について 0 から π まで積分することで消える。以上より

$$\phi(0,0,z) = \phi(0) + z^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{\phi(0)}{c}\ ,\quad N_z = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+c^2)R(s)} \tag{30}$$

N_x, N_y は分母の c を a, b としたもの。もちろん，一般的な点 (x,y,z) でも計算が煩雑になるだけで結果は変わらない。Taylor 展開の 4 次以上の項がないことは明らかであるが，これは楕円体の対称性による結論である。一般の形では (29) のように x,y,z の 0 次，2 次以外の項が消える必然性はない。

ちなみに外部でのポテンシャルは，上の結果からの推察により次のようになる（はずである ...）：

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{abc}{4} \int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}s}{R(s)} - \frac{x^2}{2} \left[\frac{abc}{2} \int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+a^2)R(s)} \right] - \frac{y^2}{2} \left[\frac{abc}{2} \int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+b^2)R(s)} \right] \\ &\quad - \frac{z^2}{2} \left[\frac{abc}{2} \int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+c^2)R(s)} \right] \qquad \left(\sim \frac{4\pi abc}{3} \frac{1}{4\pi r} \quad \text{for} \quad r \gg a,b,c \right) \end{aligned} \tag{31}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = -z \left[\frac{abc}{2} \int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+c^2)R(s)} \right] \quad \text{etc.（}\xi\text{ が媒介する微分は相殺する。）} \tag{32}$$

ξ は $x^2/(a^2+\xi) + y^2/(b^2+\xi) + z^2/(c^2+\xi) = 1$ で決まる楕円体座標 $\xi(x,y,z)$ である。表面（$\xi = 0$）で内部と滑らかにつながり，外（$\xi > 0$）では $\nabla^2\phi = 0$ を満たす。十分遠方ではクーロン場になっている。

[9] 物体の最大直径を R として，積分に下界と上界，$0 < \phi(\boldsymbol{r}) < R^2/2$ がある。
[10] 解は 2 つあるが，同じ θ', φ' に対するもう 1 つの解（$r' < 0$）は，楕円体上で点 P を挟んで反対側の点に対応する。

（楕円体座標系）　岩波『数学公式 I』　質問が寄せられ説明追加。やや難。必要な部分は怖くない。

与えられた一般的な楕円体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>b>c) \tag{33}$$

に対して，s をパラメータとする曲面族

$$\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}+\frac{z^2}{c^2+s}=1 \tag{34}$$

を定義する。分母をはらって

$$F(s)=(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)-x^2(s+b^2)(s+c^2)-y^2(s+c^2)(s+a^2)-z^2(s+a^2)(s+b^2) \tag{35}$$

と置けば，$F(-a^2)<0,\ F(-b^2)>0,\ F(-c^2)<0$ だから，3 次方程式 $F(s)=0$ は以下の範囲に 3 つの実数解 $\xi,\ \eta,\ \zeta$ をもつ：

$$\xi>-c^2\ >\eta>-b^2>\zeta>-a^2 \tag{36}$$

このとき，ξ は楕円体面族 ($\xi=0$ が元の楕円体)，$\eta,\ \zeta$ はこれに直交する 2 種類の双曲面族を表し，(ξ ,$\eta,\ \zeta$) が新たな直交座標系になる。元の座標系との関係は

$$x^2=\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\ y^2=\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\ z^2=\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \tag{37}$$

また，**ラプラシアン**は

$$\nabla^2=\frac{4}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)}\left[(\eta-\zeta)\ {\partial_\xi}^2+(\xi-\zeta)\ {\partial_\eta}^2+(\xi-\eta)\ {\partial_\zeta}^2\right] \tag{38}$$

で与えられる。ここで

$$R(s)=\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)} \tag{39}$$

として，便宜上，<u>この場限り</u>の簡略記号　　　　（**注．**$R(\eta)$ では平方根の中は負符号をつける。）

$$\partial_\xi=R(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\ \left(=\frac{\partial}{\partial u}\ ,\ \mathrm{d}u(\xi)=\frac{\mathrm{d}\xi}{R(\xi)}\ \text{と変数変換すればよい。}\right)\ \ \text{etc.} \tag{40}$$

を導入したが，今回は使用していない勾配演算子の ξ 成分ではない。

いま，元の座標系で考えれば明らかなように，x 方向に一様な電場がかけられた場合の，

$$\phi_0=x=\pm\sqrt{\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}} \tag{41}$$

がラプラス方程式の自明な解[11]の一つである。この一様場と対をなすもう一つの解，いわば「双極子場」は，常とう手段として

$$\phi_1=\phi_0 f(\xi) \tag{42}$$

とおいて求められる。ラプラス方程式に代入して $\nabla^2\phi_0=0$ を用いることにより

$$2(\partial_\xi\phi_0)(\partial_\xi f)+\phi_0{\partial_\xi}^2 f=0 \tag{43}$$

[11] もう一つ，殆ど自明な解,「クーロン場」がある：

$$ {\partial_\xi}^2\phi=\left(R(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2\phi=0 \quad\to\quad \phi=\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}s}{R(s)} \qquad \left(\sim\frac{2}{r}\quad\text{for}\ \ \xi\gg a^2\right)$$

遠方ではクーロン場になり，楕円体表面が等電位になるため，孤立楕円体導体の静電問題に利用される。

したがって

$$\frac{\partial_\xi(\partial_\xi f)}{\partial_\xi f}+\frac{2\partial_\xi\phi_0}{\phi_0}=0 \quad すなわち \quad \partial_\xi[\ \log(\partial_\xi f)+\log{\phi_0}^2\ ]=0 \tag{44}$$

ここで，ϕ_0 の定義 (41) を用いて $\log{\phi_0}^2$ の ξ を含む項だけ残し，一度積分すれば

$$\log[\ (\xi+a^2)\ \partial_\xi f(\xi)\ ]=\mathrm{constant} \tag{45}$$

となる。最後に $\partial_\xi=R(\xi)(\partial/\partial\xi)$ にもどして，無限遠方で 0 になる一般解

$$\phi_1=\phi_0\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(s+a^2)R(s)} \tag{46}$$

が得られる。この解は原点（$\xi=-c^2$）で微分が発散するので，楕円体の内側には適用できない。

いまは主軸の一つである x 方向の反電場係数を求めたいだけであるから，楕円体の外と内で

$$\phi_{\mathrm{out}}=Cx\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(s+a^2)R(s)}\ ,\quad \phi_{\mathrm{in}}=-E_{\mathrm{in}}x \tag{47}$$

と仮定して，境界条件を満たすよう係数が決まればよい。x 方向の分極密度を P として，遠方では

$$\phi_{\mathrm{out}}\simeq\frac{4\pi abcP}{3}\frac{x}{4\pi r^3} \tag{48}$$

になってほしい。（$4\pi abc/3$ は元の楕円体の体積）実際，$\xi\gg a^2$ では，$\xi\sim r^2$，$R(s)\sim s^{3/2}$ となるから

$$\phi_{\mathrm{out}}\sim\frac{2Cx}{3r^3}\ ,\quad よって\quad C=\frac{abcP}{2} \tag{49}$$

とすればよい。また，楕円体表面（$\xi=0$）の任意の点におけるポテンシャルの連続性から

$$E_{\mathrm{in}}=-C\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(s+a^2)R(s)}=-\left(\frac{abc}{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(s+a^2)R(s)}\right)P \tag{50}$$

これが x 方向に一様に分極したときの表面分極電荷による**反電場**を与えるから

$$N_x=\frac{abc}{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(s+a^2)R(s)}\quad\left(=-\int_0^\infty\frac{b}{\sqrt{s+b^2}}\frac{c}{\sqrt{s+c^2}}\left(\frac{a}{\sqrt{s+a^2}}\right)'\mathrm{d}s\right) \tag{51}$$

となる。後ろの（　）の中の書き替えから

$$N_x+N_y+N_z=\mathrm{Tr}\ \mathcal{N}=1 \tag{52}$$

を満たすことは明らかだろう。（p.4 の (20) においてポアソン方程式 $\nabla^2\phi=-1$ に対応する。）

誘導質量テンソル　$P_i=u_{0i}/(1-N_i)\ \ (i=x,y,z)$ とすれば

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\sum_i u_{0i}h_i(\boldsymbol{r}),\quad h_i(\boldsymbol{r})=\frac{x_i}{1-N_i}\frac{abc}{2}\int_{\xi(\boldsymbol{r})}^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(s+{a_i}^2)R(s)} \tag{53}$$

である（$a_1=a,\ a_2=b,\ a_3=c$）。原理的には $F(s)=0$ の解 $\xi(x,y,z)$ を代入して完了であるが，3 次方程式ゆえ簡単には表せない。物体の表面（$\xi=0$）では，$h_i=[N_i/(1-N_i)]x_i$ となるから，(14) は

$$M_{ij}=\frac{\rho N_i}{1-N_i}\oint_{\mathrm{S}}x_in_j\ \mathrm{d}S=\frac{\rho N_i}{1-N_i}\int_{\mathrm{S}内}\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\ \mathrm{d}V=\frac{N_i}{1-N_i}\ \rho V\delta_{ij} \tag{54}$$

となる。V は物体の体積である。一般の楕円体では，すでに述べたように物体の加速度と慣性抵抗の方向は一致しない。球では $N_x=N_y=N_z=1/3$，円柱（2 次元流）では $N_x=N_y=1/2$，$(N_z=0)$ とおけば，それぞれ $M=\rho V/2$，$M=\rho V$ となり，方向にはよらない。ただし，円柱が軸に対して垂直ではなく斜めに運動する場合は，やはり角度によって慣性抵抗は変わってくる。