

新国際単位系 (SI) (2018/11 改訂, 2019/5/20 実施) に伴う講義ノートの訂正

新しい国際単位系の取り決めにより, K (ケルビン, 絶対温度) と mol (モル, 物質質量) の定義が変わるので, 講義ノート『熱・統計力学 量子力学』 p.2~p.3 の説明を修正しておこう。

温度 K (ケルビン) これまでは, 純粋な水の 3 重点 (気体・液体・固体の 3 相の共存状態) の温度を, 正確に 273.16 K とすることで設定されてきた。今回, 水という特化された物質に頼ることなく, 新たにボルツマン定数 k を正確に

$$k = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

と取り決めること¹で, より普遍的な量であるエネルギーに依拠して設定されることとなる。(注: 結果として, 原理的には水の 3 重点の温度は正確に 273.16 K ではなくなる。)

実際の温度は, kT が現れる量, 例えば Ar ガスなどの希薄の極限 (理想気体) での音速の公式

$$V^2 = \gamma P / \rho = \gamma kT / m \quad (\gamma = 5/3, m \text{ は Ar 原子の質量})$$

を用いて測定できるが, 従来から実用目的のため水の 3 重点を含めて補助的にいくつかの定点の温度が取り決められており, これは (当分の間?) 維持されるらしい。

物質質量 mol (モル) これまでは正確に質量 0.012 kg の純粋な ^{12}C を構成する ^{12}C 原子の量で設定されていたが, 新たにアボガドロ定数 N_A そのものを, 純粋な ^{28}Si 結晶の真球から直接測定された最新の値に基づいて, 正確に

$$N_A = 602\,214\,076\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ mol}^{-1} (= 6.022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \text{ と書く。})$$

と取り決める² (定義値) ことで, 特定の物質や kg の定義に依存せず独立に設定される。すなわち「原子・分子の数」という性格が前面に出ることになる。(注: 結果として 1 mol の ^{12}C の質量は正確に 0.012 kg ではなくなるが, 各原子の原子量 (相対原子質量 A_r) の規準として, $A_r(^{12}\text{C})$ を 12 とすることは, 従来と変わらない。) ボルツマン定数とアボガドロ定数が定義値となることに伴ない, モル気体定数も

$$R = N_A k = 8.314\,462\,618\,153\,24 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

が正確な値となる。「正確」という場合, 有効数字という考え方は適用されない。

以上のほかに, 質量 kg と電流 A (アンペア) の定義も, それぞれ CODATA2017 (脚注 1) によるプランク定数 h と電子の素電荷 e の値,

$$h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}, \quad e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (1 \text{ A} = 1 \text{ C/s})$$

をそれぞれ正確な定義値として取り決めることで, ミクロな法則に基づいて設定されることになる。質量は, MKS 単位で c^2/h の数値に等しい振動数 [Hz] の光子のエネルギーに等価な質量を 1 kg とする。あるいは「 h が正確に上記の値になるように kg の単位を決める」という方が分かりやすいかも知れない。(c は後述の光速。) アボガドロ数も定義値になったのだから, 「 N_A 個の ^{12}C 原子の静止質量の 1000/12 が 1 kg」としてもらった方が概念的には分かりやすかったが, 現在の量子デジタル計測技術の発展により実験が容易になったことから, プランク定数を規準にする原理が採用された。実際の定量には, 複製キログラム原器の代わりに電磁天秤 (『ワットバランス法』) が用いられる。

¹ このことを「定義値とする」という。また「正確に」というのは「これ以上の端数はない」という意味であり, 国際科学会議・科学技術データ委員会で調整・確認された最新の精度の値群 (CODATA 2017) が採用される。一たん定義値とされたものは, MKS の定義が変更されない限り, 今後これ以上に精度が上がることは原理的にあり得ない。これ等の乗除算で定義される定数 (例えば気体定数 $R = N_A k$) を含めて, 有理数であることになんともなく違和感がある。

² 従来は「1 mol の物質中には, 物質によらず一定数個 (アボガドロ数個) の構成粒子が含まれる」であったが, これにより逆に, 積極的に「アボガドロ数個の構成粒子の集団の物質質量を 1 mol とする」ことになる。

教科書との関連では、これによりプランクの熱放射則に現れるシュテファン-ボルツマン定数とスペクトルのピーク位置に関する2つの定数

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.670374419... \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

$$b = \lambda_{\max} T = \frac{1}{4.965114231...} \times \frac{hc}{k} = 2.897771955... \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

も正確な値となる。(注・歴史的には、この2つの定数の実験値から、初めて k と h が求められた。)

人工物で唯一残っていたキログラム原器による質量 kg の設定が廃止され、キログラム原器は博物館入りとなる。また、マクロな電流間に働く力による A の設定³も廃止される。(ただし、 A が基本単位の1つであることは変わらない。もともと電磁気学の歴史では、アンペアやボルトが先住民であった。)この結果、不思議(脚注)な物理定数であった真空の透磁率(磁気定数) μ_0 の値は、正確に $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ ではなくなる。同時に、今まで無限に続く小数の値が「exact」とされてきた真空の誘電率 $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ が正確ではなくなる。

キログラム原器の廃止は、合金の経年変化(劣化)を考えれば妥当な変更である。いずれも上記のマイクロな測定値の方が再現性・普遍性に優れ、現在の理論的到達点においては将来的に値の維持が期待できる。(注:メートル原器の方は、劣化以前の問題として、素朴には温度の特定をどうするかという疑問があるし、重力場(加速度系)でも正しく長さの規準になるか気になるところだ。半世紀以上も前の1960年に真っ先に廃止されている。)すでに時間 s と長さ m の定義は、それぞれ ^{133}Cs (セシウム133)のある特定の2準位間の遷移振動数(今回、測定条件を厳密化)と真空中の光速、

$$\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770 \text{ s}^{-1}, \quad c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

を定義値とすることで設定されてきており、「国際」というより「宇宙的」基準になっている(現SI; 1967, 1983)。しかしながら、時間の定義だけがCsという特化された物質に依拠しているという意味では、今回の改定でやや「時代遅れ」になった感を否めない。

光度 cd (カンデラ) SIで定められている基本単位は全部で7つあり、あと1つ、光源の明るさを表す cd がある。ごく普通のろうそく(candle)の明るさを、およそ 1 cd であるとしてきた歴史を踏まえた量である。単純に光のエネルギー束(ワット, W)であれば基本単位 s , m , kg で組み立てることができるが、明るさは人間の感覚に依存する。視覚感度が最もよい特定の単色光($540 \times 10^{12} \text{ Hz}$, 波長約 555 nm の緑に相当)のエネルギー束を用いて定義され、独立な基本単位とされている。この最高感度の波長以外の光では、同じ強さでも暗くなるため、明るさの比較・換算をして cd 数を決める。最高感度の波長(555 nm)からずれると感度は急激に減少し、可視光の両境界(380 nm と 780 nm)で感度は0になり、赤外線や紫外線になるといくら強くても人間の眼では明るくはない。

従来は、単位立体角(ステラジアン, sr)あたりのエネルギー束が $1/683 \text{ W/sr}$ の所定の光の光源の強さを 1 cd としてきたが、今回、 $540 \times 10^{12} \text{ Hz}$ の光源の発光効率

$$K_{\text{cd}} = 683 \text{ lm/W}$$

を定義値とする形に改められる⁴。これは言わば表現の改訂であって実質的な変更ではない。 lm は、やはり仕事率の次元をもつ光束の単位で、 $1 \text{ cd} = 1 \text{ lm/sr}$ 。

³ 真空の透磁率(磁気定数)が正確に $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ となるよう、同じ強さの平行電流間に働く力から 1 A を決めていた。物理定数 μ_0 は、 4π という数学定数とはもかく、これに 10^{-7} が続くことがどうも気持ち悪かった。今回、 μ_0 と ϵ_0 は、超精密測定が可能な無次元量、微細構造定数 $\alpha = (e^2/2h)c\mu_0 = (e^2/2h)/c\epsilon_0$ から決まる測定値に変わった。

⁴ これを「発光効率」と呼ぶのは少々わかりにくく、ネット上でも用語の定義がどうもすっきりしてしない。この数値は異なる単位間でのエネルギー束の換算値そのものであり、無次元量である。「 1 W の所定の光の光束が 683 lm 」、あるいは「 1 W の電力が 100% 、所定の光の発光に使われたときの光束が 683 lm 」と読めば、効率のニュアンスが分かる。その意味では、最高感度の所定の光以外ではこの比率が小さくなるから、正確には「発光効率の最大値」と呼ぶべきだと思う。原語では efficiency ではなく、efficacy が用いられており、どれだけの「有効な明るさ」が得られるかという意味で「光度能」とでも言うべきか? 「効率」としては、「発光率が K_{cd} の何パーセント」と言う方が分かりやすい。分母の W が消費電力(\approx 赤外線を含めた全放射エネルギー束)の意味で使われるときは、照明器具のエネルギー変換効率になる。

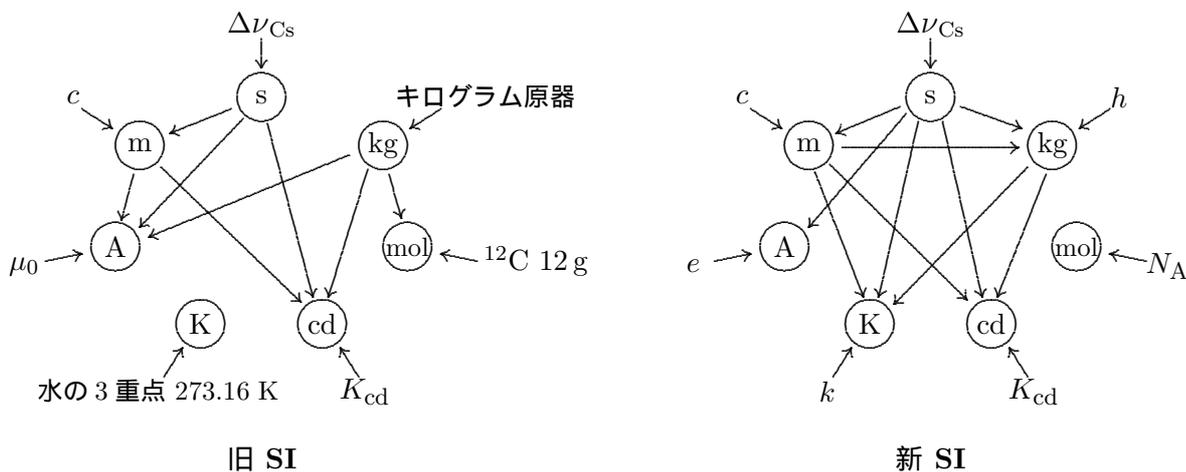
LED 光源は白熱電球にくらべて 10 倍 近く発光効率がよいが、それでもまだ K_{cd} の 10% ~ 20% 程度であると言われている。商品には、「全光束 (lm)」、「最大光度 (cd)」、「消費電力 (W)」等が表示されている。

明るさを表す量として、光に照らされた側の明るさ、すなわち、単位面積あたりに受け取る光束がある。照度といい、lx (ルクス) で表され、 $1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$ である。同じ強さ (消費電力) の光源でも照明器具の原理や構造によって明るさは違うし、光源からの方向や距離によって手元での明るさは異なる。ある方向で $C \text{ cd}$ の光源から $d \text{ m}$ の位置での照度が $C/d^2 \text{ lx}$ である。太陽光のエネルギー流は地球の位置で 1.37 kW/m^2 (太陽定数)、そのうち地表に届くのは 70% の 1 kW/m^2 としても、換算率 K_{cd} では 60 万 ~ 70 万 lx になるが、実際には真夏の晴れのときでも、明るさとしては 10 万 lx 程度であるとされている。太陽の自然光は感度のよい青緑付近にピークをもつが、可視光の占める割合は 1/3 程度、その可視光も感度換算で光度が 1/2 以下に減るためである。⁵

この他に SI に関わる定数ではないが、標準重力加速度 ($9.806 65 \text{ m s}^{-2}$)、標準大気圧 ($1 \text{ atm} = 101 325 \text{ Pa}$)、物理化学の標準状態 ($273.15 \text{ K} / 1 \text{ bar} = 100 \text{ kPa}$) が定義値として取り決められており、標準状態で 1 mol の理想気体の体積 ($273.15R/100 000 = 22.710 954 641 485 575 060 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$ 、1982 年 IUPAC 勧告以前の 1 atm とする場合、 $273.15R/101 325 = 22.413 969 545 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$) が、今回の改訂で気体定数 R とともに正確な値となった。(先の R もそうであるが、正確な値であることを強調するため、実際上は無用な数字を並べてある。「...」のない小数は後続の端数はない。)

以上のように、新しい国際単位系では、6 つのマイクロな物理定数の値と光学的なエネルギー換算値 ($\Delta\nu_{Cs}$, c , h , e , k , N_A , K_{cd}) を正確な定義値として取り決めることにより、7 つの基本単位を設定する形に統一される。

定義値 (外側) と基本単位 の間の依存関係



⁵ よく似た量に被曝放射線の強さで使われる Sv (シーベルト) がある。線源の強さは、線源物体内での 1 秒あたりの原子核崩壊回数を Bq (ベクレル) で表し、崩壊の種類は問わない。基本単位との関係は s^{-1} であり、線源の量に比例する。これに対して受け取る側での被曝エネルギー量を Gy (グレイ, J/kg) で表す。放射線は光と違って透過性が高くて体組織の内部まで達するため、被曝量は体表面あたりではなく、体重 1 kg あたりに吸収されたエネルギー総量で表される。人体に与える影響の違いを考慮して、放射線の種類や粒子のエネルギーによって決められた修正率をかけて算出した有効強度が、Sv (シーベルト) である。人体の治癒能力との兼ね合いでは、一度に多くの細胞 (遺伝子) がダメージを受ければ命にかかわるから、被曝の強さも重要な要因である。被曝の強さは「1 時間あたり」とか「1 年間あたり何々シーベルト」というふうに表示。自然界では宇宙線や鉱物資源から平均して年間 2.4 mSv の放射線を浴びているとされている。医療検査の X 線は 1 回あたりの線量は年間の自然線量程度であるとはいえ、被曝がほんの一瞬であるから非常に強い放射線である。

単位表記の仕方 SI では以上の基本物理定数だけでなく、単位や数値桁数の接頭字 k (キロ) や m (ミリ) などについても取り決めている。単位は 7 つの基本単位に加え、N (ニュートン, kg m/s^2), J (ジュール, $\text{N}\cdot\text{m}$) や W (ワット, J/s) などの力学量をはじめ、特に電磁気学では C (クーロン, A s) や V (ボルト, W/A) などの多くの実用的な単位が、基本単位による組み立て単位として規定されている。これを用いるか基本単位だけで書くか、どちらが分かりやすいかは場合による。この中の rad (強いて言えば、弧長/半径 で m m^{-1}) などは無次元のため、誤解がなければ $\theta = \pi/3$ のように省略できるが、角速度は rad/s と書く方が分かりやすいだろう。また、組立単位では同じ量に複数の表し方があるので注意がいる。(例: 磁気モーメントは、場合に応じて A m^2 と J/T のどちらも使われる。)

さらに、誤読を避けるための表記の仕方として、以下のような取り決めがある：

- (1) 数値 (名) と単位の間にはスペースをあける。
- (2) 数量を表す英字名や変数は普通イタリック (ギリシャ文字では斜体) で書くため、単位はロマン体 (ギリシャ文字では立体形, Ω (オーム), μ (マイクロ) など) で書く。
- (3) 単位は小文字で書くが、固有名詞に基づくものは大文字で書く。(単位名は *joule* や *volt* のように小文字) L (リットル) は、小文字の l では場合により数字の 1 と紛らわしいための例外。
- (4) 異なる単位の間にはスペースか中点を入れ、接頭字と単位の間には入れない。

例えば、p.2 の $\lambda_{\max} T$ で「mK」(メートル-ケルビン) を、「mK」「m K」と書くと意味が違ってくる(ミリケルビンと *m* ケルビン)。このため、間違えないよう中点を用いて m·K としてある。

講義ノート『熱・統計力学 量子力学』も、基本物理定数の定義は修正しない代わりに、これを機会に単位表記は可能な限り SI に準拠して修正した (2019/5)。(というよりも、特に前半部分は過去の講義ノートやメモからコピペをやったので、全体を通して統一できていなかったためである。)

SI は物理学界では高校の教科書も含めてほぼ定着しているが、ISO (国際標準化機構、日本では JIS に相当) では、既定の関数名や数式の表記の仕方も取り決めている。教科書や科学論文ではこれに従うことが望ましいが、単位の表記と比べれば誤読が少ないためか学界ではそれほど徹底していない。まだ個人や出版社の好みによるところが大きく、どれが誤りとは言えないのが現状である。

微分や差分の「d」、「 Δ 」や指数関数の「e」(Napier 数) を立体にしたのは、長さを表す定数や物理定数の素電荷と混在することを気にした個人的好みであるが、これは結果的に理に適っていたらしい。「d」は変数ではなく演算子であり、「e」も特定の値をもつ数値定数⁶であるからである。同じ理由で変分「 δ 」や偏微分の「 ∂ 」、円周率「 π 」なども立体で書くことになっているが、これは準拠していない。TeX の標準ではギリシャ文字の小文字は斜体になっており、これを立体にするには所定のパッケージの読み込みが必要であって、この講義ノートを作成した古い LaTeX209 では難しい。虚数単位もロマン体ということになっているが、これもどうもなじめない。「 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 」より「 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 」の方がよほど美しい。前者の i と sin の間の空白がどうも落ち着かないだけでなく、イタリックの「i」の方が、いかにも虚の世界に相応しい幽玄の雰囲気醸しだしている。

それ以外にも、物理法則では対数関数と言えれば殆ど自然対数であるから、標準の「ln」ではなく、底 e を明記しない「log」のままにしているが、ISO の規定では、e や 10 や 2 など特定の底の対数関数として使うべきではないということらしい。また、記号「 \sim 」は標準では比例 (例えば、係数を省略した $x \sim e^{i\omega t}$) の意味に使われるが、ノートでは「数値的に、おおよそこの程度の大きさである」という評価の意味で (も) 使っている。「 \simeq 」は初見の人もあるようで時々質問が出るが、高校の教科書で使われている「 \approx 」はどうも伝統的な (和製?) 記号のようで、入試問題でしか使ったことがない。

⁶ これに対して c, h, e などの物理定数の方は、学生時代に読んだ小松左京か星新一かの SF で、造物主がこれらの値のチューニングをやっている、ある日気まぐれに h の値をちょっと変えてみたところ..... というのがあったのだが、文庫本は失ったしタイトルも思い出せない。今思うと実に人間原理宇宙論のはしりではないか。