光子の「 $E = c\ |\boldsymbol{p}|$ 」は量子論の関係式ではない？

高校物理の教科書的には,（特殊相対論という表現こそ出てこないが，内容としては）アインシュタインは質量をもたない光の粒子，**光子**を仮定し，自らが導いていた粒子のエネルギー E と運動量 p の相対論的関係式

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2} \tag{1}$$

を適用したという筋書きになっている。質量をもたない（$m = 0$）光子の概念を初めて導入したという意味では確かに「量子論的」であるが，実は，この光（電磁波）のエネルギーと運動量の関係は，相対論以前の古典電磁気学，**Maxwell 方程式**の段階で出てくることなのである。

エネルギー流密度　電荷・電流のない真空中の電磁場を考える。電磁場のエネルギー密度

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{H}^2 \quad \left(= \frac{EH}{c}\ \text{：電磁波の場合}\right) \tag{2}$$

の時間変化に対して Maxwell 方程式

$$\epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \nabla \times \boldsymbol{H}\ ,\quad \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E} \tag{3}$$

を適用すれば，連続の方程式の形

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \boldsymbol{E}\cdot(\nabla \times \boldsymbol{H}) - \boldsymbol{H}\cdot(\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \tag{4}$$

に書くことができる。ここで

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\ ,\quad |\boldsymbol{J}| = EH \quad (= cu) \tag{5}$$

を **Poynting ベクトル**といい，エネルギー流密度を与えることがわかる。[1]

運動量密度　さらに，新たなベクトル

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} = \epsilon_0\boldsymbol{E}\times\mu_0\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{J}}{c^2}\ ,\quad |\boldsymbol{g}| = \frac{|\boldsymbol{J}|}{c^2} \quad \left(= \frac{u}{c}\right) \tag{6}$$

を導入する。以下で見るように $\boldsymbol{g}$ は**運動量の密度**を表す。電磁波の場合に成り立つ $u = c|\boldsymbol{g}|$ を，何らかの「粒子の集団」で成り立つ関係と見なせば，構成粒子に対して標記の関係式「 $E = c|\boldsymbol{p}|$ 」が要請されることになる。

エネルギー密度のときと同様にして，$\boldsymbol{g}$ の時間微分に Maxwell 方程式を適用すれば

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} = (\nabla\times\boldsymbol{H})\times\mu_0\boldsymbol{H} - \epsilon_0\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) \tag{7}$$

となる。ここで，簡便記号 $\partial/\partial x = \partial_x$ etc. で書くことにして

$$-\left[\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})\right]_x = -E_y(\partial_x E_y - \partial_y E_x) + E_z(\partial_z E_x - \partial_x E_z) = (\boldsymbol{E}\cdot\nabla)E_x - \frac{1}{2}\partial_x\boldsymbol{E}^2 \tag{8}$$

さらに，$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$（電荷無し）を用いれば，$(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)E_x = \nabla\cdot(E_x\boldsymbol{E})$ だから

$$-\left[\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})\right]_\alpha = \sum_\beta \partial_\beta\left(E_\beta E_\alpha - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2\delta_{\beta\alpha}\right) \quad (\alpha,\beta = x,y,z) \tag{9}$$

$\boldsymbol{H}$ についても同様である。

[1] c を含む表式以外は，電磁波でない場合にも適用される。例えば円柱導体を流れる定常電流系 $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$。

Maxwell 応力テンソル　対称テンソル

$$T_{\beta\alpha} = \epsilon_0 \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{E}^2 \delta_{\beta\alpha} - E_\beta E_\alpha \right) + \mu_0 \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{H}^2 \delta_{\alpha\beta} - H_\alpha H_\beta \right) \tag{10}$$

を導入する。法線方向が $\boldsymbol{n}$ の面に及ぼす応力が

$$\boldsymbol{P} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{n} \quad \left(P_\beta = \sum_\alpha T_{\beta\alpha} n_\alpha \right) \tag{11}$$

で与えられる。例えば x 方向の電場 $\boldsymbol{E} = (E,\ 0,\ 0)$ の場合，0 でないテンソル要素は

$$T_{xx} = -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \ , \ \ T_{yy} = T_{zz} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \tag{12}$$

であり，電場の方向に張力，垂直な方向に圧力が働く。伝統的に電磁場（のある空間）を連続体（弾性体）と見なす立場では，これを **Maxwell 応力**と呼び，Coulomb 力などの力を説明している。

運動量密度の連続の方程式　このテンソルを用いると (7) は以下のように書ける：

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = -\sum_\beta \partial_\beta T_{\beta\alpha} \ \ \text{あるいは} \ \ \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{T} \tag{13}$$

あるいはガウスの積分公式により，固定された任意の閉曲面 S で囲まれた部分に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathrm{S}\,内} \boldsymbol{g} \mathrm{d}V = -\oint_{\mathrm{S}} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{14}$$

となる。右辺は閉曲面 S にかかる力（ベクトル）であり，$\boldsymbol{g}$ が運動量密度であることが分かる。

電磁波のエネルギーと運動量流　z 方向に進む平面波で $\boldsymbol{E} = (E,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{H} = (0,\ H,\ 0)$ の場合

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{H}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 - \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{H}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{H}^2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

となる。電磁波では $\epsilon_0 \boldsymbol{E}^2 = \mu_0 \boldsymbol{H}^2$ であるから，0 でない要素は $T_{zz}\ (= u)$ のみとなり，進行方向に垂直な断面で，面に垂直な方向に圧力

$$P = u = \frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{H}^2 \tag{16}$$

が働くことが分かる。[2] この場合，$\boldsymbol{g} = (0,\ 0,\ g)$ として，連続の式は先に得られた関係 $u = cg$ を用いて

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} gc \tag{17}$$

となり，運動量の流れの密度が gc，つまり 運動量も z 方向に光速 c で運ばれる ことが分かる。

これが光子（**フォトン**）のエネルギーと運動量の関係「 $E = cp$ 」に対応している。固体中の格子振動の粗密波を音波とみなして量子化した**フォノン**についても，c を音速として同様の関係が成り立つ。（→[**251**]）

[2] 電磁波がいろんな方向に等方的に飛び交う**空洞放射**（光子気体）では，単位時間に単位面積を通過する運動量を計算すれば，平均されて $P = u/3$ になる。光子気体については → 講義ノート**「熱・統計力学　量子力学」**，p.46