量子テレポートとは？ —— Quantum Teleportation

量子ビット　量子ビットは 2 つの固有状態をもつミクロな物理量（例えば電子のスピンの向きや，光子の偏光方向）で表される。その量子固有状態を $|0\rangle, |1\rangle$ とする。量子ビットの場合，$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ のような中間状態，すなわち**重ね合わせの状態**も可能であるが，その場合でも観測すれば 0 か 1 かの固有値が得られることでは，古典ビットと同じである。

量子ビットに対する演算はユニタリ変換で行われる。基底 $|0\rangle, |1\rangle$ を**列ベクトル**

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

で表すとき，ユニタリ変換は 2 行 2 列のユニタリ行列で表される。任意の 2 行 2 列ユニタリ行列は，単位行列と 3 つの Pauli 行列

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad -i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

で表すことができる。量子ビットに対する最も簡単な論理演算は，**NOT** である。これは単に σ_x で与えられ，$\sigma_x|0\rangle = |1\rangle$，$\sigma_x|1\rangle = |0\rangle$ である。一般の状態に対しては以下となる：

$$\begin{aligned} \sigma_0(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (=\text{「何もしない」}) \\ \sigma_x(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &= \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle \\ -i\sigma_y(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &= \alpha|1\rangle - \beta|0\rangle \\ \sigma_z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &= \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \end{aligned} \tag{3}$$

コピー不能の原理（No Cloning Theorem）

『量子ビット媒体（例えば電子）の量子状態を転写することは不可能である』

コピー元の A は任意の状態 $|\psi\rangle$ とし，コピー先の B はハードコピーと同じく最初は必ず所定の白紙状態，例えば $|0\rangle$ と決めておく。「コピー可能」とは，2 量子ビット状態（第 1 ビットが A，第 2 ビットが B）に対して，

$$U\ |\psi\rangle_{\mathrm{A}}\ |0\rangle_{\mathrm{B}} = |\psi\rangle_{\mathrm{A}}\ |\psi\rangle_{\mathrm{B}} \tag{4}$$

となるような[1]，$|\psi\rangle$ に依存しないユニタリ変換 U が存在することである。A の状態が保持されなければ，コピーとは言えない。$|\psi_1\rangle$，$|\psi_2\rangle$ を，任意の 2 つの状態ベクトルとするとき，

$$U\ |\psi_1\rangle_{\mathrm{A}}\ |0\rangle_{\mathrm{B}} = |\psi_1\rangle_{\mathrm{A}}\ |\psi_1\rangle_{\mathrm{B}}\ ,\quad U\ |\psi_2\rangle_{\mathrm{A}}\ |0\rangle_{\mathrm{B}} = |\psi_2\rangle_{\mathrm{A}}\ |\psi_2\rangle_{\mathrm{B}} \tag{5}$$

であり，この 2 つの等式の左辺と左辺，右辺と右辺の内積をとると，$U^\dagger U = I$（単位行列）により

$$\langle\psi_2|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle^2 \tag{6}$$

となる。これは，$\langle\psi_2|\psi_1\rangle$ が 0 または 1，すなわち，$|\psi_1\rangle$，$|\psi_2\rangle$ が「直交するか，同一であるか」という特別な組のときしか成立しない。したがって (4) を満たすようなユニタリ変換 U は存在せず，コピー元を保持したまま量子ビット状態をコピーすることは不可能である。以上のことは，A（B）が多ビット状態のときでも成り立つ。さらに一般化して，使い捨ての補助的ビット状態 C を用いて

$$U\ |\psi\rangle_{\mathrm{A}}\ |00...0\rangle_{\mathrm{C}}\ |00...0\rangle_{\mathrm{B}} = |\psi\rangle_{\mathrm{A}}\ |\psi'\rangle_{\mathrm{C}}\ |\psi\rangle_{\mathrm{B}} \tag{7}$$

を要請してもやはり不可能である。（C は必ずしも A と同じビット長でなくてもよい。）

[1] 右辺に $|\psi\rangle$ に依存する位相変化があってもよく，後の証明はほとんど同じである。

SWAP　A の量子状態を B に「写す」のではなく,「移す」ことは可能である。もし，2 つの量子ビットの状態を入れ替えるユニタリ演算 S があれば，(4) の代わりに

$$S|\psi\rangle_{\mathrm{A}}|0\rangle_{\mathrm{B}} = |0\rangle_{\mathrm{A}}|\psi\rangle_{\mathrm{B}} \tag{8}$$

が成り立つ。演算 S は，2 量子ビット状態の 4 つの基底ベクトルを，それぞれ列ベクトル

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

と対応させるとき，簡単なユニタリ行列（ここでは実直交行列）

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$S|00\rangle = |00\rangle \ , \quad S|01\rangle = |10\rangle \ , \quad S|10\rangle = |01\rangle \ , \quad S|11\rangle = |11\rangle \tag{11}$$

で与えられ，変換は **SWAP** と呼ばれる。（ビット媒体ではなく状態の交換であることに注意。）

以上はユニタリ変換が及ぶ 2 量子ビット間の話である。ユニタリ変換が及ばない任意に遠く離れた 2 点間で量子状態を移すことを，**量子テレポート**といい，以下のように **EPR 現象**を利用して実現することができる。SF の世界ではテレポートは「瞬間移動」と訳されるが，もちろん光速を超えることはあり得ない。あとで見るように量子テレポートにおいても，一連のプロセスの中で古典ビットの**通信**を要するため光速を超えることはなく，瞬時とはいかない。

Bell 基底　2 量子ビット状態の単純基底 $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ から，ユニタリ行列

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

を用いてユニタリ変換により作られる 4 つの直交ベクトル[2]

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= U|00\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2} \ , \quad |\Psi_1\rangle = U|01\rangle = (|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2} \\ |\Psi_2\rangle &= U|10\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2} \ , \quad |\Psi_3\rangle = U|11\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2} \end{aligned} \tag{13}$$

は **Bell 基底**と呼ばれ，いずれも**もつれた状態**である。特に $|\Psi_0\rangle$（または $|\Psi_2\rangle$）の状態にある 2 つの量子ビットは，**EPR 対**[3] と呼ばれる。後の計算のため単純基底を Bell 基底で展開しておこう：

$$\begin{aligned} |00\rangle &= U^{-1}|\Psi_0\rangle = (|\Psi_3\rangle + |\Psi_1\rangle)/\sqrt{2} \ , \quad |01\rangle = U^{-1}|\Psi_1\rangle = (|\Psi_2\rangle + |\Psi_0\rangle)/\sqrt{2} \\ |11\rangle &= U^{-1}|\Psi_3\rangle = (|\Psi_3\rangle - |\Psi_1\rangle)/\sqrt{2} \ , \quad |10\rangle = U^{-1}|\Psi_2\rangle = (|\Psi_2\rangle - |\Psi_0\rangle)/\sqrt{2} \end{aligned} \tag{14}$$

ユニタリ行列だから，$U^{-1} = U^{\dagger}$（ここでは単に転置行列）である。

[2] 4 つのベクトルの並べ方によって，行列 U は別の形に書かれていることもあるが，以下の話の筋は同じである。

[3] $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の対であることは確かであるが，どちらが $|0\rangle$ で，どちらが $|1\rangle$ かは決まっていない。対の一方で状態を観測して $|0\rangle$ と決定した瞬間に，他方の状態は自動的に $|1\rangle$（またはその逆）と決定する（**EPR 現象**）。このように強く相関した多量子状態のことを，**もつれた状態（エンタングルした状態，Entanglement）**という。（EPR 対の**例**：スピン対の全角運動量 0 の状態。ただし，EPR で最初に考察されたのはこれとは別である。→ **雑書庫 [209]**）

量子テレポート　離れた A から B へ量子状態をテレポートするには，受け側である B は単なる白無垢状態ではなくて，秘かに送り側の A との間で**量子もつれ**という契りを交わしておく必要がある。これがトリックのキーポイントである。

EPR 対（例えば $|\Psi_0\rangle$ ）を生成して,「第 1 ビットを A，第 2 ビットを B」へ送り届け，もつれを保持したままにしておく。このように準備しておいてから，A から B へ移したい任意の量子状態

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\ ,\quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{15}$$

と，AB 間の EPR 対状態 $|\Psi_0\rangle = (\ |01\rangle - |10\rangle\ )/\sqrt{2}$ をあわせた 3 量子ビット状態ベクトル，[4]

$$|\psi\rangle\otimes|\Psi_0\rangle = |\psi\Psi_0\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\underline{00}1\rangle - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\underline{01}0\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|\underline{10}1\rangle - \frac{\beta}{\sqrt{2}}|\underline{11}0\rangle \tag{16}$$

の，<u>第 1，2 ビット</u>（A の状態ベクトル）に対して，まず U^{-1} を作用させる。A の単純基底 $|00\rangle$，$|01\rangle$，$|10\rangle$，$|11\rangle$ を Bell 基底で展開して整理しておけば，この手順が見えやすい：

$$\begin{aligned} |\psi\Psi_0\rangle \ &= \ \frac{1}{2}|\Psi_0\rangle\otimes\{-\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle\} \ + \ \frac{1}{2}|\Psi_1\rangle\otimes\{\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle\} \\ &+ \ \frac{1}{2}|\Psi_2\rangle\otimes\{-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\} \ + \ \frac{1}{2}|\Psi_3\rangle\otimes\{\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle\} \end{aligned} \tag{17}$$

こう書いておいて U^{-1} を作用させれば，(14) により右辺は新たな重ね合わせの形になる：

{ } の中は上式の **{第 3 ビット}** を (3) により書き換えた。

$$\longrightarrow\ \ \frac{1}{2}\Big(\ |00\rangle\otimes\{-|\psi\rangle\}\ +\ |01\rangle\otimes\{\sigma_x|\psi\rangle\}\ +\ |10\rangle\otimes\{-\sigma_z|\psi\rangle\}\ +\ |11\rangle\otimes\{-i\sigma_y|\psi\rangle\}\ \Big) \tag{18}$$

次いで，A の 2 量子ビット状態を観測すれば，A の状態は $|00\rangle$，$|01\rangle$，$|10\rangle$，$|11\rangle$ のいずれかに決定し，連動して B の 1 量子ビット状態も，対応する { } の中の状態に決定する。

最後に，A で観測された固有値が『00, 01, 10, 11 のいずれであったか』を A から B へ知らせる。B では，送られてきた**解読キー**の値に従って，対応する 1 量子ビット演算

$$00\ \to\ -\sigma_0,\quad 01\ \to\ \sigma_x,\quad 10\ \to\ -\sigma_z,\quad 11\ \to\ i\sigma_y \tag{19}$$

を自分がもつ {量子ビット} に作用させれば，${\sigma_\nu}^2 = \sigma_0\ (\nu = x, y, z)$ により，いずれの場合でも，B の状態は $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ に変換され，元の状態が復刻される。たとえ第 3 者がこのキーを盗んでも何の役にもたたないし，A では，観測を行って状態が $|00\rangle$，$|01\rangle$，$|10\rangle$，$|11\rangle$ のいずれかに決定すれば元の量子状態の情報は何も残っていない。こうして安全に移送が完了する。

A，B がいかに離れていても，A で状態を観測した**瞬間**に自動的に B の状態も決定することは，EPR 現象[5]そのものである。しかしながら，これを元の状態 $|\psi\rangle$ に復刻する過程で測定値（古典ビット）の**通信**に時間を要するため，決して量子状態の移送が光速を超えることはない。また，テレポートを実施する都度，EPR 対を生成して離れた両者の間で**もつれた契り**を交し直す必要があることは言うまでもない。この準備段階でも対粒子を送り届けるのに有限の時間を要する。離れた 2 点の間で，具体的な量子力学的物理操作を用いたユニタリ変換によって初期設定することは不可能なのである。（それが可能なら，先のユニタリ変換 SWAP でテレポートすればよい。）

---

[4] 多量子ビット状態ベクトルの場合，必要に応じて $|\psi\phi\rangle$ を $|\psi\rangle\otimes|\phi\rangle$ のように書く。$\otimes$ は直積記号。

[5] EPR 現象では，例えば $|\Psi_3\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ であれば,「A で 0（1）であったなら B でも 0（1）」と，瞬時に情報が伝わった（あるいはコピーされた）ように思うかもしれないが，予め「0 を送るか 1 を送るか」を選ぶことができないので，何ら情報を送ったことにはならない。後で観測結果を照合したら相関があることが分かるだけである。

4 量子もつれ

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \frac{1}{2}(|01\rangle_{12} - |10\rangle_{12}) \otimes (|01\rangle_{34} - |10\rangle_{34}) \\
&= \frac{1}{4}(|01\rangle_{14}|10\rangle_{23} - |00\rangle_{14}|11\rangle_{23} - |11\rangle_{14}|00\rangle_{23} + |10\rangle_{14}|01\rangle_{23})
\end{aligned} \tag{20}
$$

は，第 $1,4$ ビット，第 $2,3$ ビットの間にもつれはないが，例えば第 $2,3$ ビットを観測することによって第 $1,4$ ビットの間にもつれを発生させることができる。

再び Bell 基底を用いて展開し

$$
|\Psi\rangle = -|\Psi_0\rangle_{14}|\Psi_0\rangle_{23} + |\Psi_1\rangle_{14}|\Psi_1\rangle_{23} + |\Psi_2\rangle_{14}|\Psi_2\rangle_{23} - |\Psi_3\rangle_{14}|\Psi_3\rangle_{23} \tag{21}
$$

と書き換えて整理しておく。第 $2,3$ ビットに U^{-1} を作用させれば

$$
U^{-1}|\Psi\rangle = -|\Psi_0\rangle_{14}|00\rangle_{23} + |\Psi_1\rangle_{14}|01\rangle_{23} + |\Psi_2\rangle_{14}|10\rangle_{23} - |\Psi_3\rangle_{14}|11\rangle_{23} \tag{22}
$$

となる。（Bell 基底を観測する方法があれば，このユニタリ変換は必要ではない。）ここで，第 $2,3$ ビットを観測すれば，その測定値 $\{00, 01, 10, 11\}$ に応じて，対応する Bell 基底 $\{|\Psi_0\rangle, |\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, |\Psi_3\rangle\}$ のいずれかに決定する。第 $2,3$ ビットはユニタリ変換を作用させることができるように，同じ場所におかなければならないが，第 $1,4$ ビットは任意に離れていてもよく，相互作用することなしに「もつれ」が発生する。