

陽子は B より A が好き？ — アハロノフ-ボーム効果

自由粒子のシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \psi, \quad \mathbf{p} = -i\hbar \nabla \quad (1)$$

に従う波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ の位相を空間の各場所によって変形した, $\psi_1(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t)e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ の従う方程式を求めてみよう。 $\psi = e^{-i\varphi}\psi_1$ に対して $\nabla\psi, \nabla^2\psi$ をていねいに計算すれば

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1 = \frac{1}{2m} [\mathbf{p} - \hbar(\nabla\varphi)]^2 \psi_1 \quad (2)$$

が得られる。ここで, $(\nabla\varphi)$ は ∇ が閉じていて, 後ろの ψ_1 に作用しないことを表している。

一方, ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を用いて $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ で与えられる静磁場の中の, 電荷 q の粒子のハミルトニアンは, 解析力学により以下の式で与えられる:

$$H = \frac{1}{2m} [\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (3)$$

(まあ天下りの的に認めるとして) 量子力学にこれを適用し, ハイゼンベルグ運動方程式を求めてみれば, $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}$ として

$$m\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{p}} - q(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A} = -[\nabla, H] - q(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} = q\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (4)$$

が得られる。ここでも $(\nabla \times \mathbf{A})$ は微分演算が閉じている¹ ことを意味しており, $(\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{B}$ と置くことができるから, 最後の式はちゃんとローレンツ力を表している。

(2) と (3) を比べれば, ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は, 各点において 波動関数に位相の変化

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \text{あるいは} \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (5)$$

をもたらすことになる。 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$ の (単連結な) 領域では, (5) の $\varphi(\mathbf{r})$ は積分経路によらずに一意的に定義されるから, 波動関数 $\psi_1 = \exp[-iEt/\hbar + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\varphi(\mathbf{r})]$ の時間を固定したときの波面は, 位相関数

$$f(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi(\mathbf{r}) = \text{constant} \quad (6)$$

で与えられる。あるいは, 波数ベクトル (したがって波長) が場所によって

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \mathbf{k}'(\mathbf{r}) = \mathbf{k} + \frac{q}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (7)$$

と変形される。基準点 \mathbf{r}_0 で波数 \mathbf{k} の平面波となっているとすれば, 定数ベクトルを加えて $\mathbf{A}(\mathbf{r}_0) = 0$ となるよう調整しておく必要がある。この結果, 量子力学特有の現象 として, たとえ $\mathbf{B} = 0$ であっても $\mathbf{A} \neq 0$ であれば, 以下の例のように波動関数の位相の変化が荷電粒子の運動に影響を与えることがある。これをアハロノフ-ボーム効果 (AB 効果) という。

例 電磁気学の演習問題にあるように, 細長いソレノイドに直流電流を流せば, ソレノイドの内部には一様な磁束密度の磁場ができるが, 外では磁場は 0 である。しかしながら, ソレノイドの外でもベクトルポテンシャルは 0 ではない。内部の磁束を Φ とすると, ソレノイドの中心軸から距離 R の位置では, ベクトルポテンシャルはソレノイドを同心円状に取り巻く形で大きさが

$$A(R) = \frac{\Phi}{2\pi R} \quad (8)$$

となり, ソレノイドの周りを 1 周すれば波動関数には以下の位相のギャップ (位相差) が生じる:

$$\Delta\varphi = \frac{q}{\hbar} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{\hbar} \times 2\pi R A(R) = \frac{q\Phi}{\hbar} \quad (9)$$

検証 電子波の 2 重スリットによる干渉縞実験のような装置を使って, 波動関数がソレノイドの両側に分かれて通過するように設定すれば, ソレノイドのそばを通過後は (2 つの径路で \mathbf{A} の向きが逆だから位相の変化も逆になるため) 差し引きでほぼ 1 周分のこの位相差が生じる。この

¹ 公式, $[\nabla, f]\psi = \nabla f\psi - f\nabla\psi = (\nabla f)\psi$ による。解析力学でも同じ結果が得られる。例 $\dot{p}_x = -(\partial H/\partial x)$

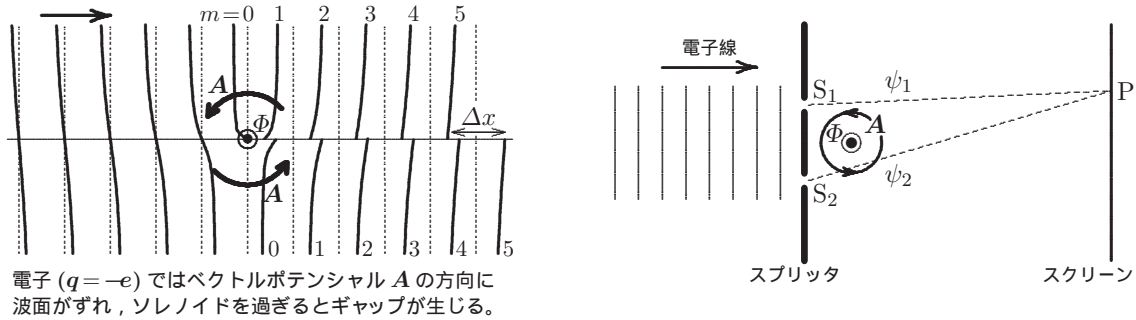
結果，時計周りか逆時計回りかで波面には以下のギャップが現れることになる（→付1）：

$$\Delta x = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \lambda = \frac{e\Phi}{h} \lambda \quad (h = 2\pi\hbar) \quad (10)$$

したがって，2つのスリットから出た円形波の場合，干渉により強め合うためには（ソレノイドから十分離れた位置で）幾何学的な経路差が以下の関係を満たしていなければならない：

$$PS_2 - PS_1 \simeq n\lambda + \Delta x \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (11)$$

このように電子波の干渉縞が磁束 Φ に比例してずれることが予想され，実験で確認された。



$B \neq 0$ の場合は， $\varphi(r)$ が一意的に決まらないため波面の定義は難しいが，波動関数の位相の局所的な変化により，ローレンツ力による古典的な軌道変化を論じることはできる（→付2）。

話は違うが似たような実験：スピン波動関数の2価性の検証 —— キャストは中性子

スピンの x 方向の磁場 B がかかっているとしよう。一つ前のノートにあるようにスピンは x 軸を中心軸とした歳差運動をする。この場合のハミルトニアンは，磁気回転比を γ として

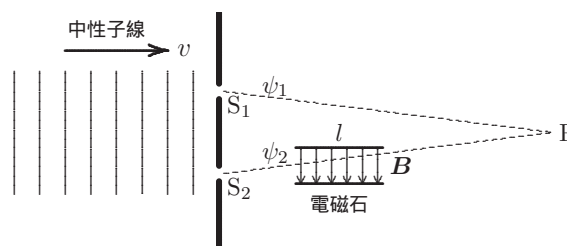
$$H = -\gamma B L_x = -\frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_x \quad (\omega_0 = \gamma B) \quad (12)$$

である。スピンの最初 σ_z の固有状態である $|+\rangle$ 状態にあったとすれば， t 秒後の波動関数は，シュレーディンガー表示により，以下のユニタリ変換で与えられる：

$$|\psi(t)\rangle = e^{i(\omega_0 t/2)\sigma_x} |+\rangle = \cos \frac{\omega_0 t}{2} |+\rangle + i \sin \frac{\omega_0 t}{2} |-\rangle \quad (13)$$

歳差運動の1周期 $t = 2\pi/\omega_0$ で状態は $|+\rangle$ に戻るが，波動関数の符号は逆になっており，位相まで考慮するとスピンの波動関数の周期は2倍である。このことを確かめた実験がある。

スピン $1/2$ であるが，ローレンツ力や AB 効果を気にしなくてもよい中性子を用いる。速さ v の中性子線を2つのビームに分けて，一方の経路にだけ幅 l の電磁石を置く。中性子が磁場の中を通過する時間 $\Delta t = l/v$ の間にスピンが回転する角度 $\Delta\phi = \gamma B \Delta t$ を，磁場の強さ B を変えることにより調節できる。いわばパルス磁場をかけることに相当する。ちょうど歳差運動が1回転するような磁場 ($\Delta\phi = 2\pi$) をかけたときは2つの経路で波動関数の位相が逆になるから，真うしろの位置で観測されていた中性子線は干渉して消え，スピンの2回転だけの磁場 ($\Delta\phi = 4\pi$) をかけたとき初めて元の強さにもどるはずである。磁場の強さを連続的に変えて実験したところ，観測される中性子線の強弱の変化の周期が，まさにこの予想通り2倍になったという。



(付1) AB効果の波面の求め方

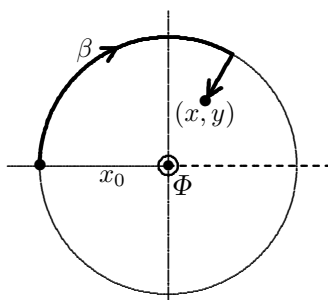
ソレノイドの位置を $x = 0, y = 0$ とする。波は $x = -x_0$ ($\rightarrow -\infty$) で波数 $k (= 2\pi/\lambda)$ の平面波であったとし、 $-x$ 方向から入射するとする。電子 ($q = -e < 0$) の場合、 $x = -x_0$ を基準点としたときのベクトルポテンシャルによる位相の増加は、(5) と (8) により (下の左図参照)

$$\varphi(x, y) = \frac{e\Phi}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^x \frac{y dx'}{x'^2 + y^2} = \pm \frac{e\Phi}{2\pi\hbar} \left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{x}{|y|} \right) = \frac{e\Phi}{\hbar} \frac{\beta}{2\pi} \quad (14)$$

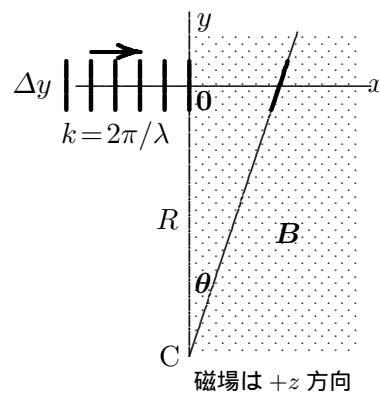
である。(複号 \pm および角 β の正負は積分経路が時計回りか、逆時計回りかに対応) 時間を固定したとき、(6) により位相 $2m\pi (= mk\lambda)$ の波面を表す曲線は、以下の方程式で与えられる:

$$x \pm \frac{a}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{x}{|y|} \right) = m\lambda, \quad a = \frac{e\Phi}{2\hbar k} = \frac{e\Phi}{2h} \lambda \quad (h = 2\pi\hbar) \quad (15)$$

$m > 0$ では、例えば $y \rightarrow \pm 0$ で $\beta \rightarrow \pm\pi$ だから、 $x \rightarrow m\lambda \mp a$ となり、ギャップ $2a$ が生じる。



x 軸の $x > 0$ の部分に切れ目を入れておけば位相差は積分経路によらない。積分経路が切れ目を越える場合には、角度 β に 2π の差が生じる。



(付2) 一様な磁場中での古典的サイクロトロン円運動 (上の右図参照)

$B = \nabla \times A \neq 0$ であっても、 $A(r)$ をある瞬間の波面の法線方向 (位相勾配) に平行になるように選べば、関数 $\varphi(r)$ を局所的に積分で決定することができる。入射位置での波面の中央を原点と決めて、ベクトルポテンシャルをこの位置で $(q/\hbar)A = k$ となるようにし、 $x > 0$ の領域で

$$A_x = \frac{\hbar k}{q} - By, \quad A_y = A_z = 0, \quad \nabla \times A = B \quad (16)$$

と選べば最もわかりやすい。時間を固定したときの波動関数の位相 $f(r)$ の x 方向の変化率は

$$(\nabla f)_x = k - \frac{qB}{\hbar} y = k \left(1 - \frac{y}{R} \right), \quad R = \frac{\hbar k}{qB} \quad (17)$$

となる。粒子の電荷を $q > 0$ ($R > 0$) とすると、波数は上へ行くほど小さく (波長が長く) なるから、波面は右へ傾く。(17) を満たし、入射位置で同位相 $f(0, y) = 0$ である解は

$$f(x, y) = kx \left(1 - \frac{y}{R} \right) \quad (18)$$

となる。等位相面は、ビームの幅を $\Delta y \ll R$ として $y \sim 0$ 付近では、位相値 f をパラメータとして直線群、

$$x \simeq \frac{f}{k} \left(1 + \frac{y}{R} \right) \quad (19)$$

で近似される。直線はすべて f によらず図の定点 C ($y = -R$) を通る。これに対する直交曲線群、つまり波の進路は、 C を中心とする同心円弧群であり、 $\hbar k = p = mv$ とおけば、 $R = mv/qB$ は

古典的なサイクロトロン円運動の半径である。(17) を図の角度 θ に対する変化率に書き換えれば、 $(\nabla f)_x = (R+y)^{-1}(\partial f/\partial\theta)$ より

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} = Rk \left[1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right] \quad (20)$$

となり、 $y=0$ で停留値をとる。この結果、波面の中心が $y=0$ の場合、位相は角度 θ に比例してほぼ一様に変化し、等位相面の上・下端と中点における角度の差は、 $(\Delta y/2R)^2$ 程度にとどまる。したがって、等位相面は平面を保っていることがわかる。

ベクトルポテンシャルは (16) の代わりに、 a を任意の実数として、同じような磁場 B を与える

$$A_x = \frac{\hbar k}{q} - aBy = \frac{\hbar k}{q} \left(1 - \frac{ay}{R} \right), \quad A_y = (1-a)Bx = \frac{\hbar k}{q} \frac{(1-a)x}{R} \quad (21)$$

とすることもできる。 $(x=0$ で $A_y=0$ 、すなわち $(q/\hbar)\mathbf{A} \parallel \mathbf{k}$ になっている。) $x \ll R$ では $A_y \simeq 0$ とみなせば、上と全く同様にして局所的な円弧が得られ、半径は R/a となる。もう少し詳しく計算すると、この半径 R/a の円に沿って距離 s 進んだ位置での位相勾配 (波数) は

$$\frac{k(s)}{k} = 1 - a(1-a)\frac{s^2}{R^2} + O\left(\frac{s^4}{R^4}\right) \quad (22)$$

となり、先ほど結果として古典論が導かれた $a=1$ は、入射波の波数 k の持続という条件 (エネルギー保存則)² に関して、最適な選択になっている。(何か根拠があるにちがいない。)

しかしながら、それにしても結果が有効なのは、等位相面の傾き $\theta (= s/R)$ が微小にとどまっている、局所的な範囲内である。それならば、得られた微小変化を連続につないでいけば、円軌道全体に沿った波面の様子が分かると期待できる。ある瞬間にある位置にある特定の波面に注目し、先ほどと同様にして、その近傍での位相の空間的な構造を調べればよい。上で見たように波面が平面を保っていると見なせるときは、注目する波面に垂直な方向を新たに x' 軸として、(16) と同じ形のベクトルポテンシャルを採用することにより、次々に延長することが出来る。[注・波面の移動にともなって時間的に変動するベクトルポテンシャルを考えているのではない。静磁場だから、ある瞬間の等位相面の空間構造がわかれば、注目した波面が次の瞬間にどう移動するかを知ることができる。]

仮に先ほどの点 C は不動として今度は 点 C を原点 とし、新たなベクトルポテンシャル A' の x' 成分と y' 成分を

$$A'_{x'} = B(2R - y'), \quad A'_{y'} = 0 \quad (23)$$

とすればよい。元の座標成分で表せば

$$\begin{aligned} A'_x(x, y) &= B[2R - (x \sin \theta + y \cos \theta)] \cos \theta \\ A'_y(x, y) &= -B[2R - (x \sin \theta + y \cos \theta)] \sin \theta \end{aligned} \quad (24)$$

であり、

$$(\nabla \times \mathbf{A}')_z = \frac{\partial A'_{y'}}{\partial x} - \frac{\partial A'_{x'}}{\partial y} = B \quad (25)$$

は不変である。つまり、任意の角度 θ に対する A' はたがいにゲージ変換で結ばれている。

どっちみち局所的な位相の変化しか扱えないのだから、別の波面の近傍を考えるとときには、その位置での空間的な位相変化を扱うのに 最も適した A を、ゲージ変換により選べばよい。 $\nabla \times \mathbf{A} \neq 0$ の場合は、そうすることで局所的に $\nabla \varphi = (qB/\hbar)\mathbf{A}$ となるような位相を決定できる。

実際には古典力学的なサイクロトロン円運動は、ベクトルポテンシャルを含むハミルトニアンを調和振動子の形に変形し、コヒーレント状態と呼ばれる重ね合わせの状態を構成することで、($q > 0$ の場合) 時計回りに円運動する波束として表現することができる。(雑書庫 [211])

² ローレンツ力は $q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \perp \mathbf{v}$ を満たすから運動エネルギー、したがって $mv (= \hbar k)$ が保存される。 $a=0$ の場合も波数は維持されるが、 $x > 0$ で A_y が生じて等位相面の法線方向と A とのずれが最大となり、近似は最も悪くなる。 $a \neq 1$ の解は、波動関数がビームの両脇に少しずつはみ出して波が崩れていくことに対応していると思われる。