「もつれ」の正体 —— p.160 の補足と脚注の説明

（脚注再録）「非可換な σ_z と σ_x を，もつれの状態にある EPR 対の A と B で手分けして（**注**）同時に測定したとする。もし，一方におけるスピンの測定（ある固有状態に決まる）により他方の同じスピン成分の状態も瞬時に決まるとすると，A において（B においても），非可換な 2 つの物理量の固有状態が同時に実現されることになり，矛盾が生じるかに見える。」　（**注．**異なる粒子の σ_z と σ_x は可換である。）

EPR パラドックスの記述にスピンを用いたが，2 値をとる物理量を用いて議論する限り，すべてスピンの言葉に言い換えることができる。すべての 2×2 エルミート行列は，2×2 の単位行列とパウリ行列の組で表すことができるからである。なお，パラドックスは「もし，A において σ_z ではなくて σ_x を測定する選択をしたなら，B におけるスピンは測定の前から σ_x の固有状態であったことになり，A で何を選択するかによって B の過去の状態が左右される（**遅延選択実験**）」という言い方をされることもある。

—— 量子力学では「厳密にある時刻に」と同様に,「厳密に同時に」測定されるということはあり得ない。必ず時間のずれ（不確定性）をともなう。この結果，一瞬でも先に実現される測定により「もつれ」が解消するから，脚注の矛盾は生じない。決して,「多少でも時間差があるのならば,あとに測定される方の物理量の固有状態に落着くから矛盾は生じない」のではない。

まず，もつれのある初期状態

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\,|+-\rangle - |-+\rangle\,) \tag{1}$$

を，σ_x の固有ベクトル $|+'\rangle$, $|-'\rangle$ で表せば（以後,「σ_x 表示」という。）

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\,|+'\rangle + |-'\rangle\,),\quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\,|+'\rangle - |-'\rangle\,) \tag{2}$$

$$|+-\rangle = \frac{1}{2}(\,|+'+'\rangle - |+'-'\rangle + |-'+'\rangle - |-'-'\rangle\,) \tag{3}$$

$$|-+\rangle = \frac{1}{2}(\,|+'+'\rangle + |+'-'\rangle - |-'+'\rangle - |-'-'\rangle\,) \tag{4}$$

$$|\psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\,|+'-'\rangle - |-'+'\rangle\,) \tag{5}$$

となる。やはり反平行対のもつれた状態であって，脚注の疑問が生じるわけである。

A における σ_z の測定が先に実現したとしよう。これにより (3) あるいは (4) のいずれかに収縮する。(3)，(4) のそれぞれは σ_x の表示においても，もつれはない。したがって次に B における σ_x の測定で B の状態が $\sigma_x = \pm 1$ のいずれかに収縮しても，A のスピン状態は連動せず，σ_z の固有状態のままである。**要するに**，A では σ_z，B では σ_x の表示をとっておけば，初期状態 (1) は

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(\,|++'\rangle - |+-'\rangle + |-+'\rangle + |--'\rangle\,) \tag{6}$$

と書くことができるから，A で σ_z，B で σ_x を同時に測定することにより，この４つの直交ベクトルの中のどれかに収縮（決定）するだけである。量子力学が不可思議なのは，観測により状態ベクトルの直交成分の <u>いずれか一つが選ばれること</u>，それが <u>確率的であること</u> だけであって，EPR 現象の元のバージョンもここで述べたバージョンも，2 粒子状態空間におけるこの例にすぎない。

EPR パラドックスの原形　2 粒子系の典型的な「もつれた状態」を以下で定義する：

$$|\Psi\rangle = \sum_x |x\rangle \otimes |x-L\rangle \tag{7}$$

2 粒子の状態ベクトルは，単に $|x_1 x_2\rangle$ と書けばよいのであるが，各粒子の変数を明確にするため直積記号を用いて，これを $|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle$ と書いている。この状態では，粒子１で座標を測定して x_1 であったとすれば，粒子２の座標は自動的に $x_1 - L$ と決まる。[1]

[1] ケットベクトル $\sum_x \psi(x)|x\rangle$ が波動関数 $\psi(x)$ の状態に対応し，状態 $|\Psi\rangle$ は $\psi(x_1,x_2)=\delta(x_1-x_2-L)$ である。

一方，運動量表示では，固有ベクトルを

$$|p\rangle = \sum_x \mathrm{e}^{ipx/\hbar}|x\rangle \tag{8}$$

として，規格直交条件

$$\sum_p \mathrm{e}^{-ip(x-x')/\hbar} = \delta(x-x') \qquad (\sum_x \delta(x) = 1 \text{ とする}) \tag{9}$$

を用いれば，この状態は

$$|\Psi\rangle = \sum_p \mathrm{e}^{ipL/\hbar}|-p\rangle \otimes |p\rangle \tag{10}$$

と書くことができる。こんどは，粒子１で運動量を測定して p_1 であったとすれば，粒子２の運動量は $-p_1$ と決まることがわかる。すなわち，$|\Psi\rangle$ は

$$(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)|\Psi\rangle = L|\Psi\rangle\ ,\quad (\hat{p}_1 + \hat{p}_2)|\Psi\rangle = 0 \tag{11}$$

を満たしており，

$$[\hat{p}_1 + \hat{p}_2,\ \hat{x}_1 - \hat{x}_2] = [\hat{p}_1,\ \hat{x}_1] - [\hat{p}_2,\ \hat{x}_2] = 0 \tag{12}$$

により可換な２つの演算子 $\hat{p}_1 + \hat{p}_2$ と $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$ の**同時固有状態**であって，座標表示でも運動量表示でも**もつれた状態**になっている。[2]

ここでもし，粒子１では座標を，粒子２では運動量を**同時に観測**（**注.** 粒子が別だから，この２つは可換で同時測定が可能）して，その値がそれぞれ x_1，p_2 であったとすれば，上記のもつれにより粒子１では座標と運動量が $(x_1,\ -p_2)$，粒子２では $(x_1 - L,\ p_2)$ となり，いずれの粒子についても，それぞれ 非可換な座標と運動量が同時に決定 し，**不確定性原理に反する**かに見える。

これは２粒子の状態ベクトル空間（ヒルベルト空間）を過剰に拡げすぎたために生じた誤謬であり，パラドックスではない。いろいろな選び方ができる直交基底ベクトル系の中から，上記の観測に則して「粒子１では座標，粒子２では運動量」という中間的な表示を採用すれば

$$|\Psi\rangle = \sum_x \sum_p \mathrm{e}^{ip(L-x)/\hbar}|x\rangle \otimes |p\rangle \tag{13}$$

と書くこともできる。つまりこの観測によって，単にこの基底系 $\{|x\rangle \otimes |p\rangle\}$ の中の特定の基底，$|x_1\rangle \otimes |p_2\rangle$ に決定するだけのことであり，何ら矛盾は生じていない。先の２スピン系の説明にあるように，一瞬でも早くいずれか一方の測定が実現した瞬間に,「もつれ」が解消するからだ。

再度 EPR パラドックス　「A で σ_z を観測して $+1$ であれば，その後 B で σ_z を観測すれば必ず -1 である。一方，A での観測がなければ，B では $+1$ にも -1 にもなる。 」 ── 確かにこれはこれで正しいのであるが，こういう言い方をするから，A において観測することが「離れた B での物理的状態（スピンの向き）に瞬時に影響を与える」ように聞こえるのである。EPR 現象は，正しくは「A で $+1$ であったときには B では必ず -1，あるいは全くその逆」という，双方の観測結果に強い相関（からみあい，もつれ）があること，つまり観測によって，必ず $|+-\rangle$ か $|-+\rangle$ かどちらか一方の固有状態になるということにすぎない。この相関そのものは普通の確率現象で経験することと同じである。ただ量子力学の世界では「我々には分からないだけで予め**いずれかに決まっている**」と常識的に考えてはいけないというのが，Bell の不等式の議論の結論である。それでは，A で観測を行ったことは，B での観測に対してどのような影響を与えるのだろうか。

波動関数は物理量を観測したとき何が期待できるか，確定的な場合を含めてその**統計性**を与えるものであり，量子力学はミクロの世界のこの統計性の時間変化を正確に記述する。観測で得ら

[2] 「粒子間の距離は一定に保たれるにもかかわらず運動量が逆向き」というのが，いったいどういう状態か古典力学的にはピンとこない状態である。これに比べて (1) は，角運動量の和がベクトル量として０という意味で分かりやすい状態であり，分光学では磁場をかけても準位が分離しないという意味で **Singlet** 状態と呼ばれている。

れた情報を特定しない場合には，波動関数の代わりに混合状態の密度行列を用いればよい。観測によって変化するのは，波動関数（密度行列）で表されるこの統計性である。つまり，A（B）のスピンの観測によって離れたB（A）のスピンにもたらされるのは，次にB（A）のスピンを観測するとした場合に期待される結果の実現確率の変化であって，物理現象（スピンの向き）の変化ではない。A において，先ず σ_z の観測によってその固有状態になった，一瞬おいて B での観測が実現されたため突然 σ_x の固有状態に変わる，いくら量子力学でもそんな器用なことはできない。「もつれ」は，この統計性に強い「相関」があることを表しているだけであり，遠く離れた 2 つのスピンが物理的に相互作用して「もつれた糸」のようにからみあっているわけではない。

量子力学的な変化は，状態ベクトル（波動関数）の**ユニタリ変換**で表現されるが，観測というマクロな操作は**非可逆**（取り返しがきかない）であって，状態ベクトルのユニタリ変換では表すことができない。このような変化を含めて状態を表現することができるのが**密度行列**である。密度行列を ρ とするとき，物理量 Q の期待値は $\langle Q\rangle = \mathrm{Tr}\ \rho Q$ で与えられる。状態ベクトル $|\psi\rangle$ で記述される量子的状態（**純粋状態**）の密度行列は，$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ で与えられ，期待値は $\mathrm{Tr}\ \rho Q = \langle\psi|Q|\psi\rangle$ となる。また，状態ベクトルがユニタリ変換されれば，密度行列は同じユニタリ行列を用いた行列のユニタリ変換を受けるだけで，純粋状態にとどまる限り密度行列を用いるメリットはない。

今の例では，初期状態は (1) より，（通常の）σ_z を対角行列にする表示で

$$\rho_0 = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

で表される**純粋状態**である。A における σ_z の観測後は，固有状態 $|+\rangle$，$|-\rangle$ への射影演算子

$$P_{\mathrm{A}}^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathrm{A}}^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

を用いた非ユニタリな変換（やはり線形変換で，規格化条件 $\mathrm{Tr}\rho = 1$ は保存される）により，

$$\rho_1 = P_{\mathrm{A}}^{+}\rho_0 P_{\mathrm{A}}^{+} + P_{\mathrm{A}}^{-}\rho_0 P_{\mathrm{A}}^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|+-\rangle\langle+-| \ + \ \frac{1}{2}|-+\rangle\langle-+| \tag{16}$$

になる。この状態は，どうがんばっても 1 つの状態ベクトル $|\psi_1\rangle$ を用いて $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ の形には表すことができない**混合状態**であって，ここで初めて密度行列の有用性が出てくる。これは状態ベクトルの重ね合わせと違って**常識的な意味**で「確率 1/2 で $|+-\rangle$ か $|-+\rangle$ の**いずれかになっている**」ことを表している。

A での観測とは独立に B で観測を行ったときの結果の統計性は，密度行列を A の σ_z についてだけ部分トレース（A についての対角部分を足しあわせる）をとった行列で表すことができ，

$$\mathrm{Tr_A}\ \rho_0 = \mathrm{Tr_A}\ \rho_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| \ + \ \frac{1}{2}|-\rangle\langle-| \tag{17}$$

である。つまり，A でまだ観測が行われていない場合でも，観測は行われたがその結果が特定されていない場合でも，B での観測結果の統計性は全く同じである。つまり A での観測は B の物理的状態に何も影響を与えていない。遠く離れた双方での観測の後，結果を持ち寄って「1 回目の実験では + だった。おたくは？...」と順番に照らし合わせてみれば，初めて上で述べた相関が確認されるだけである。これをしない限り，B では何ら不思議なことは起きていない。