磁場中の荷電粒子のハミルトニアン

1. 正準形式のハミルトニアン

電磁場中での荷電粒子（質量 m，電荷 q）の運動を考える。量子力学に移るためには**正準形式**で書いておかなければならない。先ず，電磁場

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r},t) - \frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t})}{\partial t}\ ,\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \tag{1}$$

を与えるスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて，ラグランジアンを

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) = \frac{m}{2}\,\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \mathcal{U}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)\ ,\quad \mathcal{U} = q\,[\phi(\boldsymbol{r},t) - \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)] \tag{2}$$

とする[1]（ $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$，→『講義ノート』「物理学基礎論 B」）。ここでの 'ポテンシャル部' $\mathcal{U}$ は，

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}} = -q\boldsymbol{A},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}} = -q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = -q\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + (\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\right),\quad \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{r}} = q\nabla\phi - q\nabla(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}) \tag{3}$$

より，ラグランジ方程式において以下の寄与をもたらす：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}} - \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{r}} = -q\left(\nabla\phi + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\,[\nabla(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}) - (\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}] \tag{4}$$

最後の [...] の中はベクトル公式[2]を使えば $\dot{\boldsymbol{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}$ となるから，$\mathcal{U}$ は運動方程式

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\,[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)] \tag{5}$$

の右辺の電磁力を与える。左辺は $\mathcal{L}$ の第 1 項の運動エネルギー $\mathcal{K} = m\dot{\boldsymbol{r}}^2/2$ から導かれる。

保存力でない（$\dot{\boldsymbol{r}}$ に依存する）力を含む今の場合の**正準運動量**は，$\partial\mathcal{K}/\partial\dot{\boldsymbol{r}} = m\dot{\boldsymbol{r}}$ ではなく，

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}} + q\boldsymbol{A} \tag{6}$$

で定義され，ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\phi \tag{7}$$

すなわち，運動エネルギーを正準運動量で表した形になる。(5)，(6) より，ハミルトン方程式

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\boldsymbol{p}}\ ,\quad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\boldsymbol{r}} \tag{8}$$

が成り立つことは，上と同様の計算で示すことができる。

2. シュレーディンガ方程式

量子力学では正準運動量を演算子 $\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla$ とすればよいから，ハミルトニアン (7) は

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{q}{m}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p} + \frac{iq\hbar}{2m}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{q^2\boldsymbol{A}^2}{2m} + q\phi \tag{9}$$

となる。第 3 項の $(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$ は，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\psi = \boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi + \psi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の第 2 項から生じたもので，微分演算が閉じていて波動関数 ψ には作用しないことを意味している。

一様な静磁場 $\boldsymbol{B}$ を与えるベクトルポテンシャルを以下のようにとる：

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}\ ,\quad \nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\ ,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0 \tag{10}$$

[1] $\mathcal{U}$ は**4 元ベクトル** $\mathrm{j} = (\boldsymbol{j}, c\rho)$ と $\mathrm{A} = (\boldsymbol{A}, \phi/c)$ の $\{g_{\mu\nu}\} = \mathrm{diag}(1,1,1,-1)$ を用いた**内積**，$(\mathrm{j},\mathrm{A}) = g_{\mu\nu}j^\mu A^\nu = j^\mu A_\mu$ を空間積分したもの。ここでは電荷密度 ρ は点電荷 q を与える**デルタ関数**で，電流密度は $\boldsymbol{j} = \rho\dot{\boldsymbol{r}}$。

[2] ベクトル公式 $\nabla(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$ で，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{r}$ によらないとすればよい。

$\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{r}$ とは可換，さらに定数だから ∇，すなわち $\boldsymbol{p}$ とも可換であることを考慮して，恒等式

$$(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{p} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{B} \ , \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{11}$$

を用いれば，(9) の第 2 項の磁場によるエネルギーの項は以下となる：

$$\mathcal{H}_B = -\frac{q}{2m} \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{B} \tag{12}$$

したがって，古典電磁気学（**EB 対応**）との比較から角運動量 $\boldsymbol{L}$ はミクロな磁気モーメント

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m} \boldsymbol{L} \tag{13}$$

をもつとみなすことができる。磁場中ではこの磁気エネルギーを考慮しなければならない。

B^2 の大きさである (9) の第 4 項

$$\frac{q^2 \boldsymbol{A}^2}{2m} = \frac{q^2}{8m} (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r})^2 \tag{14}$$

は，数テスラ程度の強磁場でも第 2 項に比べて無視できる。例えば，水素原子の周りの電子の運動では，$q = -1.60 \times 10^{-19}$[C]，$m = 9.11 \times 10^{-31}$[kg]，$\mu \sim \mu_{\rm B} = 9.27 \times 10^{-24}[{\rm Am}^2]$ (ボーア磁子)，$r \sim a_{\rm B} = 5.29 \times 10^{-11}$[m] (ボーア半径)，よって $(q^2 r^2/8m)/\mu \sim 1.06 \times 10^{-5}[{\rm T}^{-1}]$ と評価される。したがって，磁束密度の強さを T（テスラ）で表すとき，第 4 項/第 2 項 $\sim B/10^5$ である。

運動が局所的に拘束されていないならば，r や μ をこのように有限とすることができないため，第 4 項は無視できず，以下の例のようにハミルトニアンは元の形のまま扱わなければならない。

3. ランダウのエネルギー準位

電子を拘束する原子核のクーロン力のような電場のない自由電子を考えよう（$\phi = 0$）。一様な静磁場は z 方向で，$q > 0$ とすれば，電荷は xy-面内で時計回りの**サイクロトロン円運動**を行うが，量子論では特定のエネルギーの状態だけが許される。この場合，ベクトルポテンシャル (10) は

$$A_x = -\frac{B}{2} y \ , \quad A_y = \frac{B}{2} x \ , \quad A_z = 0 \tag{15}$$

である（**対称ゲージ**）。xy-平面運動だけ取り出して

$$P = p_y - qA_y = p_y - \frac{qB}{2} x \ , \quad Q = \frac{1}{qB}(p_x - qA_x) = \frac{1}{2} y + \frac{1}{qB} p_x \tag{16}$$

とおけば，元のハミルトニアン (7) は調和振動子の形

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{m{\omega_{\rm C}}^2}{2} Q^2 \ , \quad [P, Q] = -i\hbar \ , \quad \omega_{\rm C} = \frac{qB}{m} \tag{17}$$

になり，エネルギー準位は，**サイクロトロン周波数** $\omega_{\rm C}$ を用いて以下で与えられることになる：

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{\rm C} \ , \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...) \tag{18}$$

円周に沿う時計回り方向の正準運動量 $p = mv + qA = mv - qBr/2$ に対してボーアの量子条件 $2\pi r = n(h/p)$，$(n = 0, 1, 2, ...)$ を適用すれば，上式で零点振動項 1/2 のない前期量子論的な結論，$mv^2/2 = n\hbar\omega_{\rm C}$，$(\hbar = h/2\pi)$ が得られる。

4. ゲージ不変性

(1) で与えられる電磁場は，任意のスカラー場 $\chi(\boldsymbol{r}, t)$ を用いて電磁ポテンシャルを

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) + \nabla \chi(\boldsymbol{r}, t) \ , \quad \phi'(\boldsymbol{r}, t) = \phi(\boldsymbol{r}, t) - \partial \chi(\boldsymbol{r}, t) \partial t \tag{19}$$

と選んでも変わらない。静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ に付加定数の任意性があるように，一般の場合の電磁ポテンシャルの基準の取り方にはこの任意性がある。この変換を**ゲージ変換**，上の事実を電磁場の**ゲージ不変性**（**ゲージ原理**の例）という。(19) は，時空の諸量の 4 元ベクトル形式[3]

$$\mathrm{x}=(\boldsymbol{r},ct),\quad \mathrm{p}=(\boldsymbol{p},E/c),\quad \mathrm{A}=(\boldsymbol{A},\phi/c),\quad \mathrm{j}=(\boldsymbol{j},c\rho),\quad \nabla^{(4)}=(\nabla,-\partial/c\partial t)\ \ldots.. \tag{20}$$

を用いれば，４元電磁ポテンシャル $\mathrm{A}(\boldsymbol{r},t)$ について以下のようにまとめて書ける：

$$\mathrm{A}'(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{A}(\boldsymbol{r},t)+\nabla^{(4)}\chi(\boldsymbol{r},t) \tag{21}$$

ゲージ変換後のラグランジアンと正準運動量を,（座標は $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}$ のままとして）

$$\mathcal{L}'=\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2-q[\phi'-\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}']\ \left(=\mathcal{L}+q\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\right),\quad \boldsymbol{p}'=\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}=m\dot{\boldsymbol{r}}+q\boldsymbol{A}'\ \left(=\boldsymbol{p}+q\frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{r}}\right) \tag{22}$$

とすれば，ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}'=\boldsymbol{p}'\cdot\dot{\boldsymbol{r}}-\mathcal{L}'=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}'-q\boldsymbol{A}')^2+q\phi'\ \left(=\mathcal{H}-q\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) \tag{23}$$

となり，新しい変数の組 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}')$ と $\mathcal{H}'$ に対して，ハミルトン方程式 (8) が成り立つ。したがって，ゲージ変換は**正準変換**になっている。[座標変数 $\boldsymbol{r}$ は変えないのだから，**母関数**を $W_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}',t)=\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}-q\chi(\boldsymbol{r},t)$ とすればよい。「雑書庫」の「正準変換覚え書き」参照。]

$\chi(\boldsymbol{r},t)$ には，ローレンツ変換との整合性から一定の制約を設けることができる。4 元ベクトルを用いたマクスウェル方程式の整合性の条件 $\nabla^{(4)}\cdot\mathrm{A}=0$ を付加するときは,

$$\nabla^{(4)}\cdot\nabla^{(4)}\ \chi(\boldsymbol{r},t)=\nabla^2\chi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0 \tag{24}$$

でなければならない。［**注.** 4 元ベクトルの内積（· 記号）は，1 ページの脚注にある対角形の計量テンソル $\{g_{\mu\nu}\}=\mathrm{diag}(1,1,1,-1)$ を用いた内積である。］この制約を**ローレンス・ゲージ**という。時間を含まないときは，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ から $\nabla^2\chi(\boldsymbol{r})=0$ となり，特に**クーロン・ゲージ**と呼んでいる。

量子力学　静電場の中の電荷 q の量子力学の場合，シュレーディンガ表示の時間発展因子 $\mathrm{e}^{-itH/\hbar}$ により，波動関数は静電ポテンシャル $q\phi(\boldsymbol{r})$ によって「$-(q/\hbar)\phi(\boldsymbol{r})t$」だけ位相が「増加」する。そこで，波動関数を $\psi_1=\psi\mathrm{e}^{i\eta(\boldsymbol{r},t)}$ と変換してみると,（電磁場のない）自由粒子のシュレーディンガ方程式は，ψ_1 に対して

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}=\left[\frac{1}{2m}(\ \boldsymbol{p}-\hbar(\nabla\eta)\ )^2-\hbar\frac{\partial\eta}{\partial t}\right]\psi_1\ ,\quad \boldsymbol{p}=-i\hbar\nabla \tag{25}$$

となる。ここでも $(\nabla\eta)$ は，∇ が後の波動関数には作用しないことを意味する。この結果をハミルトニアン (7) と比較すれば，以下の対応があることがわかる：

$$\hbar\nabla\eta=q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\ ,\quad -\hbar\frac{\partial\eta}{\partial t}=q\phi(\boldsymbol{r},t)\ ,\quad \text{まとめて}\quad \nabla^{(4)}\eta=\frac{q}{\hbar}\ \mathrm{A}(\mathrm{x}) \tag{26}$$

すなわち，変動する電磁場がある場合には，先ほどの

$$-\frac{q}{\hbar}\phi(\boldsymbol{r})t=-\frac{q}{\hbar}\int^t\phi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}t' \tag{27}$$

から

$$\eta(\mathrm{x})=\frac{q}{\hbar}\int^{\mathrm{x}}\mathrm{A}(\mathrm{x}')\cdot\mathrm{dx}' \tag{28}$$

[3] 電磁場があるときのハミルトニアン (7) は，$\mathcal{H}_1-q\phi=(\boldsymbol{p}_1-q\boldsymbol{A})^2/2m$ と書けば，$\mathrm{p}_1=\mathrm{p}+q\mathrm{A}$ となっている。

へ拡張し，$\eta(\mathrm{x})$ を 4 次元時空の各点 $\mathrm{x} = (\boldsymbol{r}, t)$ における波動関数の位相の増加とみなせる。ゲージ変換 (21) は，これに対してさらに $(q/\hbar)\chi$ の増加をもたらす。つまり**電磁気学のゲージ変換**は，4 次元時空の各点に内在している波動関数の複素平面の座標軸の方向，つまり**位相の基準値**（ゲージ）を角度「$-(q/\hbar)\ \chi(\boldsymbol{r}, t)$」だけ回転する**局所的な座標変換**であると言える。

一般には，さらに広い意味で場の量の座標変換をゲージ変換と呼んでいる。

5. アハロノフ-ボーム効果（AB 効果）

z 軸に沿って細長いソレノイドを置いて，実際上は z 軸上にだけ，$+z$ 方向の磁束 $\varPhi$ が存在し，z 軸以外では $\boldsymbol{B} = 0$ であるような状況を考える。このとき，z 軸上以外の点では磁場はなくてもベクトルポテンシャルは存在する。アンペールの積分定理により，z 軸を取り囲む閉曲線 C に沿ってその接線成分を積分したものは C を貫く磁束に等しく，C を周界とする曲面を $\mathrm{S_C}$ として

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{S_C}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varPhi\ , \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{29}$$

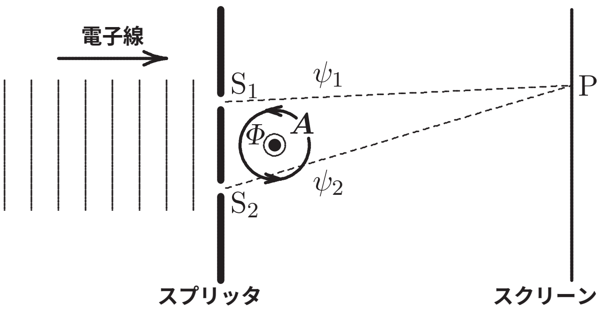
である。ベクトルポテンシャルは z 軸のまわりで回転対称であり，円柱座標 (R, φ, z) を使って，

$$A_R = A_z = 0\ , \quad A_\varphi = \frac{\varPhi}{2\pi R}\ (\neq 0) \tag{30}$$

で与えられ，もちろん $R \neq 0$ で $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ を満たしている。このとき，前節の (28)（$\phi = 0$）によれば，z 軸の周りを 1 周すると電子の波動関数には以下の位相のギャップが生じることになる[4]：

$$\Delta\eta = -\frac{e}{\hbar} \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{e}{\hbar}\ \varPhi \tag{31}$$

電子線の干渉実験で，スプリッタ（2 重スリット）のすぐ後ろにこの細長いソレノイドを置き，$\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ から出た波 ψ_1，ψ_2 が，その両側に分かれて通るようにする。ベクトルポテンシャルは双方の経路で逆向きだから，ψ_1，ψ_2 の位相は通常の幾何学的な経路差 $\mathrm{PS_2}-\mathrm{PS_1}$ によるものに加えて，ソレノイドのそばを通過後は差し引きで（ほぼ）この 1 周分の位相差を生じることになり，後ろのスクリーン上の干渉縞には磁束の強さ $\varPhi$ に比例する歪みが現れる。これを**アハロノフ-ボーム効果（AB 効果）**といい，実験で確認された。つまり，量子力学においては，磁場 $\boldsymbol{B}$ がない所でも，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ があれば電子の振舞いに影響するということである。この意味で，電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ よりも電磁ポテンシャル $\mathrm{A} = (\boldsymbol{A}, \phi/c)$ の方が基本的な量であると考え，電磁ポテンシャルを**ゲージ場**と呼ぶことがある。



この現象は磁気単極（モノポール）の量子化の議論に用いられたことがある。もし磁荷 q_m のモノポールがあれば，ガウスの法則[5]によりこれが置かれた点を中心に全磁束 $\varPhi = q_m$ の等方的な磁場を生じる。これをベクトルポテンシャルで表してみよう。

---

[4] ゲージ変換を一価関数 $\chi(\boldsymbol{r})$ で与えられるものに限れば，$\chi(\boldsymbol{r})$ の選び方でこの位相差が変わることはない。

[5] **磁気の単位系**：ここでは磁荷の単位は **EH 対応**の Wb で，ガウスの法則を $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \rho_m$ としている。磁場の起源を電流とする立場では p.2 のように **EB 対応**が用いられ，磁荷は $q'_m = q_m/\mu_0$，単位は Am となる。

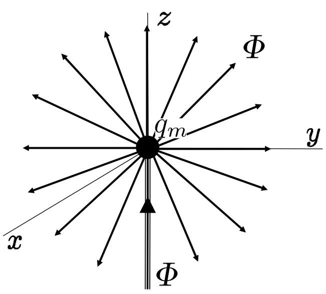
極座標 (r, θ, φ) を用いて z 軸の周りで回転対称であるとみなし，下の右図のように，角度 θ の位置の半径 $r\sin\theta$ の緯度線を閉曲線 C として，C を貫く磁束を $0 \sim \theta$ 間の球面の一部 $\mathrm{S_C}$ の面積（立体角）から計算すれば

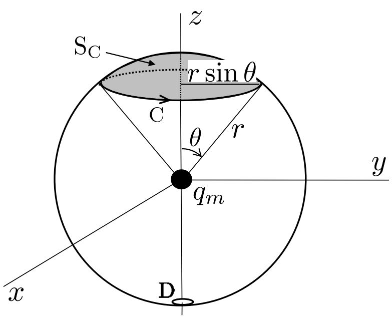
$$(2\pi r\sin\theta)A_\varphi = \frac{1-\cos\theta}{2}\varPhi\ ,\quad (\varPhi = q_m)$$

となり，他の成分は $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ から $A_r = A_\theta = 0$ でよい。しかしながらこの結果は

$$A_r = A_\theta = 0\ ,\quad A_\varphi(r,\theta,\varphi) = \frac{1-\cos\theta}{4\pi r\sin\theta}\,q_m \quad \to\ \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{q_m}{4\pi r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{32}$$

と，正しくモノポール的な等方的磁場 $\boldsymbol{B}$ を与えるにもかかわらず，$\theta = \pi$（z 軸の負の部分）で $A_\varphi = \infty$ となって発散してしまう。ベクトルポテンシャルで表そうとすると，どうしてもこの種の特異性を避けることができない。





この特異性をもつ式 (32) は，z 軸の**負**の部分を取り囲む微小な円周 D（右図を参照）に沿ってアンペールの定理[6]を適用すれば，左図のように z 軸の下方から同じ量 $\varPhi$ の細い磁束の「ひも」が，原点に向かって流れ込んでいる形の解になっていることがわかる。これにより，静磁場の磁力線の湧き出しなしの条件，$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ が満たされている。

この怪しげな「ひも」さえ見え隠れしなければ，単身の磁子として通用するであろう。そこで，「ひも」がばれない条件として，素電荷をもつ電子の波動関数の 1 周あたりの位相差 (31) が，

$$\mathrm{e}^{i\varDelta\eta} = 1\ ,\quad \text{すなわち}\quad \varDelta\eta = \frac{eq_m}{\hbar} = 2\pi n\quad (n = \text{整数}) \tag{33}$$

になっておればよいと推測される。符号の正負は問わない。これがモノポールの**量子化**である。もし「素電荷 e」に対応する「素磁荷 g」があるとしたら，上の式で $n = 1$ と置いた

$$eg = h \qquad (h = 2\pi\hbar) \tag{34}$$

で与えられるに違いない。この g と e の関係は，電磁気量の単位系の取り方によって様相が違ってくる。そこで，無次元量である**微細構造定数** $\alpha = e^2/2\epsilon_0 hc \simeq 1/137$ ($c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ は光速) を用いて，電磁気の単位系にはよらない力学量である**クーロン力**[7]に現れる形での関係，

$$\frac{g}{\sqrt{4\pi\mu_0}} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}\times 68.5n\ ,\quad n = 1 \tag{35}$$

---

[6] 電磁気学では普通，アンペールの積分定理を用いて導かれる同じ形の磁場と電流密度の関係を**アンペールの法則**と呼ぶが，混同はしないだろう。アンペールの定理の適用の際に閉曲線を周界とする曲面はどのようにとってもよい。角度 θ を π に近づけると円周 C は D に，曲面 $\mathrm{S_C}$ は下部に小さな穴の空いた風船状になり，これを外向きに貫く磁束はほぼ $\varPhi$ である。風船をしぼませて円周 D の微小な円にまで**連続に変形**すると，貫く磁束はほぼ 0 に変わってしまうから，これを下から貫く細い「ひも」状の磁束 $\varPhi$ を補わざるを得ない。こうして，どの方向でもよいから磁束 $\varPhi$ の「ひも」が入ってきておれば，あとはどこに閉曲線を考えて曲面を連続に変化させても，磁束の保存則が成り立つ。

[7] 両辺を 2 乗すれば，単位長さの距離での静磁気のクーロン力と静電気のクーロン力の比較になっている。

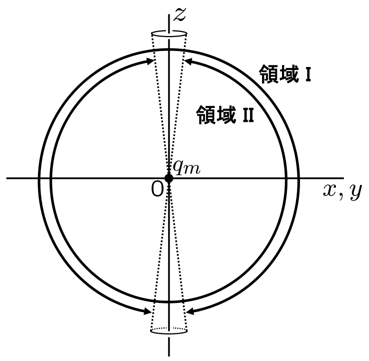
式 (34) を見ると「g は e と**反比例**の関係にある」と言いたいかもしれないが，そうではない。素電荷 e はプランク定数 h と同格の物理定数の 1 つであって，いろんな値をとれる変数ではないからだ。式 (35) を見ると今度は，「g は e に**比例**する」と読みたくもなるが，(34) と (35) は全く同じ内容であり，$g \simeq 4.14\times 10^{-15}\,\mathrm{Wb}$ を与える。

に書き替えれば比は単位系によらない。この関係から，モノポールはもしあるとしたら，現実に観測不能なほど，かけ離れた存在ではないことが示唆される。しかしながら，まれに「観測にかかった」という報告がされたことはあるが，未だにその存在が確信されるには至っていない。

以上の議論には電子の質量は入っていないため，同じ絶対値の素電荷 $+e$ をもつ陽子にもあてはまる。逆に言うなら，素磁荷をもつモノポールが宇宙に 1 つでもあれば，質量が異なる電子と陽子の電荷の絶対値が同じであるという偶然が不思議ではなくなる。ただし，(整数倍ではない) いろんな大きさの「素磁荷」が次々に見つかったりしたら，それこそ元も子もなくなるが.....。

（モノポールの量子化についての補足）—— 「ひも」は退散

z 軸の負の部分を囲む細い円錐を除いた領域を**領域 I**，正の部分を除いた領域を**領域 II** とする。



ベクトルポテンシャルを領域 I では

$$A_r = A_\theta = 0\ ,\quad A_\varphi(r,\theta,\varphi) = \frac{1-\cos\theta}{4\pi r\sin\theta}\ q_m \tag{36}$$

領域 II では

$$A'_r = A'_\theta = 0\ ,\quad A'_\varphi(r,\theta,\varphi) = -\frac{1+\cos\theta}{4\pi r\sin\theta}\ q_m \tag{37}$$

とすると，ともに原点に置かれたモノポールの磁場

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A}' = \frac{q_m}{4\pi r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{38}$$

を与え，それぞれの領域では，原点以外には特異性を持たず正則である。I と II の共通領域では，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}'$ はゲージ変換

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' + \nabla\chi,\quad \chi = \frac{q_m}{2\pi}\ \varphi \tag{39}$$

によって結びつけられている。したがって，それぞれに対応する電子の波動関数は位相差

$$\psi^{\mathrm{II}} = \psi^{\mathrm{I}}\ \exp\left[i\ \frac{eq_m}{2\pi\hbar}\ \varphi\right] \tag{40}$$

をもつ。しかしながら，ψ^{I} も ψ^{II} も同じ磁場（磁束）のもとでの波動関数であり，共通領域内の任意の閉曲線 C が囲む磁束 Φ_{C} は両者で同じである。したがって，C を 1 周したときの位相のギャップ

$$\Delta\eta = -\frac{e}{\hbar}\Phi_{\mathrm{C}}\ ,\quad \Phi_{\mathrm{C}} = \oint_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{41}$$

は互いに等しく，このとき (40) の位相因子は 1 でなければならない[8]。z 軸の周りを 1 周したときには $\varphi = 2\pi$ であるから，$2\pi\hbar = h$ として以下が得られる：

$$eq_m = nh \qquad (\ n = \text{整数}) \tag{42}$$

[8] ベクトルポテンシャルによって増加する位相を除けば，波動関数は自由粒子のものとなり **1 価関数**である。

（付）磁場中を運動する荷電粒子のラグランジアン

（古典的）運動方程式を導く仮想仕事の原理（ダランベールの原理）は,

$$\left(m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - q\boldsymbol{E} - q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} = 0 \tag{43}$$

ここで

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{v}\ ,\quad \text{ただし}\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{v} \tag{44}$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\delta r = -\left(\nabla\phi + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} = -\delta\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\delta\boldsymbol{r} \qquad \left(\textbf{注.}\ \nabla = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\right) \tag{45}$$

p.1 の脚注 2 のベクトル公式を用いると

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = v_i\nabla A_i - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} \tag{46}$$

したがって

$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{A} - [(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}]\cdot\delta\boldsymbol{r} \tag{47}$$

以上より (43) は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}) - m\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{v} + q\delta\phi + q\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} - q\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{A} = 0 \tag{48}$$

ここで

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \tag{49}$$

であることを用いて整理すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A})\cdot\delta\boldsymbol{r}] + \delta\left(-\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + q\phi - q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right) = 0 \tag{50}$$

両端 t_1, t_2 で $\delta\boldsymbol{r} = 0$ として積分すると

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(-\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + q\phi - q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{51}$$

したがって，ラグランジアンと正準運動量，およびハミルトニアンは以下で与えられる：

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - q\phi(\boldsymbol{r},t) + q\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\ ,\quad \boldsymbol{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}} + q\boldsymbol{A} \tag{52}$$

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + q\phi = \frac{1}{2m}[\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)]^2 + q\phi(\boldsymbol{r},t) \tag{53}$$

ハミルトン方程式 (8) の第一式が成り立つことは自明。第二式は，$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{r}$ とは独立とみなして

$$-\nabla\mathcal{H} = \frac{q}{m}\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}) - \frac{q^2}{2m}\nabla\boldsymbol{A}^2 - q\nabla\phi = \frac{q}{m}[(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{p}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})] - \frac{q^2}{2m}\nabla\boldsymbol{A}^2 - q\nabla\phi \tag{54}$$

$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A}$ を代入し，脚注 2（ $(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla\boldsymbol{A}^2/2$ ）を用いて

$$-\nabla\mathcal{H} = q\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) - q\nabla\phi \tag{55}$$

となる。一方，(49) を用いれば

$$\dot{\boldsymbol{p}} = m\dot{\boldsymbol{v}} + q\dot{A} = -q\left(\nabla\phi + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = -q\nabla\phi + q\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) \tag{56}$$

となることから，成り立つことが示される。