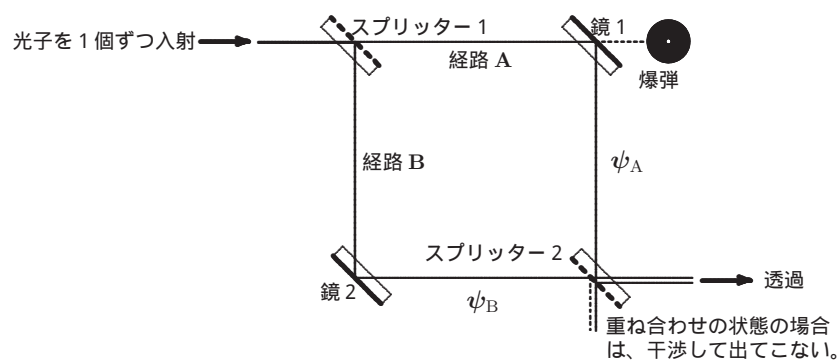


『触らなくても分かるわよ』 — 量子論的非破壊検査

量子力学における「重ね合わせの状態」や「観測」の意味を理解するための好材料である。少々ぶっそうな例えなので、打ち上げ花火の玉にする方が平和かもしれない。先の例のような難しい計算は不要であるが、量子の世界のミステリーの真相を悟る上では、これも大変わかりやすい話である。にわかには結論を納得し難いことが分かるだけで十分であろう。

ここに爆弾（花火玉）の山があり、中には起爆装置（点火装置）が錆び付いて動かない不良品がたくさん混じっている。この山の中から（無駄は承知の上で）確実に爆発する正常品を選び出したい。図のように鏡とスプリッター（ハーフミラー）を組み合わせたマッハ-ツェンダー干渉計と呼ばれる装置（後半に再録）を使う。この装置は、1個の光子が2つの経路を通る可能性を保証された重ね合わせの状態 $\psi_A + \psi_B$ で通過する限りは、波動関数の干渉によりスプリッター2の下方には出てこないよう精密に調整されている。（注：スプリッター2で、ガラスの表面で反射するとき光の位相が反転する。）鏡1に爆弾の起爆装置を連動させ、鏡に光子が当たれば爆弾が正常品なら確実に爆発する仕掛けになっている。



爆弾が正常品の場合は、光子が経路 A を通った（=爆発する）か通らなかったかを確実に判別することができるから、光子の過激な「検知器」となる。すなわち、正常品が置かれたときには波動関数は ψ_A か ψ_B かのどちらかに収縮（決定）し、重ね合わせの状態が変質してしまうから、スプリッター2で干渉は起こらず、光子が確率 $1/2$ で下方に出てくる可能性が生じる。

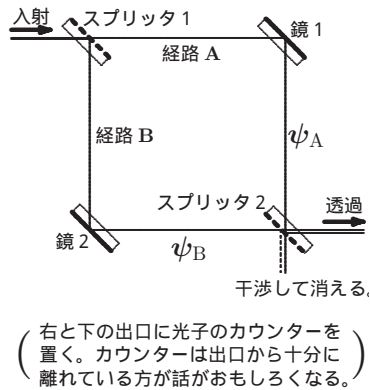
これに反して不良品の場合は、起爆装置は錆び付いていて鏡1は光子があたっても動かず、何もないのと同じで光子の検知器にはなり得ない。すなわち、重ね合わせの状態が維持されるため、光子はスプリッター2の下方では絶対に検出されない。

したがって、光子がスプリッター2の下方で検出されたときには、確実に正常品だということになる。正常な爆弾の中の半分は爆発してしまい、残りの半分のうちの半分は光子がスプリッター2の右に出てくるため不良品と見分けがつかない。しかしながら、正常品のおよそ $1/4$ は確実に正常品であると判定され、爆発させることなく選び出せるわけである。見分けがつかなかった爆弾に対して同じことを繰り返せば、正常品のうち $1/3$ までは選び出すことができる。

これは決して架空の思考実験ではなく、相当する実験が実際に行われ、確認された。しかも、正常な爆弾をほとんど無駄にすることなく見分ける工夫まで凝らして！

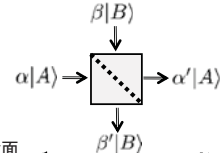
波動関数というのは物質波の考えのような物理的実体ではないから、波動関数が検知器によって吸収されるとか妨害されるとかの直接の物理的影響を受けて変化するのはではない。要は、検知器は「粒子を検知する」「しない」の2つの異なる固有状態をもつものであって、異なる状態 ψ_A, ψ_B を区別できるかどうかは波動関数の挙動にとって本質的である。観測というのは、とりあえず観測者は脇に置いておいて、「いくつかの可能な状態を兼ね備えた重ね合わせの状態が、その中のどれかに決定する過程（状態ベクトルの射影）」と考えておく方が真相に迫りやすくなると思う。

1 光子の干渉 ガラス板の鏡を4枚，正方形の各頂点に45度傾けて並べる。4枚のうち2枚はスプリッタで，光の半分を通し半分を反射する。鏡面で反射する際に，空気中から入・反射するときには波の位相が反転するが，ガラス内で入・反射するときには反転しないとしておく。¹



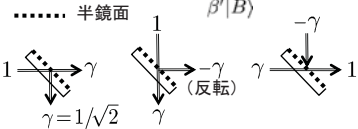
----- プリズム型スプリッタの場合

$$\text{ユニタリ変換: } \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$



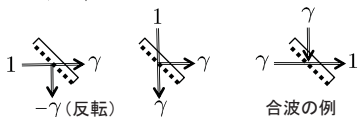
ユニタリ行列の簡単な例

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$



または

$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$



スプリッタ1に光を入射すると2つの経路に分かれる。経路Bを通る光は，スプリッタ2の鏡面で下向きに反射する際には位相が反転（点線で示した光路）するため，経路Aから直進する光と干渉して完全に弱めあい，下には透過しない。波の干渉の規則そのものの応用である。スプリッタ2がない場合は，通常の波であれば同時に右と下の両方に透過する。

それでは，装置の中を通過中の光子が常に1個しかないくらいの，ごく弱い光を入射したらどうなるであろうか？古典的な粒子のイメージで「個々の光子は，必ずどちらか一方の経路を通る」と考えると，光子は各スプリッタで半々の確率で必ず反射するか透過するかのどちらかであるから，スプリッタ2の右にも下にも半々の確率で出てくるはずである。しかしながらこのような弱い光でも下には出て来ない。つまり，個々の光子が，両方の経路を同時に通る可能性をあわせもったまま装置を通過し，スプリッタ2で，光子の集団としてではなく自分自身と干渉を起こすのである（量子論的波動性）。これに対して，もしスプリッタ2がなければ，半々の確率で右か下かのどちらか一方で1個の光子として観測され，経路Aを通ったか，Bを通ったかのどちらか一方であるということになる（粒子性）。

¹ これは話を単純化している。上右図のプリズム型スプリッタをはじめ，一般に光子の経路に対するスプリッタの機能は，確率（古典論ではエネルギー）の保存則によりユニタリ変換である。反射の際の位相変化は偏光状態に依存するが，「半々の確率で分岐」かつ「透過の際は位相は不変」（これも単純化モデルで，半鏡面の金属箔の厚さや減衰などを考慮すると，もっと複雑。偏光方向の変化は，円偏光に分解して考えておけば位相変化で表される。）とすれば，以下の形しかない：

$$U(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\xi^{-1} \\ \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = e^{2i\theta_0} \quad \left(\text{あるいは, } U = \exp \left[\frac{i\pi}{4} (\sigma_x \sin 2\theta_0 - \sigma_y \cos 2\theta_0) \right] \right)$$

プリズム型は幾何学的に対称だからといって，左（ $\alpha = 1, \beta = 0$ ），上（ $\alpha = 0, \beta = 1$ ）のどちらから入射しても反射の際に位相が変わらない，あるいは，どちらから入射しても反射で位相が反転するようなケースは，ユニタリ変換ではあり得ない。（図の干渉計では，右にも下にも通過することになる。）対称性を有するのは， $\xi = \pm i$ の場合である。

簡単なユニタリ行列は，図中の $U(\xi=1)$ で与えられる。これは文中で説明した表裏の極性のある単純化したハーフミラーで象徴的に表現でき，スプリッタが含まれる光学回路を暗算で考察する際に便利である。スプリッタの逆機能としての合波では，例えば $U|A\rangle$ または $U|B\rangle$ の出力を U^{-1} に入力すれば， $U^{-1}U = 1$ により，図の例のように右（下）の一方だけへ出力される。これは可逆性の表れであって一般の ξ でも成り立つ。（ $U^{-1}U$ ではなく UU でもよい。）

追加： $P(\xi) = \begin{pmatrix} \xi^{1/2} & 0 \\ 0 & \xi^{-1/2} \end{pmatrix}$ として， $U(\xi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P(\xi)^{-1} U(1) P(\xi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \xi^{1/2} P(\xi)^{-1} U(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

つまり，まず極性のあるハーフミラー $U(1)$ で考察し，必要なら得られたベクトルを $\xi^{1/2} P(\xi)^{-1}$ でユニタリ変換すればよい。スプリッタを用いた干渉計や光学回路では，分波と合波の組み合わせにより反射の際の位相変化 ξ の具体的な値が顕に出てこないよう工夫されており， $U(1)$ や $U(i)$ のような簡単なモデルで計算してよいようだ。→p.3~p.5

「対称な構造のスプリッタが，なぜ非対称な性質を示すのか？」（記号修正：2018.9）

この謎を解くカギになるのは円偏光の干渉である。量子力学では円偏光の左/右回りを光子のスピンの方に
 に対応させるが，古典電磁波論で考える方が偏光をイメージしやすい。

円偏光 波数ベクトルを $k = k e_3$, 進行方向の座標を r , 位相を $\eta = \omega t - kr + \delta$, k に直交する
 基底ベクトルを e_1, e_2 とし，波に直面して左/右回りの円偏光対を， e_2 の位相を $\pi/2$ ずらして

$$e_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \mp i e_2)e^{i\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(e_1 \cos \eta \pm e_2 \sin \eta) + i(e_1 \sin \eta \mp e_2 \cos \eta)] \quad (1)$$

で構成する。(古典電磁波論では実部を採用する。) e_1 方向からの角度が θ の方向の直線偏光は以下
 で与えられる：

$$e_{\theta} = (e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta)e^{i\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\theta} e_+ + e^{-i\theta} e_-) \quad (2)$$

逆に，角度 θ_0 を偏光方向の規準（同じ角度位置でも，両方で位相は逆）として円偏光対を

$$e_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pm i\theta_0}(e_1 \mp i e_2)e^{i\eta} \quad (3)$$

で再定義しておく。円偏光は，ベクトルの方向の変化が位相の変化（座標または時間の変化に等
 価）に対応するので分かりやすいが，位相と角度の関係が左 / 右回りの円偏光で逆になる。

鏡面反射 まずはハーフミラーではなく完全な鏡面を考える。鏡面の法線ベクトルを n とし，
 入射面に垂直な方向に $e_2 = n \times e_3$ (s 偏光ベクトル)，入射面内に $e_1 = e_2 \times e_3$ (p 偏光ベクトル)
 をとる。導体境界条件 ([231-1]) として鏡面に平行な電場成分が 0 とすると，反射の際に e_2
 ベクトルは不変 ($e'_2 = e_2$) であるが，成分が符号を変え， e_1 ベクトルは，反射前後とも進行方
 向に向かって見る限り成分は不変であるが，ベクトルの方向が変わる。この結果，直線偏光では

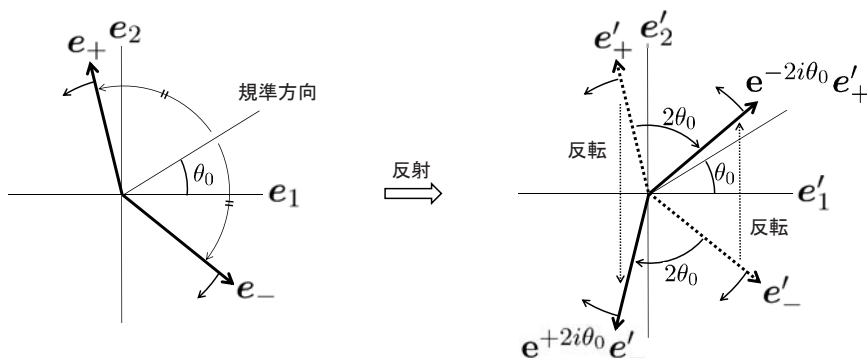
$$e_{\theta} = (e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta)e^{i\eta} \rightarrow (e'_1 \cos \theta - e'_2 \sin \theta)e^{i\eta} = e'_{-\theta} \quad (4)$$

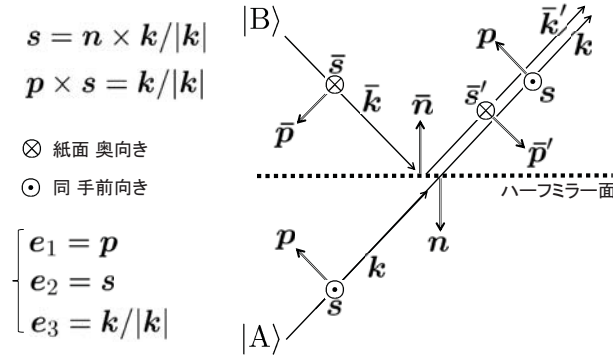
となり，位相ではなく偏光方向が変わるので扱いにくい。(注・垂直入射に近いときは， $e'_1 \simeq -e_1$ だ
 から，実験室系では θ によらず電場の向きの逆転と見ることができる。)

これに対して円偏光は，反射により

$$e_{\pm} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pm i\theta_0}(e'_1 \pm i e'_2)e^{i\eta} = e^{\pm 2i\theta_0} e'_{\mp} , \left(e'_{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pm i\theta_0}(e'_1 \pm i e'_2)e^{i\eta} \right) \quad (5)$$

と変換され，互いに入れ替わる（スピンの反転）とともに，位相（光学距離）の変化が加わる。こ
 こで右辺の e'_{\mp} は， e_{\mp} の反射後の行き先ではなくて， e_{\mp} を，座標を維持したまま反射後の (e'_1, e'_2)
 平面にコピーしたベクトルの意味である（下図参照）。このように見たときの位相変化は，その瞬
 間のベクトルの方向にはよらず，最初に決めた規準 θ_0 だけで決まるから扱いやすい。人為的な選
 択による θ_0 が顔を出すことは気持ちが落ち着かないが，直線偏光で分かるように物理的には何も
 影響を与えてはいない。この関係は入射方向や入射角には依存せず， θ_0 を決めておけば，入射が
 |A> 側からでも |B> 側からでも位相変化の表式は変わらず，その意味では完全に対称である。





可干渉性 スプリッタの合波機能として透過光と反射光の重ね合わせを考えるのは，両者が可干渉であるときである。したがって，反射の際の入れ替わりを考えると，まずは2方向からの入射円偏光のスピンの向きが互いに逆向きであることが前提になる。これが変換行列の要素に複素共役が現れる理由である。係数の負符号は，これとは別の話で，次の干渉条件から必要になる。

|B> 側の入射は鏡面の法線方向が |A> 側とは逆だから，s 偏光ベクトル \bar{e}_2 の向きが逆であるが，反射の際にベクトルそのものは変わらない。一方，p 偏光ベクトル \bar{e}_1 は，反射で波数ベクトルの方向が変わるためベクトルの方向が変わる。反射後は， \bar{k}' が |A> からの透過光の k と重なるため， \bar{e}'_1 は透過光の e_1 とは逆向きである。結局， $\bar{e}'_1 = -e_1$ ， $\bar{e}'_2 = -e_2$ となるが，実験室系において反射光と透過光との干渉を考える際は，電場の正の向きを揃えて比較する必要がある。

最も簡単には，|B> 側で規準方向の角度を $\pi/2$ 進めて

$$\bar{e}_{\pm} \rightarrow e^{\pm 2i(\theta_0 + \pi/2)} \bar{e}'_{\mp} = -e^{\pm 2i\theta_0} \bar{e}'_{\mp} \quad (6)$$

とし，(5) の位相変化に符号反転機能を加えておけばよい。こちらにだけ負符号をつけるのは一見非対称に見えるが，|A> 側での反射に対する (5) は，やはり位相が |B> に比べて $\pi/2$ 進んでいて²

$$e_{\pm} \rightarrow e^{\pm 2i\theta_0} e'_{\mp} = -e^{\pm 2i(\theta_0 + \pi/2)} e'_{\mp} \quad (7)$$

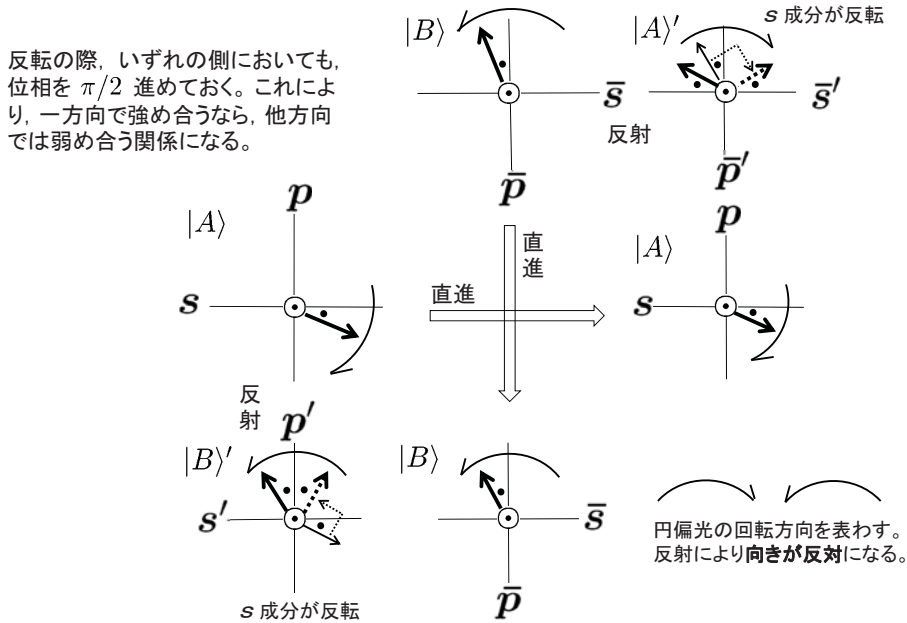
と書くことができ，このままで，|B> 側に合わせて符号を反転する機能を持った形になっている。要するに，ビームスプリッタを合波での干渉に用いるときは，|A> 側と |B> 側で反射の際の方向変化に π の差が出るように，表裏両面での円偏光の位相の規準に「 $\pi/2$ の差」という制約をつければよいのである。合波を含まない光学回路であれば，分波に表裏両面のどちらをどの方向に使用おうと位相の規準には何も制限はつかず，任意の値をあてがえばよい。

以上から，スプリッタの機能を表す変換行列は以下のようなユニタリ行列になる：

$$U(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\xi^* \\ \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = e^{2i\theta_0} \quad (\text{または } e^{-2i\theta_0}) \quad (8)$$

複素共役 ξ , ξ^* は，干渉条件により2方向からの入射光が互いに逆スピンの円偏光であることが前提になるためである。係数の負符号は，やはり干渉条件から電場の正の向きを実験室系で揃えるためであり，上で調べたようにどちらか一方だけにつく。 ξ の定義は |A> からの入射円偏光のスピンの向きによって異なるが，常に逆向きスピンの円偏光対が扱われる限り， ξ と書いておけば不都合は生じない。

² 規準角度が |B> 側に対して逆に $\pi/2$ 遅れるが，円偏光の回転の向きが逆だから位相は同じく $\pi/2$ 進んでいる。規準角度を最初から $\theta_0 = 0$ にしておかないのは，こういう考え方をする場合に便利だからであろう。

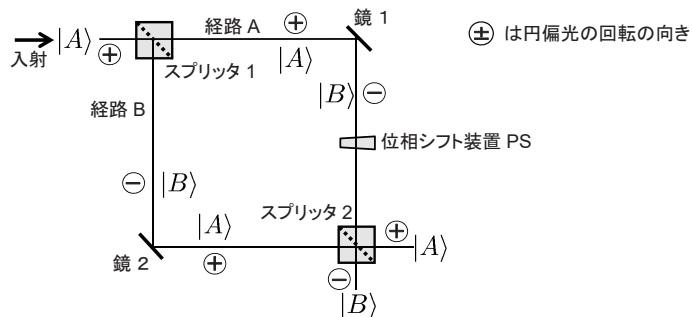


少しでも対称な形に近づけるため、位相変化 π を平等に振り分けて、

$$U'(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i\xi'^* \\ i\xi' & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi' = e^{2i\theta_0} \quad (\text{または } e^{-2i\theta_0}) \quad (9)$$

と書かれることもある。この形で $\theta_0 = 0$ (前の形では $\theta_0 = \pi/4$) とすれば、 U' , U は対称行列となり、いかにも状況が対称的に見えるが、スプリッタが幾何学的に対称だからと言って U が対称行列でなければならないというものではない。規準角度 θ_0 (あるいは ξ) は、 U がユニタリにさえなっておれば何でもよいという性質の量であり、デバイスで決められているわけでもない。

スプリッタを用いた実際の光学回路では、逆スピン対であることさえ設定されておれば、位相の規準 θ_0 の値や反射における円偏光のスピンの入れ替わりなどは、気にしなくてもよいように工夫されているようだ。例えばマッハ-ツェンダー干渉計では、一方の経路の途中に、機械的距離の調整とあわせて光学距離を微調整 (チューニング) する位相シフト装置が挟まれている。これにより、デバイスごとの θ_0 の取り方の任意性は気にしなくてもよいように出来ている。



MZ 干渉計 各経路には図のように鏡が置かれるとともに、経路 A の鏡 1 とスプリッタ 2 の間に、位相シフト装置 PS が挿入されている。円偏光のスピンの違いや θ_0 の任意性により、鏡 1 と鏡 2 で異なる位相 (光学距離) の変化を受けるが、これは PS の機能に含めておくことができる。そこで、計算結果を簡潔にするため両方ともスプリッター 1 と共通の θ_0 をとっておく。さらに、スプリッタ 2 への入力 は鏡での反射により $|A\rangle$, $|B\rangle$ の関係 (入射方向) が入れ替わるので、鏡に

A, B 転置の役割を持たせ³, これらのデバイスの機能を以下のように行列で表しておく:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \xi^* \\ \xi & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \quad (\zeta = e^{i\phi}) \quad (10)$$

スプリッタ 2 への入力では, 円偏光のスピンの鏡により反転しているから, 変換行列は U のままでよい。以上により, 入力から出力までの回路全体の機能は, ユニタリ行列

$$V = UPMU = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \zeta & \xi^*(1 + \zeta) \\ \xi(1 + \zeta) & 1 - \zeta \end{pmatrix} \quad (11)$$

で表される。スプリッタ 1 に左から入力 ($\alpha = 1, \beta = 0$) したとき, 右および下への出力確率は

$$|\langle A|V|A\rangle|^2 = \frac{|1 - \zeta|^2}{4} = \frac{1 - \cos\phi}{2}, \quad |\langle B|V|A\rangle|^2 = \frac{|\xi(1 + \zeta)|^2}{4} = \frac{1 + \cos\phi}{2} \quad (12)$$

となり, 位相シフト ϕ を変えると出力の強弱が周期的に現れる (干渉縞効果)。実際の実験では, どちらか一方への出力になるよう位相シフトを微調整すればよく, 本文では, $\phi = \pi$ のときの結果になるように調整した場合を想定してある。

以上の結論は ξ に依存しないから⁴, 極性のあるハーフミラー ($\xi = 1$) で考察して差し支えない。スプリッタや鏡を含む光学回路の位相変化を初等的に計算でき, 反射条件の説明も簡単である。これに対して $\xi = i$ は, 入力ポートやスピンの悩む必要がないという利点があるが, 鏡でも $\xi = i$ を用いるのであれば, (5) によりスピンの向きに応じて $\pm i$ にしなければならない。

雑書庫 [203] 脚注の補足 (ξ が一般の場合: 質問が寄せられ追加 2017/12)

$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \xi^* \\ -\xi & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1}|A\rangle = \frac{|A\rangle - \xi|B\rangle}{\sqrt{2}}, \quad U^{-1}|B\rangle = \frac{\xi^*|A\rangle + |B\rangle}{\sqrt{2}} \quad (13)$$

だから, この右辺の形の位相差で左と上からスプリッタに入力されたら, 変換行列 U により $|A\rangle$ か $|B\rangle$ のいずれかとなり, 検出器 D_2, D_3 のいずれかが一方へ出力される。したがって

$$|A\bar{A}\rangle + |B\bar{B}\rangle = \frac{\xi|A\rangle + |B\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{\xi^*|\bar{A}\rangle + |\bar{B}\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|A\rangle - \xi^*|B\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|\bar{A}\rangle - \xi|\bar{B}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (14)$$

と直交分解しておけばよい。スプリッタ S_{AB} への入力は $|A\rangle$ が A 側から, $|B\rangle$ が B 側から, 変換後の出力は $|B\rangle$ が D_2 側, $|A\rangle$ が D_3 側を表すから, 変換後の右辺は新たな「もつれ」の状態

$$\frac{\xi|A\rangle + |B\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |D_2\rangle + \frac{\xi^*(\xi|A\rangle - |B\rangle)}{\sqrt{2}} \otimes |D_3\rangle \quad (15)$$

となり, D_2 あるいは D_3 で検出されたとき, スクリーン側では, それぞれ $\xi|A\rangle + |B\rangle, (\xi|A\rangle - |B\rangle)$ に収縮する。したがって, それぞれの場合に再現される干渉縞には位相差 π (強め合う, 弱め合うの関係, すなわち山と谷が逆) があることになる。

³ 別の解釈もできるが, こう考えておけば図をひっくり返したり裏返したりして幾何学で悩む必要がない。

⁴ 遷移確率ではなく出力の位相 (行列要素) $\langle B|V|A\rangle$ そのものには, ξ が残っている。さらに, 各デバイスの位相規準の取り方次第では, 最後に残る位相変化は ξ とは限らない。直線偏光では, $|A\rangle$ から入力して $|A\rangle$ へ出力するときは 2 回反射を受けることで偏光方向は元へもどる。これに対して $|B\rangle$ へ出力するときは反射は 1 回で, 偏光方向の変化を受けるから, 円偏光にも位相変化が残らざるを得ない。物理現象そのものは, 考察の便宜のために導入した人為的な位相規準にはよらないから, あくまで見かけ上の ξ 依存であって気にする必要はない。