じっと見つめておれば陽子は浮気しない！？ —— 量子ゼノン効果

スピンに横向き（x 軸方向）の磁場 B がかかっているとしよう。「MRI（核磁気共鳴）の原理」にあるように，スピンは x 軸を中心軸とした歳差運動をする。（ここでは磁場は x 方向の静磁場だけである。）この場合のハミルトニアンは，磁気回転比を γ として

$$H = -\gamma B L_x = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_x \quad (\omega_0 = \gamma B) \tag{1}$$

である。スピンが最初は σ_z の固有状態である $|+\rangle$ 状態にあったとすれば，t 秒後の波動関数は，シュレーディンガ表示 (10.48)（次ページ**付録**１）により，ユニタリ変換

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{i(\omega_0 t/2)\sigma_x}|+\rangle &= \left(\sigma_0 \cos\frac{\omega_0 t}{2} + i\sigma_x \sin\frac{\omega_0 t}{2}\right)|+\rangle \\ &= \cos\frac{\omega_0 t}{2}\ |+\rangle + i\sin\frac{\omega_0 t}{2}\ |-\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

で与えられる[1]（→**付録**２）。この状態は，**付録**２を用いて量子力学的な期待値を計算すれば

$$\begin{aligned} \langle\sigma_x\rangle_t &= \langle\psi(t)|\sigma_x|\psi(t)\rangle &= 0 \\ \langle\sigma_y\rangle_t &= \langle\psi(t)|\sigma_y|\psi(t)\rangle &= \sin\omega_0 t \\ \langle\sigma_z\rangle_t &= \langle\psi(t)|\sigma_z|\psi(t)\rangle &= \cos\omega_0 t \end{aligned} \tag{3}$$

となり，x 方向から見て時計回りの回転を表していることがわかる。この歳差運動によってスピンは $|+\rangle$ と $|-\rangle$ の間を周期的に行き来し，時刻 t に $|+\rangle$，あるいは $|-\rangle$ 状態に見出される確率は，それぞれ以下で与えられる：

$$P_+(t) = |\langle+|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^2\frac{\omega_0 t}{2},\ P_-(t) = |\langle-|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2\frac{\omega_0 t}{2} \tag{4}$$

ここで，時間 t の間に繰り返し N 回，σ_z を観測するとする。$\Delta t = t/N$ 後に $|+\rangle$ である確率は

$$P_+(\Delta t) = \cos^2\frac{\omega_0 t}{2N} \tag{5}$$

である。観測して $|+\rangle$ か $|-\rangle$ のどちらかの状態に決まったら，ユニタリ変換は**その時点から出直し**である。したがって，最初の観測の結果 $|+\rangle$ であったときには，次の観測においても同じ確率で $|+\rangle$ 状態が見出される。結局，t までの間，引き続いて $|+\rangle$ のままでいる確率は

$$P_N(t) = \left(\cos^2\frac{\omega_0 t}{2N}\right)^N \tag{6}$$

である。観測を絶え間なく行う（$N \to \infty$）とすれば，**付録**３により，$\lim_{N\to\infty} P_N(t) = 1$ となり，他の可能な経過の確率は０である。すなわち，横磁場な誘惑で彼我の間をふらふらするスピンも，じっと見つめているだけ，すなわち頻繁に観測を続けるだけで，いちいち確認をしなくても，確率１で元の状態に引き留めておくことができる。

これをゼノンの矢のパラドックス「飛んでいる矢は止まったままである」（各瞬間ごとに目撃すれば，矢はいつでもどこかある位置を占めて静止している）にちなんで，**量子ゼノン効果**という。ゼノンやアリストテレスもさぞびっくりしていることだろう。

[1] この話には関係ないが，歳差運動の周期 $t = 2\pi/\omega_0$ でも波動関数は元にもどらず符号が逆になっている。つまり，スピンの**波動関数の周期は２倍**になっている。

付録 1　シュレーディンガ表示：　ハミルトニアンを H とするとき，シュレーディンガ方程式

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \tag{7}$$

の解は，指数演算子（H がエルミートだからユニタリ演算子）を用いてユニタリ変換

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-iHt/\hbar}\ |\psi(0)\rangle \tag{8}$$

で与えられる。[2]

付録 2　パウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \sigma_x|+\rangle = |-\rangle, & \sigma_x|-\rangle = |+\rangle \\ \sigma_y|+\rangle = i|-\rangle, & \sigma_y|-\rangle = -i|+\rangle \\ \sigma_z|+\rangle = |+\rangle, & \sigma_z|-\rangle = -|-\rangle \end{cases} \tag{10}$$

${\sigma_\alpha}^2 = \sigma_0\ (\alpha = x, y, z)$（$\sigma_0$ は 2 次元の単位行列）であることから，s を任意の実数として

$$\mathrm{e}^{is\sigma_\alpha} = \sigma_0 \cos s + i\sigma_\alpha \sin s\ \ (\alpha = x, y, z),\quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

付録 3　遷移（しない）確率 $P_N(t)$ の極限評価：　$\sin^2 x < x^2$,　$(1-x^2)^N > 1 - Nx^2$ より

$$P_N(t) = \left(1 - \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2N}\right)^N > \left(1 - \frac{{\omega_0}^2 t^2}{4N^2}\right)^N > 1 - \frac{{\omega_0}^2 t^2}{4N} \tag{12}$$

$P_N(t) \leq 1$ だから極限は以下となる：

$$\lim_{N\to\infty} P_N(t) = 1 \tag{13}$$

付録 4　物理量 Q のハイゼンベルグ表示は

$$Q(t) = \mathrm{e}^{itH/\hbar} Q \mathrm{e}^{-itH/\hbar} \tag{14}$$

で与えられる。$|\psi(0)\rangle$ が Q の固有値 q に対応する固有状態，すなわち $Q|\psi(0)\rangle = q|\psi(0)\rangle$ であったとき，

$$\begin{aligned} Q(-t)|\psi(t)\rangle = (\mathrm{e}^{-itH/\hbar} Q \mathrm{e}^{itH/\hbar})\ \mathrm{e}^{-itH/\hbar}|\psi(0)\rangle &= \mathrm{e}^{-itH/\hbar} Q|\psi(0)\rangle \\ &= \mathrm{e}^{-itH/\hbar} q|\psi(0)\rangle = q|\psi(t)\rangle \end{aligned} \tag{15}$$

すなわち，$|\psi(t)\rangle$ は物理量 $Q(-t)$ の，同じ固有値 q をもつ固有状態である。もし $Q(-t)$ が実際に観測可能な物理量であれば，波動関数は確率 1 の決定論的な運動を与えている。

[2] これを用いて (3) のように期待値で表したから，スピンの歳差運動は**確率的** (stochastic) と思うかもしれないがそうではない。量子化軸を yz 面内で時計回りに刻々方向が変わる回転座標系の $z' = z\cos\omega_0 t + y \sin\omega_0 t$ にとれば，(2) の重ね合わせの状態 $|\psi(t)\rangle$ は，各瞬間に σ'_z の固有値 +1 の固有状態，$\sigma'_z|\psi(t)\rangle = |\psi(t)\rangle$ になっており，その意味で確率 1 で決まる**決定論的** (deterministic) な運動である。なお，σ'_z はハイゼンベルグ表示 $\sigma_z(-t)$ である。（**付録** 4）

量子力学では運動そのものが確率的であり，その確率を与える波動関数だけが決定論的な方程式であるシュレーディンガ方程式に従うと書かれていることがある。正確には，量子力学で確率が現れるのは，注目している状態 $|\psi(t)\rangle$ が固有状態になるとは限らない物理量，この例では元の σ_z 等を観測するときである。演算子，あるいは行列で表される物理量（q 数）を観測すると，普通の数（c 数）である測定値としてはその固有値しか得られないとうのが量子力学である。どの固有値が見出されるかは一般には確定的でなく（不確定性原理），見出される確率が波動関数で与えられる。

（例）自由粒子の場合，$H = p^2/2m$ として

シュレーディンガ表示：

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-(it/2m\hbar)p^2}|\psi(0)\rangle$$

ハイゼンベルグ表示（※）：

$$x(t) = \mathrm{e}^{(it/2m\hbar)p^2} x \mathrm{e}^{-(it/2m\hbar)p^2} = x + \frac{t}{m}p$$

より，

$$x(-t)|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-(it/2m\hbar)p^2} x|\psi(0)\rangle$$

したがって，初期状態が演算子 x の固有値 x_0 の固有状態，

$$x|\psi(0)\rangle = x_0|\psi(0)\rangle$$

のとき，

$$x(-t)|\psi(t)\rangle = x_0|\psi(t)\rangle$$

となる。すなわち，$|\psi(t)\rangle$ は，演算子 $x(-t) = x - (t/m)p$ の，同じ固有値 x_0 をもつ固有状態である。したがって，x と p のそれぞれは同時に確定的にはならないが，$x - (t/m)p$ を測定すれば —— もし測定する手段があればであるが —— 確定的に決まる。

同じ意味で，ハイゼンベルグ表示 $x(t)$ の固有状態は $|\psi(t)\rangle$ でも $|\psi(0)\rangle$ でもなくて，強いていうならば $|\psi(-t)\rangle$ である。

（※）ハイゼンベルグ表示のこの形は，交換関係

$$[x,p] = i\hbar, \quad [x, p^{2n}] = 2in\hbar p^{2n-1}, \quad [x, \mathrm{e}^{-(it/2m\hbar)p^2}] = \frac{t}{m}p\mathrm{e}^{-(it/2m\hbar)p^2}$$

を用いて計算することができる。位置エネルギーがある場合は，こう簡単にはいかない。

（参考）初期状態がある不確定性をもった波束（x の固有関数ではない），

$$\psi(x,0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}a)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2} + ik_0 x\right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}a)^{1/2}} \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2(k-k_0)^2 + ikx} \mathrm{d}k$$

のとき

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}a)^{1/2}} \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a^2(k-k_0)^2 + ikx - \frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}t\right) \mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}a(t))^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{4a(t)^2}\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2 + \frac{ik_0 x}{a(t)^2/a^2} + \frac{it}{\hbar}(\text{その他の位相項})\right)
\end{aligned}$$

となる。ただし

$$a(t)^2 = a^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 a^2}$$

ここで，$\hbar k_0 = p_0 = mv_0$，および $\hbar k = p = mv$ とおけば，

$$\langle x\rangle_0 = 0,\ \langle k\rangle_0 = \langle k\rangle_t = k_0,\ \langle(\Delta x)^2\rangle_0 = a^2, \quad \langle(\Delta k)^2\rangle_0 = \langle(\Delta k)^2\rangle_t = \frac{1}{4a^2}$$

$$\langle x\rangle_t = v_0 t, \quad \langle(\Delta x)^2\rangle_t = a(t)^2 = \langle(\Delta x)^2\rangle_0 + \langle(\Delta v)^2\rangle_0 t^2$$

となり，速度の不確定性によって位置の不確定性が増加（拡散）していく。