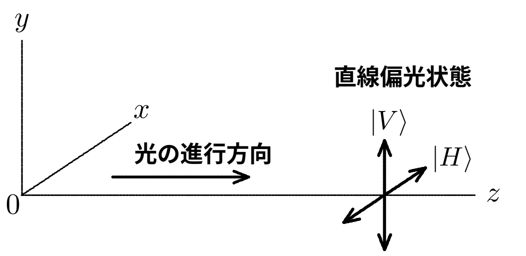
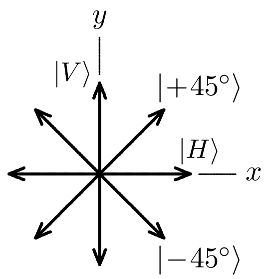
光子の偏光とスピン

光子のスピンは，大きさが $S=1$ で，$S_z=+1$ が進行方向に向かって「右回り（時計回り）」，$S_z=-1$ が「左回り（反時計回り）」の（横波の）**円偏光**に対応し，$S_z=0$ の状態（縦波光子）は観測されない。したがって光子の偏光は 2 つの固有状態をもつ物理量であり，パウリ行列に対応させせることができる。パウリ行列の名前の**添え字**は，座標の x, y , z との混乱を避けるため，単位行列を含めて 0, 1, 2, 3 とする：　　［**注．**前のノート **[227]** では，σ_1, σ_2 を Z, X と書いている。］

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} \tag{1}$$

光子のスピンという元々の物理量としては円偏光が基本になるのであるが,「偏光」という幾何学的なイメージでは，**直線偏光**を出発点とする方が分かりやすい。光の進行方向を水平とし，これを $+z$ 方向 $\boldsymbol{e}_z$ とする。これに垂直な面内で，進行方向に向かって水平方向・左向き（紙面奥向き）に $+x$ 方向 $\boldsymbol{e}_x$ と，鉛直方向・上向きに $+y$ 方向 $\boldsymbol{e}_y$ をとる。（通常の**右手系**：$\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y$）





座標をこのように決めた上で，水平方向・鉛直方向の**直線偏光**状態を $|H\rangle$, $|V\rangle$ とする。これらはたがいに独立で直交しており，とりあえず**基底**にとる。偏光方向は，例えば電場ベクトルの向きに対応することを考慮すれば，xy 平面上で x 軸から y 軸に向かって角度 φ が $\pm45°$，$(\boldsymbol{e}_x\pm\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2}$ 方向の直線偏光は，$|H\rangle$ と $|V\rangle$ の重ね合わせの状態（ベクトル和）として，それぞれ[1]

$$|\pm45°\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\ |H\rangle\pm|V\rangle\ )\quad \text{（複号同順，以下同様）} \tag{2}$$

で与えられる。$|H\rangle$, $|V\rangle$ を列ベクトル

$$|H\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad |V\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{3}$$

で表すとき，それぞれのセットはパウリ行列 σ_1 と σ_2 の固有値 ±1 の固有状態,

$$\sigma_1|H\rangle=|H\rangle,\quad \sigma_1|V\rangle=-|V\rangle,\quad \text{および}\quad \sigma_2|\pm45°\rangle=\pm|\pm45°\rangle \tag{4}$$

であることがわかる。さらに，位相差 $\pm i\ (=\mathrm{e}^{\pm i\pi/2})$ をかけて重ね合わせた[2]

$$|R\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\ |H\rangle+i|V\rangle\ ),\quad |L\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\ |H\rangle-i|V\rangle\ ) \tag{5}$$

[1] 2 状態の**ヒルベルト空間**を，便宜上，**実係数**の範囲内で xy 平面と重ねて考えている。(5) のように**複素係数**まで拡がればこうはいかず，状態ベクトルを xy 平面上のベクトルに対応させて考えることはできなくなる。(5) の円偏光ベクトルはヒルベルト空間では直交しているが，xy 面上では直交ベクトルではない。

[2] 位相差 $\pi/2$ を，$|H\rangle$ と $|V\rangle$ に $\pm\pi/4$ ずつ振り分けて構成することもできる。→ **[206]**

は，σ_3 の固有状態

$$\sigma_3|R\rangle = |R\rangle,\quad \sigma_3|L\rangle = -|L\rangle \tag{6}$$

となる。逆に，$|R\rangle$，$|L\rangle$ を**基底**とすれば，xy 面内の任意の角度 φ 方向の直線偏光は，(5) により

$$|\varphi\rangle = \cos\varphi|H\rangle + \sin\varphi|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ \mathrm{e}^{-i\varphi}|R\rangle + \mathrm{e}^{i\varphi}|L\rangle\ ) = \frac{\mathrm{e}^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}(\ |R\rangle + \mathrm{e}^{2i\varphi}|L\rangle\ ) \tag{7}$$

で与えられる。$|R\rangle$，$|L\rangle$ は，平面波の波動関数を用いれば，偏光方向を表すベクトルとして

$$|R\rangle = (\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y)\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\ ,\quad |L\rangle = (\boldsymbol{e}_x - i\boldsymbol{e}_y)\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \tag{8}$$

と表すことができる［電場ベクトルはこの実部（または虚部）に対応し，磁場ベクトルはこれと同位相で，向きを $\varphi = +90^\circ$ 回転（$\boldsymbol{e}_x \to \boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_y \to -\boldsymbol{e}_x$）したもの］。例えば $z = 0$ で眺めておれば

$$\begin{aligned} |R\rangle &= (\boldsymbol{e}_x\cos\omega t + \boldsymbol{e}_y\sin\omega t) - i(\boldsymbol{e}_x\sin\omega t - \boldsymbol{e}_y\cos\omega t) \\ |L\rangle &= (\boldsymbol{e}_x\cos\omega t - \boldsymbol{e}_y\sin\omega t) - i(\boldsymbol{e}_x\sin\omega t + \boldsymbol{e}_y\cos\omega t) \end{aligned} \tag{9}$$

となることから分かる[3]ように，$|R\rangle$ と $|L\rangle$ は（実部・虚部とも），進行方向に向かって それぞれ「右回り（時計回り）」と「左回り（反時計回り）」に電場（磁場）の向きが回転する，**円偏光**状態（$S_z = \pm 1$）を表している。これを「**helicity** が ± 1 である」ともいう。

光子の **EPR 実験**は，原子から放出される 2 光子のスピン角運動量の和が 0 の EPR 対，

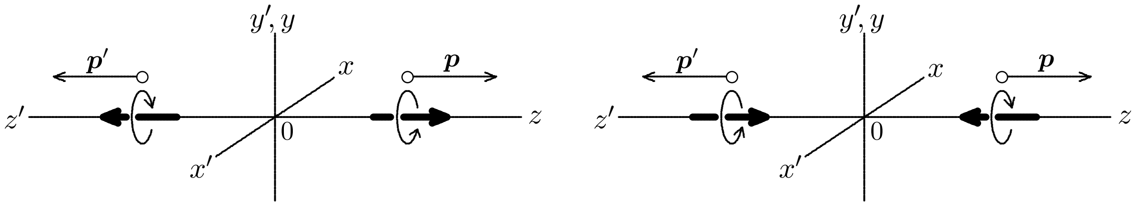
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ |RR\rangle + |LL\rangle\ ) \tag{10}$$

を用いて行われる。RL 対あるいは LR 対の間違いではない。2 つの光子の運動量が $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}' = 0$ で，たがいに**反対向き**に飛んでいくため，R と R，L と L でそれぞれ光子スピンも反対向きになり，角運動量がキャンセルする。EPR 対は (10) の形のときに限り，(5) と (2) により

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ |HH\rangle + |V\overline{V}\rangle\ ) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ |+45^\circ, -45^\circ\rangle + |-45^\circ, +45^\circ\rangle\ ) \tag{11}$$

と書くこともできる（ $|\overline{V}\rangle$ は波の位相が反転した $-|V\rangle$ の意味）。たがいに反対向きの進行方向を考慮すると，いずれも偏光方向が平行で逆位相（電場が逆向き）の直線偏光の対になっている。**偏光盤**を用いた観測実験では，この形に書き換えて考える方が便利である。

反対向き RR 対　←< この 2 つの重ね合わせ >→　反対向き LL 対



太い矢印は**スピンの向き**を表す。x'，y'，z' は，左向きに進む光子の右手系座標。

[3] 少々紛らわしいが，xy 面上のベクトルを**複素平面の複素数**で表せば，$|R\rangle$ の実部 $= \mathrm{e}^{i\omega t}$，虚部 $= \mathrm{e}^{i(\omega t + \pi/2)}$，$|L\rangle$ の実部 $= \mathrm{e}^{-i\omega t}$，虚部 $= \mathrm{e}^{-i(\omega t + \pi/2)}$ となり，ベクトルの回転方向が見えやすい。なお，xy 平面上での回転方向は，通常は z 方向から見て，それぞれを「左回り／右回り」と言い，電磁気学では伝統的にこれを「光に対面して，**左偏光／右偏光**」と呼んでいる。このため $|R\rangle$，$|L\rangle$ の記号の使い方が逆になっているテキストもある。後で出てくる **Helicity** は，運動量ベクトルを $\boldsymbol{p}$ として，運動量方向のスピンの成分，$h = (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})/|\boldsymbol{p}|$ で定義される。