誘電体中の静電場 （2019/5/10）

話を簡単にするため均質・等方性の誘電体に限定し，空気の誘電率は真空中と同じ ϵ_0 とする。

クーロンの法則　絶縁物質中でのクーロンの法則（2 つの点電荷の間に働く力の大きさ）を

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \tag{1}$$

とする。高校の教科書の電磁気学の法則はここから始まり，真空の話は後から出てくる。教科書では比例定数は k と書いて「クーロンの（法則の）定数」と呼び，その大きさは「電荷をとりまく物質に依存する」とされている。電場や電位などの話も，真空ではなく物質のまま進められていく。ここでは先取りして比例定数は誘電率 ϵ を用いた $1/4\pi\epsilon$ で書くことにする。

誘電分極　絶縁体はほとんどの場合に誘電体である。誘電体で満たされた空間の中に点電荷 q を置くと，q が作る電場により周りの空間に分極 $\boldsymbol{P}$ が生じる。分極は分離できない正負等量のミクロな電荷対（電気双極子）の整列に起因する。つまり，誘電体の表面など分極の不均一により現れる**分極電荷**はマクロな立場では見かけ上の電荷であり，ガウスの法則で与えられる電束密度 $\boldsymbol{D}$ の源は，単独で取り出せる**真電荷**だけである。したがって $\boldsymbol{D}$ は，電荷の置かれた点を中心にして等方的な真空中と全く同じものである。その結果，誘電体中の電場 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\epsilon$ は，点電荷

$$q' = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} q = q - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) q \tag{2}$$

が真空中に作る電場に等しい。この真電荷とこれに誘導された分極電荷を合わせたもの（重ね合わせたもの）が作る電場の中に別の真電荷を置くとクーロン力 (1) が働くという風に，物質中の電場の概念が導入される。

つまり電荷 q は周りに誘起された（異符号の）分極電荷の「反衣」を着ることにより，$\epsilon_0/\epsilon\ (< 1)$ 倍に減量されていると見なすことができる。そうすると，距離 r 離れた位置に 2 つの点電荷 q_1，q_2 が置かれた場合に，両者の間に働く力の大きさを，<u>両方とも</u> 衣を着せて

$$\frac{{q_1}'{q_2}'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \left(= \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\ \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2}\right) \tag{3}$$

としたくなるが，決してそうはしない。減量された一方の電荷 ${q_1}'$ が作る等方的クーロン電場の中に，もう一方の「裸」の電荷 q_2 が持ち込まれたと考える。これが電場の定義[1]である。分極電荷は電場を作るという意味では真電荷と同等であるが，上で見たように物質中のクーロン相互作用を考える際には分極電荷の間の力は考慮しない。このように分極電荷は半端な，まさにバーチュアルな存在なのである。以上のことは，媒質中のクーロン力 (1) を扱っている限り「何を言いたいんや？」と笑われそうな，ごくあたり前のことなのであるが，コンデンサなどの導体系で働く力の話になってくると，ついつい忘れてしまって混乱をきたすことがある。

第一の落とし穴　面積 S の平行板コンデンサの両極板に $\pm Q$ の電荷を蓄えた場合を考えよう。極板間が真空のときにできる電場と，極板上の電荷に働く力は

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}\ ,\quad F = \frac{1}{2} Q E = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \tag{4}$$

[1] 電場は**真電荷** q が受ける力 $\boldsymbol{F}_q$ から，$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}_q/q$（正確には q 自身が及ぼす影響を除くため，$q \to 0$ の極限）として定義される。衣を着た電荷は，反作用として真電荷のみから力を受けることになり，物質中のクーロンの法則では，分極電荷の間の力は考えない（$\to$ p.4）。このように分極電荷は作用・反作用の関係が対称ではなくて，どちらに衣を着せるかなど異なる理解の仕方が可能である。分極電荷は生来，それをもたらした真電荷とは独立な存在でないため，重ね合わせの原理を考える場面では要注意である。

である。（係数 1/2 は以後いろんな場面に出てくるが，ここでは電場 E のうち半分は「それぞれの極板上の電荷が自分で作っている電場であって，自分自身はその力を受けない」と考えておくと分かりやすい。）極板間の空間に誘電率 ϵ の誘電体を詰めたとき (4) は,

$$E' = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon S} \;, \quad F' = \frac{1}{2}QE' = \frac{Q^2}{2\epsilon S} \tag{5}$$

となり，極板間の力は弱められる。この力 F' は，クーロンの法則 (1) に照らせば，明らかに**極板上の $\pm Q$ の真電荷の間に働いている力**以外の何ものでもない。電場や誘電率が，そのように定義されているのである。定義には論理はなくても，いったん定義したらそれに従って矛盾なく，論理を組み立てなければならないのだ。この力を電荷の間に働くクーロン力から直接求めようとして，両極板とも分極電荷を中和して減量した残りの電荷

$$\pm\, Q' = \pm \frac{\epsilon_0}{\epsilon} Q \tag{6}$$

の間に働く力から計算すると，点電荷のときに冒しかけた過ち (3) の繰り返しになってしまう：

$$\frac{Q'^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\frac{Q^2}{2\epsilon S} \tag{7}$$

脚注 1 の通り，衣を着た電荷は対極の真電荷のみから力を受けるとしなければならない。

第二の落とし穴　「否！平板状の誘電体の平行な両表面に露出した正負の一様な分極電荷は，誘電体の外に電場を作らないから，重ね合わせの原理により極板上の電荷に力を及ぼさない。なんなら誘電体と極板の間に微小な隙間を仮定すれば，そこに出来る電場は真空中の (4) であるから，真電荷そのものの間に働いている力としては，あくまで (4) が正しい。[2]」「(5) は電荷ではなく極板の間に働く力であって，間に挟んだ誘電体から極板が受ける**機械的な力**が含まれているのだ。」

前半はその通りだが，マクロな電磁気学では無限小の隙間，つまり**絶縁**されているかいないかで現象に不連続な差異が生じることは，普通のことである。自明な例は間に詰めたのが誘電体ではなく導体板の場合である。接触して絶縁が破れた瞬間に電気的には完全に中和してしまう。

後半の機械的な力は，少々厄介である。電場により分極した誘電体の表面には内外の静電エネルギー密度の差に起因する Maxwell 応力により，外向きに張っぱる力が働くため，誘電体内部は減圧される。（**固体**の場合はこれを引き戻す弾性力が働いて固体の形状を維持するため，コンデンサの極板との関係は一筋縄ではいかない。まずは非圧縮性の**液体誘電体**で考えることにする。また，**重力**の影響は本質的ではないので無視する。）したがって液体の表面が維持されている場合，誘電体の外から内向きにこの静電力と釣り合う**機械的な圧力差**が生じていなければならない。

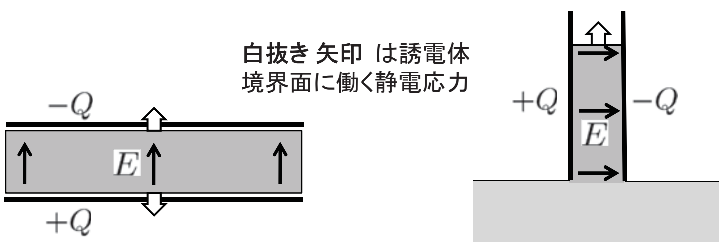

図1　　図2

[2] 「『電荷と電荷の間に働く力』を日本語として文字通りに理解すれば，これ以外にはない」という難癖に至っては論外。物質中のクーロンの法則を，いちいち「電荷と電荷が誘電体を介して…」とは言わないが，物理（科学）にはこういう約束事が多いので，これはこれで学習してもらわなければならない。

極板間に誘電液体を封入し，大気圧中で極板を手放す。このとき極板間の静電引力は (5) により F' である。ここで**図 1** のように誘電体と極板との間に隙間を開けて**非誘電的**液体を挟むと，非誘電液体の静水圧 P は誘電液体の P' より界面に働く静電応力の分だけ大きくなって釣り合う。極板に働く静電引力は (4) の F となるが，大気圧 P_0 は不変だから極板に働く合力は $P-F=P'-F'=P_0$ で変わらない。つまり極板間に誘電体を封入したことで静電引力が減るように見えたのは，**板**に働く静水圧と大気圧の差が $P'-P_0<P-P_0$ と，小さくなったためと言える。

また，静電エネルギーが電場に垂直な方向に変化している場合には，電気力線の間の反発力となるような静電応力が生じる。このため 電場に平行 な媒質の境界面がある場合には，境界面を外側へ押し出す応力となり，やはり外から内へ向かう静水圧差が現れる。**図 2** のように平行板コンデンサを誘電体液面に垂直に立てた場合，上の境界面を仮に移動したときの静電エネルギー変化から仕事を求めれば，ここで働いている静電応力が上向きに働くことが分かり，これと釣り合う下向きの静水圧差が生じている。このとき下面は動かず仕事は要しないのでエネルギー変化への寄与はなく，普通は上面でできた静水圧差が極板間に上昇した液体に働く重力を支えていると考える。ちょうど**毛細管現象**で，液柱の上面が曲率を持つことで液面の内外で大気圧との間に圧力差が生じて液柱の重力を支えるのと似ている。別の見方も可能である。下面付近では電場の強さが激しく変化しているため，下面の上と下で双極子の電気的位置エネルギー差を生じており，これから双極子が受ける静電力が液体を 押し上げている と言ってもよい。このことは双極子に働く力の観点から後ほど，もう少し詳しく見ることにする。（→p.8）

以上の例のように物質中の静電力の効果は，機械的な力で説明することができるように見える。しかしながらここで登場する機械的な力は，電気的な力が働いている状態を維持するために必要な電気的ではない力のことであって，あくまで**原因ではなく結果**である。真空中で正負の点電荷の間にクーロン引力が働いている場面でも，黒衣が見えない糸か何かで引っぱっていないと状態を維持できない。誘電体の場合，上の例のように自分自身が 黒衣の役も果たすことがあり，黒衣を出演者だと錯覚してしまうのである。黒衣に気を取られたら，個々の場面では誰がどちらを向いているのか，混迷の奈落に陥てしまうこと請け合いである。さらに，言うまでもなく真空中の静電現象に機械的な力を登場させることは，エーテル説が神話になった今日では現実味はない。

このように，個々の場面によって異なる思考の無駄を避けて電気現象の法則だけを抽象するため，マクロな電磁気学では**物質中の電場**という概念を実在として導入する。物質中で電荷の間に働く力そのものを場の作用で表し，お呼びでない限り黒衣のことは考えなくてすむようにするのである。クーロンの法則 (1) から出発して場の概念に至る，マクロな電磁気学の体系を完成させた先人の知恵に素直に従えば，決して迷いや間違いは冒さない。大抵の教科書は，そのような論理で書かれている。コンデンサの極板間の力の問題では，静電応力は元々界面近傍の過渡的な薄い層に働く**電気的な体積力**であるから，相手はあくまで極板に貼りついた電荷であり，接触により絶縁が破れて電気力線が一部分消えると考える方が合理的である（→p.9）。機械的な力にことさら意味を持たせる考え方は，言わば誘電体を，電気的影響を受けて変形・変質する 単なる力学的媒体[3]とみなす立場である。どうしてもその立場で教育するのであれば，点電荷つまり物質中のクーロンの法則にまで遡って理論体系を再構成しないと，生徒はダブルカウントのミスを冒す。

[3] 平板とちがって**反電場係数**（→**[201]**）が 1 より小さい球などの誘電物体を極板の間に置くと，物体表面に現れる分極電荷は物体外にも電場をもたらし，極板に対して明らかに**電気的な力**を及ぼす。

（補足） 誘電体に働く体積力 $\quad \boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} - [\boldsymbol{E}^2/2]\nabla\epsilon$

問題 2 はむしろ逆で，誘電率が一様でない誘電体の体積力が先に与えられていると考えるべきである。この力は，境界面と電気力線の方向の関係によって応力の向きが違う（張力または圧力）ように，単純に『スカラー量である静電エネルギー密度 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}/2$ の勾配で与えられる』というわけにはいかない。

簡便な方法 双極子に働く力は，位置エネルギー $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}/2$ の勾配と，電場が一様でないときの並進力 $(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}$ であるから，分極密度を $\boldsymbol{P} = \chi\boldsymbol{E}$ として，単位体積当たりの力は

$$\boldsymbol{f}_P = -\frac{1}{2}\nabla(\chi\boldsymbol{E}^2) + \chi(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} = -\frac{1}{2}\nabla(\chi\boldsymbol{E}^2) + \frac{\chi}{2}\nabla\boldsymbol{E}^2 = -\frac{\boldsymbol{E}^2}{2}\nabla\chi \tag{1}$$

である。ただし，

$$\nabla\boldsymbol{E}^2 = 2(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})\ , \quad \nabla\times\boldsymbol{E} = 0 \tag{2}$$

を用いた。$\chi = \epsilon - \epsilon_0$ とすれば標記の結果（第 2 項）が得られるが，どうも結果オーライの話のようだ。仮想仕事を用いて，もう少し厳密に導いておこう。

まず誘電率が $\epsilon(\boldsymbol{r})$ の誘電体の中に電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，および $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \epsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ ができているとき，真電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ は変えないで，ある小さな体積部分 V' を誘電率 ϵ' の誘電体で置き換えるのに要する仕事が，以下のように求められる。ここで $\boldsymbol{E}'$，$\boldsymbol{D}'$ は V' の誘電率を ϵ' で置換えた後にできる，全域での場である。静電エネルギー $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}/2$ の変化量を

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{D}' - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int[(\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{E})\cdot(\boldsymbol{D}' - \boldsymbol{D}) + (\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}')]\mathrm{d}V \tag{3}$$

と変形する。積分域は V' を完全に含む全空間である。第一項は電位 ϕ，ϕ' を用いて

$$-[\nabla(\phi' + \phi)]\cdot(\boldsymbol{D}' - \boldsymbol{D}) = -\nabla\cdot[(\phi' + \phi)(\boldsymbol{D}' - \boldsymbol{D})] + (\phi' + \phi)(\nabla\cdot\boldsymbol{D}' - \nabla\cdot\boldsymbol{D}) \tag{4}$$

と書けるが，この第二項は電荷分布が不変であれば $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \nabla\cdot\boldsymbol{D}' = \rho$ により消える。第一項は Gauss の定理を用いて無限遠方での面積分に書き換えれば，$\phi \sim 1/r$，$D \sim 1/r^2$，$S \sim r^2$ により

$$\int\nabla\cdot[(\phi' + \phi)(\boldsymbol{D}' - \boldsymbol{D})]\mathrm{d}V = \lim_{r\to\infty}\oint(\phi' + \phi)(\boldsymbol{D}' - \boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S = 0 \tag{5}$$

とみなすことができる。結局

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}')\mathrm{d}V \tag{6}$$

となるが，V' の外では $\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}' = \epsilon\boldsymbol{E}'$ により $\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}' = 0$ であり，V' 内での変化の形

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int_{V'}(\epsilon - \epsilon')\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{E}\ \mathrm{d}V \tag{7}$$

に書くことが出来る。以上より，誘電率の変化によるエネルギー変化は，V' 内の各位置で単位体積当たり

$$\delta U_\epsilon(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{2}\ [\epsilon'(\boldsymbol{r}) - \epsilon(\boldsymbol{r})]\ \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \quad \left(= -\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})^2}{2}\ \delta\epsilon(\boldsymbol{r})\right) \tag{8}$$

となる。ここで，$\epsilon' - \epsilon = \delta\epsilon$ が微小量とみなせるときは，$\boldsymbol{E}'$ は $\boldsymbol{E}$ で置き換えて（　）内のように書けばよい。同様に，1 ケ所だけでなく全域の各部分で誘電率が微小変化するときも，他の部分の誘電率の変化による影響は無視できて，エネルギー変化はこの局所的な変化の重ね合わせで考えればよい。

誘電率の分布の形を保ったまま仮想変位 $\delta\boldsymbol{r}$ を行うとき，各位置で誘電率の変化は $\delta\epsilon(\boldsymbol{r}) = -\nabla\epsilon(\boldsymbol{r})\cdot\delta\boldsymbol{r}$ であり，誘電率が一様でないことによる体積力を $\boldsymbol{f}_\epsilon(\boldsymbol{r})$ とすると，仮想変位に要する仕事は

$$\int[-\boldsymbol{f}_\epsilon(\boldsymbol{r})]\cdot\delta\boldsymbol{r}\ \mathrm{d}V = \int\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})^2}{2}\nabla\epsilon(\boldsymbol{r})\cdot\delta\boldsymbol{r}\ \mathrm{d}V\ ,\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{f}_\epsilon(\boldsymbol{r}) = -\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})^2}{2}\nabla\epsilon(\boldsymbol{r}) \tag{9}$$

したがって誘電体の各部分には，真電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ に対するクーロン力[1] $\boldsymbol{f}_\rho(\boldsymbol{r})$ と合わせて体積力

$$\textbf{誘電体中の体積力：}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})^2}{2}\nabla\epsilon(\boldsymbol{r}),\quad (\ \nabla\epsilon(\boldsymbol{r}) = \epsilon_0\nabla\chi(\boldsymbol{r})\ ) \tag{10}$$

が働くことになる。異なる媒質の境界面で働く応力は，過渡領域でこれを積分することにより得られる。任意の体積部分に働くこの体積力を，等価な表現として表面での応力の面積分で与えるのが Maxwell 応力テンソルである。この 2 種類の力が共存しているわけではない。$\rho = \nabla\cdot\boldsymbol{D}$ を用いて**問題 2** の逆をたどれば導くことができるが，テンソルになることが分かっていないと少々難しい。（2 つのベクトル量 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ から作られるテンソル量は，テンソル積 $\boldsymbol{E}\boldsymbol{D} = \{E_i D_j\}$ とスカラー的対角テンソル $\{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\delta_{ij}\}$ だけである。）

[1] 電荷分布も微小変化する場合，(4) の第二項より $\delta U_\rho = \phi\delta\rho$，これに電荷の保存則 $\delta\rho = -\nabla\cdot(\rho\delta\boldsymbol{r})$ を適用して部分積分，$\delta U_\rho = -\nabla\cdot(\rho\phi\delta\boldsymbol{r}) + \rho\delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla\phi$，Gauss の定理で第一項 $= 0$ $\therefore\ [-\boldsymbol{f}_\rho(\boldsymbol{r})]\cdot\delta\boldsymbol{r} = \delta U_\rho(\boldsymbol{r}) = [-\rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})]\cdot\delta\boldsymbol{r}$